Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Л.Н. МАРЧЕНКО

М А Т Е М А Т И Ч Е С К И Й А Н А Л И З

Тексты лекций
для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть четвертая

Д и ф ф е р е н ц и а л ь н о е и и н т е г р а л ь н о е ис- ч и с л е н и е ф у н к ц и и н е с к о л ь к и х п е р е м е н н ы х

Гомель 2006

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73
М 30

Рецензенты:
Л.П. Авдашкова, доцент, кандидат физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации»
А.Р. Миротин, профессор, доктор физико-математических наук, кафедра высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

Марченко Л.Н.
М30 Математический анализ [текст] : [тексты лекций для студентов физического факультета. Ч.4.: Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных] /Л.Н. Марченко: Мин-во обр. РБ. – Гомель: «УО ГГУ им. Ф. Скорины», 2006. – 281 с.

Тексты лекций разработаны в соответствии с требованиями государственного стандарта подготовки специалистов специальности «Физическая электроника». В четвертой части содержится материал по темам «Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных» и «Интегральное исчисление функции нескольких переменных».
Пособие адресовано студентам физического факультета.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161 Я 73

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие «Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных» является четвертой частью текстов лекций по математическому анализу для студентов физического факультета. Их содержание включает материал второго семестра в соответствии с учебной программой по данной дисциплине.

Как и в предыдущих частях, вначале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце каждой лекции сформулированы вопросы, позволяющие обучаемому организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Лекция 1. ПРОСТРАНСТВО $\boldsymbol{R}^n$

1. Определение n-мерного пространства.
2. Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве.
3. Основные подмножества пространства $\boldsymbol{R}^n$.
4. Замкнутые множества.

1. Определение n-мерного пространства. При изучении многих физических процессов часто приходиться иметь дело с такими функциональными зависимостями, в которых числовые значения одной из них полностью определяется значениями нескольких других.

Примеры.

1. Температура T тела в данный момент времени t может меняться от точки к точке. Каждая точка определяется тремя координатами x, y, z. Если при этом учитывать время, то температура в общем случае зависит от четырех переменных $T = T(x, y, z, t)$.

2. При изучении звуковых колебаний газа плотность ρ и его давление P определяются значениями переменных x, y, z, t.

3. Объем параллелепипеда есть функция трех переменных x, y, z, т.е. $V = V(x, y, z)$.

Для изучения таких закономерностей вводится понятие функции нескольких переменных и рассматривается аппарат для исследования таких функций.

Определение 1. ***n-мерным арифметическим точечным пространством*** называется множество всех упорядоченных наборов ($x_1; x_2; ...; x_n$) действительных чисел x_1, x_2, ..., x_n и обозначается $\boldsymbol{R}^n$, а его элементы – ***точками*** или ***векторами*** пространства $\boldsymbol{R}^n$ (n-мерными точками или n-мерными векторами). Числа x_1, x_2, ..., x_n называются ***координатами*** точки (вектора) ($x_1; x_2; ...; x_n$).

Точки пространства $\boldsymbol{R}^n$ обозначаются $M(x_1; x_2; ...; x_n)$ или $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Точка $O(0;0;...;0)$ называется ***началом координат***. Для n-мерного пространства (n – произвольное) вводится понятие расстояния между двумя точками.

Определение 2. ***Расстоянием*** (***метрикой***) $\rho(x, x')$ между двумя точками $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $x' = (x_1'; x_2'; ...; x_n')$ n-мерного пространства называется число

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + ... + (x_n - x_n')^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i')^2} .$$

Расстояние $\rho(x; x')$ между двумя точками $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ и $x' = (x_1'; x_2'; ...; x_n')$ n-мерного пространства $\boldsymbol{R}^n$ обладает **свойствами**:

1) *рефлективность*: $\rho(x; x') = 0$ тогда и только тогда, когда $x = x'$;

2) *симметричность*: $\rho(x; x') = \rho(x'; x)$;

3) *транзитивность*: $\rho(x; x'') \leq \rho(x; x') + \rho(x'; x'')$.

Если положить $n = 1$, то получается формула расстояния между двумя точками на прямой (в пространстве $\boldsymbol{R}^1$): $\rho(x, x') = |x_1 - x_1'|$, при $n = 2$ – формула для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости (в пространстве $\boldsymbol{R}^2$):

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2} ,$$

при $n = 3$ – в пространстве $\boldsymbol{R}^3$:

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2} .$$

Арифметическое n-мерное пространство, в котором определено расстояние между двумя точками, называют ***метрическим пространством*** $\boldsymbol{R}^n$ ***(евклидовым пространством)***.

При $n = 1,2,3$ между точками пространства $\boldsymbol{R}^n$ и числовой прямой $\boldsymbol{R}$ (координатной плоскостью $\boldsymbol{R}^2$, координатным пространством $\boldsymbol{R}^3$) установлено взаимно однозначное соответствие, которое позволяет изучать реальные геометрические объекты аналитически. При $n > 3$ пространство $\boldsymbol{R}^n$ является абстракцией, при которой можно рассматривать произвольные подмножества этого пространства, удовлетворяющие некоторым условиям, как определенные «фигуры». Они задаются аналитически так же, как в $\boldsymbol{R}^2$ и $\boldsymbol{R}^3$, т.е. с помощью уравнений, неравенств и их систем, которым удовлетворяют координаты этих точек.

2. Сходимость последовательности точек в n-мерном пространстве. Пусть $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = \left(x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m\right)$, – последовательность точек метрического пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Определение 3. Говорят, что последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ ***сходится*** к точке a, $a = (a_1; a_2; ...; a_n)$ (имеет ***предел*** a), если $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x_m; a) = 0$.

Обозначается: $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = a$.

Определение 4. Последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ называется ***ограниченной***, если $\exists C \in \boldsymbol{R}$ и $\exists a \in X$ такие, что для любого $m \in \boldsymbol{N}$ выполнено неравенство $\rho(x_m; a) \le C$.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Если последовательность $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = \left(x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m\right)$, имеет предел, то она ограничена.

2. Последовательность $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = \left(x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m\right)$, не может сходиться к двум различным точкам.

3. Для того чтобы последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = \left(x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m\right)$, сходилась к пределу $a = (a_1; a_2; ...; a_n) \in \boldsymbol{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{m\to\infty} x_1^m = a_1,\ \lim_{m\to\infty} x_2^m = a_2,\ \ldots,\ \lim_{m\to\infty} x_n^m = a_n.$$

4. Если последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ метрического пространства $\boldsymbol{R}^n$ сходится, то она является фундаментальной.

Замечание. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Фундаментальная последовательность может и не быть сходящейся.

Определение 5. Метрическое пространство $\boldsymbol{R}^n$ называется ***полным***, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности пространство $\boldsymbol{R}$ действительных чисел является полным.

Теорема 1. *Пространство* $\boldsymbol{R}^n$ *– полное.*

► Пусть $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m=\left(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m\right)$, – фундаментальная последовательность точек в $\boldsymbol{R}^n$. По определению фундаментальной последовательности $\forall\varepsilon>0\quad\exists N(\varepsilon)$ такое, что для любых $l,m>N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_l,x_m)<\varepsilon$.

Рассмотрим числовые последовательности $\left(x_k^m\right)_{m=1}^{\infty}$, $k=1,2,...,n$. Тогда $\left|x_k^l-x_k^m\right|\le\rho(x_l,x_m)<\varepsilon$, $k=1,2,...,n$. Значит, числовые последовательности $\left(x_k^m\right)_{m=1}^{\infty}$, $k=1,2,...,n$, являются фундаментальными. В силу критерия Коши они являются сходящимися. По свойству 3 сходится и последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ в $\boldsymbol{R}^n$. ◄

3. Основные подмножества пространства $\boldsymbol{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 6. Множество точек $x=(x_1;x_2;...;x_n)\in\boldsymbol{R}^n$, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки $x^0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n'^0\right)$ не превосходит положительного числа r, называется ***n-мерным замкнутым шаром радиусом r с центром в точке*** x_0.

Обозначается:

$$B_{[x_0,r]}=\left\{x\in\boldsymbol{R}^n\left|\left(x_1-x_1^0\right)^2+\left(x_2-x_2^0\right)^2+...+\left(x_n-x_n^0\right)^2\le r^2\right.\right\},$$

$$\text{или } B_{[x_0,r]}=\left\{x\in\boldsymbol{R}^n\right|\ \rho(x,x_0)\le r\}.$$

В частности,

1) при $n=1$ имеем

$$B_{[x_0,r]}=\{\,x|\ |x-x_0|\le r\}=\{x_0-r\le x\le x_0+r\,\},$$

т.е. ***одномерный*** замкнутый шар – это ***отрезок*** длиной $2r$ с центром в точке x_0;

2) при $n=2$ имеем

$$B_{[x_0,y_0;r]}=\left\{(x,y)\left|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2\right.\right\},$$

т.е. это множество является ***кругом*** радиусом r с центром в точке $P_0(x_0;y_0)$;

3) при $n=3$

$$B_{[M_0,r]}=\left\{M(x,y,z)\middle|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2\right\},$$

т.е. это множество является ***шаром*** радиуса r с центром в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Определение 7. ***Открытым n-мерным шаром с центром в точке*** x_0 называется множество точек x пространства $\boldsymbol{R}^n$, расстояние от каждой из которых до точки x_0 меньше r: $\rho(x,x_0)<r$.

Обозначается: $B_{(M_0,r)}=\left\{x\in\boldsymbol{R}^n\middle|\rho(x,x_0)<r\right\}$.

Определение 8. Множество точек $x\in\boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих условию $\rho(x,x_0)=r$, называется n***-мерной сферой радиусом*** r ***с центром в точке*** x_0.

Обозначается: $\left\{x\in\boldsymbol{R}^n\middle|\rho(x,x_0)=r\right\}$

Определение 9. ε***-окрестностью*** точки $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$ называется открытый n-мерный шар радиусом ε с центром в точке x_0.

Обозначается:

$$U(\varepsilon,x_0)=\left\{x\mid\rho(x,x_0)<\varepsilon\right\}.$$

В частности,

1) при $n=1$ ε-окрестность $U(\varepsilon,x_0)=\left\{x\middle|x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon\right\}$, т.е. окрестностью точки x_0 является интервал $(x_0-\varepsilon;x_0+\varepsilon)$;

2) при $n=2$ ε-окрестность

$$U(\varepsilon,M_0)=\left\{M(x;y)\in\boldsymbol{R}^2\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\right\},$$

т.е. ε-окрестностью точки M_0 будет множество точек открытого круга радиусом ε с центром в этой точке.

Определение 10. Множество точек $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\left|x_1-x_1^0\right|\le d_1$, $\left|x_2-x_2^0\right|\le d_2$, …, $\left|x_n-x_n^0\right|\le d_n$, называется n***-мерным замкнутым параллелепипедом с центром в точке*** $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.

Обозначается:

$P_{[d_1,d_2,...,d_n;x_0]}=$

$$= \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \middle| \left|x_1 - x_1^0\right| \le d_1, \left|x_2 - x_2^0\right| \le d_2, ..., \left|x_n - x_2^0\right| \le d_n \right\}$$

Аналогично открытому n-мерному параллелепипеду определяется ***открытый*** n-мерный параллелепипед.

Определение 11. Множество точек $x = (x_1; x_2; ...; x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $\left|x_1 - x_1^0\right| \le d$, $\left|x_2 - x_2^0\right| \le d$, …, $\left|x_n - x_n^0\right| \le d$, называется ***n-мерным открытым кубом с центром в точке*** $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Обозначается:

$$P_{(d;x_0)} = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \middle| \left|x_1 - x_1^0\right| < d, \left|x_2 - x_2^0\right| < d, ..., \left|x_n - x_2^0\right| < d \right\}.$$

Определение 12. Всякий n-мерный открытый параллелепипед

$$P_{(d_1, d_2, ..., d_n; x_0)} =$$
$$= \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \boldsymbol{R}^n \middle| \left|x_1 - x_1^0\right| < d_1, \left|x_2 - x_2^0\right| < d_2, ..., \left|x_n - x_2^0\right| < d_n \right\}$$

называется ***прямоугольной окрестностью*** точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Лемма 1. *Любая ε-окрестность $U(\varepsilon, x_0)$ точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ содержит некоторую прямоугольную окрестность $P_{[d_1, d_2, ..., d_n; x_0]}$ и наоборот.*

Без доказательства.

Определение 13. ***Проколотой ε-окрестностью*** точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ радиусом ε называется множество точек $x \in \boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Обозначается:

$$\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n \middle| 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon \right\}.$$

Из определения проколотой окрестности точки $x_0 \in \boldsymbol{R}^n$ следует, что эта окрестность состоит из множества точек открытого n-мерного шара, исключая его центр.

4. Замкнутые множества. Пусть G – некоторое множество пространства $\boldsymbol{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 14. Точка $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***внутренней точкой*** множества G, если существует ε-окрестность $U(\varepsilon,x)$ точки x, целиком принадлежащая множеству G. Множество $G\subset\boldsymbol{R}^n$ называется ***открытым***, если все его точки внутренние.

О п р е д е л е н и е 15. Точка $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***граничной точкой*** множества G, если в любой ε-окрестности $U(\varepsilon,x)$ точки x содержатся точки, как принадлежащие множеству G, так и не принадлежащие ему. Множество граничных точек называется ***границей*** множества G и обозначается ∂G.

Граничная точка может как принадлежать множеству G, так и не принадлежать ему.

О п р е д е л е н и е 16. Точка $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***предельной точкой*** множества G, если в любой ε-окрестность $U(\varepsilon,x)$ точки x содержатся точки множества G, отличные от x. Точка $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, не являющаяся предельной точкой множества G, называется ***изолированной*** точкой множества G.

Если точка $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ является изолированной точкой множества G, то существует такая ε-окрестность $U(\varepsilon,x)$ точки x, в которой нет точек множества G, отличные от x.

О п р е д е л е н и е 17. Множество $G\subset\boldsymbol{R}^n$ называется ***замкнутым***, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, которое получается, если присоединить к множеству G все его предельные точки, называется замыканием G.

Обозначается: $\overline{G}$.

Пример. $\overline{B_{(x_0,r)}}=B_{[x_0,r]}$.

О п р е д е л е н и е 18. Множество $G\subset\boldsymbol{R}^n$ называется ***ограниченным***, если существует такой n-мерный шар, который содержит внутри себя все точки множества G.

О п р е д е л е н и е 19. Множество

$$\Gamma=\left\{P(x_1;x_2;...;x_n)\middle|\, x_1=\varphi_1(t),\, x_2=\varphi_2(t),...\, x_n=\varphi_n(t);\alpha\le t\le\beta\right\},$$

где $\varphi_i(t)$, $i=1,2,...,n$, непрерывные функции на отрезке $[\alpha;\beta]$, называется ***непрерывной кривой*** в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, соединяющей концы $P_1(\varphi_1(\alpha);\varphi_2(\alpha);...;\varphi_n(\alpha))$ и $P_2(\varphi_1(\beta);\varphi_2(\beta);...;\varphi_n(\beta))$.

Определение 20. Множество $G\subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***линейно связным*** (***связным***), если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой Γ, целиком принадлежащей этому множеству.

Определение 21. Открытое связное множество называется ***областью***, объединение области и ее границы называется ***замкнутой областью***.

Определение 22. Множество $G\subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***компактом*** в $\boldsymbol{R}^n$, если из любой последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей множеству G.

Пример. Отрезок $[a;b]$ есть компакт в $\boldsymbol{R}$, а промежуток $[a;b)$ не является компактом в $\boldsymbol{R}$.

На пространство $\boldsymbol{R}^n$ обобщается теорема Больцано–Вейерштрасса.

Теорема 2. *Из любой ограниченной последовательности точек пространства $\boldsymbol{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек.*

Следствие. *Для того чтобы множество $G\subset \boldsymbol{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы множество G было ограниченным и замкнутым.*

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения: n-мерного арифметического пространства, расстояния в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, n-мерного евклидова пространства.

2. Дайте определения: n-мерного открытого шара, n-мерного замкнутого шара, n-мерной сферы, n-мерного параллелепипеда (открытого и замкнутого), n-мерного куба, ε-окрестности точки в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

3. Дайте определения внутренней точки множества. Может ли внутренняя точка не принадлежать множеству?

4. Дайте определение граничной точки множества. Может ли точка одновременно быть внутренней и граничной для некоторого множества?

5. Какие точки множества называются предельными?

6. Дайте определение открытого и замкнутого множества.

7. Что является границей n-мерного замкнутого шара и параллелепипеда.

8. Дайте определения: ограниченного множества, непрерывной кривой в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, связного множества. Являются ли связными множествами n-мерная сфера, n-мерный шар, прямая в пространстве $\boldsymbol{R}^n$?

9. Дайте определения открытой и замкнутой области. Приведите примеры.

10. Дайте определение компакта в пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Лекция 2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие функции многих переменных.
2. Определение предела функции многих переменных.
3. Повторные пределы.
4. Непрерывность функции многих переменных.

1. Понятие функции многих переменных. Пусть $G \subset \boldsymbol{R}^n$ – произвольное множество точек n-мерного евклидова пространства.

Определение 1. Если правило f каждой точке $x = (x_1; x_2; ...; x_n) \in G$ ставит в соответствие некоторое вполне определенное действительное число $u = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, то говорят, что на множестве G задана ***числовая функция*** (или ***отображение***) f ***от*** n ***переменных***.

Множество G называется ***областью определения***, $D(f) = G$, а множество $E = \{u \in \boldsymbol{R} | \; u = f(x), \; x \in G\}$ – ***множеством значений функции*** f.

Обозначается: $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$;

$$u = f(x), \; x = (x_1, x_2, ..., x_n);$$
$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

В частном случае при $n = 2$ функцию двух переменных можно рассматривать как функцию $z = f(x, y)$ точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Значение функции $z = f(x, y)$ при $x = x_0$ и $y = y_0$ *обозначается* $f(x_0, y_0)$, $f(M_0)$, $z\big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ или $z\big|_{M_0}$.

Функция f двух переменных x и y может быть задана аналитическим, табличным, графическим и другими способами.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$ изображается в трехмерном пространстве при выбранной декартовой системе координат $Oxyz$ как множество точек

$$\Gamma = \left\{(x; y; z) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \; z = f(x, y)\right\},$$

которое есть некоторая поверхность в $\boldsymbol{R}^3$. Проекцией этой поверхности на плоскость Oxy является область $D(f)$.

Функцию трех и более переменных изобразить графически затруднительно.

Примеры.

1. $z = x^2 + y^2$.

Область определения этой функции $D(f) = \boldsymbol{R}^2$, множество значений $E(f) = [0;+\infty)$. Графиком данной функции в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является круговой параболоид (рис.1).

2. $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$.

Областью определения $D(f)$ этой функции является множество всех точек плоскости $\boldsymbol{R}^2$, для которых определено выражение $\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, т.е. $4 - x^2 - 2y^2 \geq 0$. Множество таких точек лежит внутри и на эллипсе с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{2}$ (на рис.2), т.е. $D(f) = \left\{ M(x;y) \in \boldsymbol{R}^2 \left| \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1 \right. \right\}$). Множество значений $E(f) = [0;2]$. Графиком этой функции является верхняя часть эллипсоида.

3. $z = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2}$.

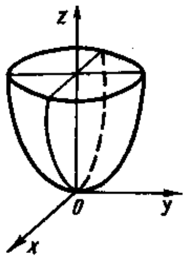


Рис.1.

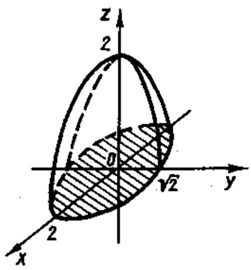


Рис.2.

Функция определена, если $1 - x_1^2 - x_2^2 - ... - x_n^2 \geq 0$ или $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1$.

Отсюда

$$D(f) = \left\{ M(x_1; x_2; ...; x_n) \in \boldsymbol{R}^n \left| x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \leq 1 \right. \right\},$$

т.е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек замкнутого n-мерного шара радиусом $r = 1$ с центром в начале координат, а $E(f)=[0;1]$;

4. $z=\ln\left(5-x^2-y^2-z^2\right)$. Функция определена, если $5-x^2-y^2-z^2>0$ или $x^2-y^2-z^2<5$, откуда

$$D(f)=\left\{M(x;y;z)\in \boldsymbol{R}^3 \middle| \, x^2+y^2+z^2<5\right\},$$

т.е. областью определения $D(f)$ данной функции является множество точек открытого трехмерного шара радиусом $\sqrt{5}$, а $E(f)=(-\infty;\ln 5]$.

Функции нескольких переменных могут быть заданы явно (уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной: $z=f(x,y)$, $u=f(x,y,z)$, $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$) либо неявно (уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной).

Пример. Функция z двух переменных x и y, определяемая уравнением $x^2+y^2-z+16=0$ задана неявно. К явному заданию этой функции можно перейти, решив уравнение относительно z (если это возможно). Тогда $z=16+x^2+y^2$.

Определение 2. Множество точек $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$, удовлетворяющих уравнению $f(x_1,x_2,...,x_n)=c$**,** называется ***множеством уровня*** функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$, соответствующим данному значению c.

Если $n=2$, то множество уровня называется ***линией уровня***, если $n=3$, то множество уровня называется ***поверхностью уровня***, если $n>3$, то множество уровня называется ***гиперповерхностью уровня***.

2. Определение предела функции многих переменных. Пусть функция $z=f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$**,** определена в окрестности $U(\varepsilon,x_0)$.

Определение 2 (по Гейне). Число A называется ***пределом*** функции $z=f(x)$ в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$, если для любой сходящейся к x_0 последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m=\left(x_1^m;x_2^m;...;x_n^m\right)$**,** $m=\overline{1,\infty}$, $x_m\in \overset{\circ}{U}(\varepsilon,x_0)$, соответствующая последовательность $\left(f\left(x_m\right)\right)_{m=1}^{\infty}$ значений функции сходится к A.

Символическая запись: $A=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \forall\left(x_m\right)_{m=1}^{\infty},\ x_m\in U\left(\varepsilon,x_0\right),\ \lim_{k\to\infty} x_k=x_0 \quad \lim_{k\to\infty} f\left(x_m\right)=f\left(x_0\right).$$

Для записи предела функции используется также обозначение:

$$A=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \dots\dots\dots\\ x_n\to x_n^0}} f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right).$$

Определение 3 (по Коши). Число A называется ***пределом*** функции $z=f(x)$ в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;\dots;x_n^0\right)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta\left(\varepsilon\right)>0$, такое, что для любой точки $x\in\overset{\circ}{U}\left(\varepsilon,x_0\right)$ выполняется неравенство $\left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon$.

Символическая запись: $A=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\,\exists\overset{\circ}{U}\left(\varepsilon,x_0\right):\forall M\in\overset{\circ}{U}\left(\varepsilon,x_0\right)\quad \left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon.$$

Эквивалентность определений предела по Гейне и по Коши доказывается так же, как и для функции одной переменной.

Если функция двух переменных $z=f\left(x;y\right)$ определена в окрестности $\overset{\circ}{U}\left(\varepsilon;\left(x_0,y_0\right)\right)$ и число A является пределом при $\left(x,y\right)\to\left(x_0,y_0\right)$, то $A=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f\left(x;y\right)$ называется ***двойным пределом*** функции.

Отметим, что в некоторых приложениях удобно пользоваться определением по Коши, в других – по Гейне.

При определении предела функции $z=f\left(x;y\right)$ в точке $M_0\left(x_0;y_0\right)$ полагается, что функция может быть не определена в точке M_0. Поэтому значения функции $f\left(M\right)$, $M\left(x;y\right)$, отличаются от числа z_0 на достаточно малую величину, если точка M выбрана достаточно близко к точке M_0. Из определения предела функции по Коши получаем $z_0-\varepsilon<f\left(M\right)<z_0+\varepsilon$. С **геометрической** точки зрения, приведенное неравенство означает, что точка графика функции $z=f\left(M\right)=f\left(x,y\right)$ из окрестности

$\overset{\circ}{U}(\delta, M_0)$ находится между двумя плоскостями $z = z_0 - \varepsilon$ и $z = z_0 + \varepsilon$. Другими словами, предел функции $z = f(x; y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$ определяется поведением функции вблизи точки $M_0(x_0; y_0)$ и не зависит от значения функции в этой точке.

Примеры. 1. Вычислить предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$, используя определение предела по Гейне.

Решение. Область определения данной функции $D(f) = \left\{(x; y) \in \boldsymbol{R}^2 \middle| \, x \neq y \right\}$. Возьмем произвольную последовательность точек $(M_k)_{k=1}^{\infty} = ((x_k; y_k))_{k=1}^{\infty}$, таких, что $x_k \neq y_k$, $x_k \to 0$, $y_k \to 0$. Тогда

$$f(M_k) = \frac{x_k^3 - y_k^3}{x_k - y_k} = x_k^2 + x_k y_k + y_k^2.$$

Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = \lim_{\substack{k\to\infty\\ \begin{pmatrix} x_k \to 0 \\ y_k \to 0 \end{pmatrix}}} \left(x_k^2 + x_k y_k + x_k^2\right) = 0 \cdot$$

2. Доказать, пользуясь определением предела по Коши, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = 0.$$

Решение. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдем $r(\varepsilon)$, такое, что для любой точки $M(x; y) \in \overset{\circ}{U}(\delta; (0;0))$ выполняется неравенство $\left| f(x, y) - 0 \right| < \varepsilon$. Так как для любой точки $M(x; y) \in D(f)$ справедливо соотношение

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y} = x^2 + xy + y^2,$$

то

$$\left| f(x, y) - 0 \right| = \left| x^2 + xy + y^2 \right| \leq x^2 + y^2 + |xy|.$$

Оценим $|x \cdot y|$:

$$\left(|x| - |y|\right)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leq x^2 + y^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; |x \cdot y| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Таким образом, $\left|f(x,y)-0\right| \le \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)=\frac{3}{2}\rho^2(O,M)<\varepsilon$.

Отсюда

$$\rho(O,M)<\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon},$$

где $\rho(O;M)$ – расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$.

Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует число $\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon}$ такое, что для любой точки $M(x;y)\in U(\delta,M_0)$ выполняется неравенство $\left|\frac{x^3-y^3}{x-y}-0\right|<\varepsilon$.

Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3-y^3}{x-y}=0$

Поскольку определение предела функций многих переменных аналогично определению предела функции одного переменного, то для случая функций многих переменных сохраняются все свойства пределов функций (кроме тех, где существенна упорядоченность точек числовой прямой, например, односторонние пределы).

3. Повторные пределы. Для функции $z=f(x,y)$ можно определить понятие предела по переменной x, полагая y постоянным, и можно определить предел по y, полагая x постоянным.

Пусть функция $z=f(x,y)$ задана в прямоугольной окрестности $U(M_0,d_1,d_2)=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, |x-x_0|<d_1, |y-y_0|<d_2\right\}$ точки $M_0(x_0,y_0)$ за исключением, быть может, самой точки $M_0(x_0,y_0)$. И пусть для каждого фиксированного y, удовлетворяющего условию $0<|y-y_0|<d_2$, при $x\to x_0$ для функции $z=f(x,y)$ одной переменной существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_{фик}}} f(x;y)=g(y)$. И пусть при $y\to y_0$ для функции $g(y)$ существует предел $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)=b$. Тогда говорят, что существует ***повторный предел*** b для функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Обозначается: $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x;y) = b$.

Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x;y)$.

Теорема 1. *Пусть функция* $z = f(x,y)$ *определена в некоторой прямоугольной окрестности* $U(M_0, d_1, d_2)$ *точки* $M_0(x_0, y_0)$, *и имеет в этой точке двойной предел* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = b$. *И пусть для любого фиксированного* x, $0 < |x - x_0| < d_1$, *существует предел* $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ x_{фик}}} f(x;y) = h(x)$ *и для любого фиксированного* y, $0 < |y - y_0| < d_2$, *существует предел* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y_{фик}}} f(x;y) = g(y)$. *Тогда повторные пределы* $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x;y)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x;y)$ *существуют и равны*

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x;y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x;y).$$

► Так как функция $z = f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ предел b, то по определению предела имеем

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = z_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall (x;y) \, 0 < |x - x_0| < \delta, 0 < |y - y_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x;y) - z_0| < \varepsilon$$

Отсюда $z_0 - \varepsilon < f(x;y) < z_0 + \varepsilon$. Это означает, что в прямоугольной окрестности $U(M_0, d_1, d_2)$ точки $M_0(x_0, y_0)$ значение функции отличается от b не более чем на ε. Но тогда пределы $g(y)$ и $h(x)$ отличаются от b не более чем на ε.

Следовательно, пределы этих функций в точках y_0 и x_0 существуют и равны. ◄

Для функции $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ понятие повторного предела определяется аналогично.

4. Непрерывность функции многих переменных. Понятие непрерывности функции нескольких переменных определяется с помощью предела.

О п р е д е л е н и е   4. Функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, называется ***непрерывной*** в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$, если выполнены следующие три условия:

1) $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 одно из указанных трех условий не выполняется, то она является точкой разрыва функции $u = f(x)$.

Для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными или образовывать линию разрыва. Для функции $u = f(x, y, z)$ трех независимых переменных точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линию или поверхность разрыва.

Примеры. Найти точки разрыва следующих функций:

1) $z = \dfrac{1}{(x-4)^2 + y^2}$; 2) $z = \dfrac{1}{x - y}$; 3) $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$.

***Р е ш е н и е*.** 1. Данная функция определена на $\boldsymbol{R}^2$ всюду, кроме точки $M(4;0)$, которая и является точкой разрыва функции.

2. Данная функция определена для любых x, y, таких, что $x \neq y$. Следовательно, прямая $x = y$ является линией разрыва функции.

3. Функция $u = \dfrac{2}{x^2 + y^2 + z^2 - 9}$ определена для любых x, y, z, таких, что $x^2 + y^2 + z^2 \neq 9$. Сфера с центром в начале координат и радиусом 3 является поверхностью разрыва функции.

Основные теоремы о свойствах непрерывных в некоторой точке функций (например, теорема о непрерывности суммы непрерывных функций) доказываются для функций многих переменных так же, как и для функции одной переменной.

Теорема 2 (непрерывность сложной функции). *Пусть функции* $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, ..., $x_n = \varphi_n(t)$, $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$, *определены в некоторой окрестности точки* $t_0 = \left(t_1^0; t_2^0; ...; t_n^0\right) \in \boldsymbol{R}^n$ *и непрерывны в точке* t_0. *Функция*

$u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *определена в окрестности точки* $x_0 = (\varphi_1(t_0); \varphi_2(t_0); ...; \varphi_n(t_0)) \in \boldsymbol{R}^n$ *и непрерывна в точке* x_0. *Тогда в некоторой окрестности точки* t_0 *определена сложная функция* $\Phi(t) = f(\varphi_1(t); \varphi_2(t); ...; \varphi_n(t))$, *причем функция* $\Phi(t)$ *непрерывна в точке* t_0.

Без доказательства.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется функцией в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Что такое множество уровня?

2. Сформулируйте определения предела функции $z = f(x, y)$ в точке по Гейне и по Коши. Что означает эквивалентность этих определений?

3. Дайте определение бесконечно малой функции в пространстве $\boldsymbol{R}^n$ при $M \to M_0$.

4. Сформулируйте определение повторного предела функции $z = f(x, y)$. Дайте определение повторного предела для функции $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$.

5. Сформулируйте определение непрерывной функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. Какими свойствами обладают непрерывные функции?

Лекция 3. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ, НЕПРЕРЫВНЫЕ НА МНОЖЕСТВАХ

1. Непрерывность функции на компактах.
2. Функции, непрерывные на линейно связных множествах.
3. Равномерная непрерывность функций.

1. Непрерывность функции на компактах.

Определение 1. Функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, называется ***непрерывной на множестве*** G, если в каждой предельной точке множества x_0, $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$. выполнено условие

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in G}} f(x) = f(x_0).$$

Другими словами, функция $u = f(x)$ называется ***непрерывной на множестве*** G, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Функция* $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, *непрерывная на компакте* $G \in \boldsymbol{R}^n$ *ограничена и принимает на этом компакте свои наибольшее и наименьшее значения:*

$$f(x_1) = \sup_{x \in G} f(x), \; f(x_2) = \inf_{x \in G} f(x).$$

► Пусть $G \in \boldsymbol{R}^n$ компакт, т.е. ограниченное и замкнутое множество. И пусть функция $u = f(x)$ непрерывна на G и $M = \sup_{x \in G} f(x)$. Выберем числовую последовательность $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ такую, что $\lim_{m \to \infty} y_m = M$ и $y_m < M$, $m = 1,2,...$.

По определению верхней грани существуют такие точки $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m) \in G$, $m = 1,2,...$, что

$$y_m < f(x_m) \le M .$$

Поэтому $\lim_{m \to \infty} f(x_m) = M$.

Поскольку G компакт, то из последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in G$ подпоследовательность $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\lim_{k \to \infty} x_{m_k} = x_0$. В силу непрерывности функции $u = f(x)$ в точке x_0, имеем:

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{m_k}\right)= f\left(x_0\right).$$

С другой стороны $\lim\limits_{k\to\infty} f\left(x_{m_k}\right)= M$.

Таким образом, $f\left(x_0\right)=M$. Это означает, что $M<+\infty$, т.е. функция $u=f(x)$, $x=\left(x_1,x_2,..., x_n\right)$, ограничена сверху и принимает наибольшее значение на множестве G .

Аналогично доказывается ограниченность функция $u=f(x)$ снизу и достижение ее нижней грани. ◄

Примеры. 1. Рассмотрим функцию $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, область определения которой есть

$$D(f)=\left\{(x;y)\middle|\ (0<x\le 1)\cap(0<y\le 1)\right\}.$$

Множество $D(f)$ ограничено, но не замкнуто. Если $x\to 0$ и $y\to 0$ одновременно, то $z\to\infty$, т.е. функция $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ не ограничена:

$$\forall A\ \exists M(x;y):\left|f(M)\right|>A.$$

2. Рассмотрим функцию $z=\dfrac{1}{e^{x^2+y^2}}$.

Область определения этой функции $D(f)=\boldsymbol{R}^2$. Очевидно, что $\sup z=1$, $\inf z=0$, причем точная верхняя грань достигается в точке $M(0;0)$, а точная нижняя грань не достигается ввиду неограниченности множества $D(f)$.

2. Функции, непрерывные на связных множествах. В случае функций многих переменных аналогом того, что всякая непрерывная на некотором промежутке функция, принимая какие-либо значения, принимает и любое промежуточное, является следующая теорема.

Теорема 2. *Функция, непрерывная на линейно связном множестве, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними.*

► Пусть G – линейно связное множество, $G\in\boldsymbol{R}^n$, функция $u=f\left(x_1,x_2,..., x_n\right)$ непрерывна на G . И пусть точки

$M_1=\left(x_1^1;x_2^1;...;x_n^1\right)$, $M_1=\left(x_1^2;x_2^2;...;x_n^{21}\right)\in G$, для которых $f\left(M_1\right)=a$, $f\left(M_2\right)=b$. Тогда существует такая кривая

$$\Gamma=\left\{x_1=x_1(t);x_2=x_2(t);...;x_n=x_n(t),\alpha\le t\le\beta\right\},$$

лежащая в G, что M_1 является ее началом, M_2 – ее концом.

Функция $u=f\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)=f(t)$, непрерывна на отрезке $[\alpha;\beta]$ как сложная функция непрерывных функций $f(M)$, $x_1(t)$, $,x_2(t)$, …, $x_n(t)$. Кроме того,

$$f(\alpha)=f\left(x_1(\alpha),x_2(\alpha),...,x_n(\alpha)\right)=a,$$

$$f(\beta)=f\left(x_1(\beta),x_2(\beta),...,x_n(\beta)\right)=b.$$

Поэтому, в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывных на отрезке функций, существует такое $t_0\in[\alpha;\beta]$, что $f(t_0)=f\left(x_1(t_0),x_2(t_0),...,x_n(t_0)\right)=c$.

Полагая $M_0\left(x_1(t_0),x_2(t_0),...,x_n(t_0)\right)$, получим $f\left(M_0\right)=c$. ◄

Следствие. *Функция, непрерывная на замыкании линейно связного множества, принимая какие-либо два значения, принимает и любое промежуточное между ними*.

Без доказательства.

Из теоремы 2, в частности, следует, что если M_1 и M_2 – точки множества G и $f\left(M_1\right)<0$, а $f\left(M_2\right)>0$, то на множестве G существует по крайней мере одна точка M_0, такая, что $f\left(M_0\right)=0$.

3. Равномерная непрерывность функций.

Определение 2. Функция $u=f(x)$, $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, называется ***равномерно-непрерывной*** на множестве G, $G\in\boldsymbol{R}^n$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для любых двух точек $x^{'}=\left(x_1^{'};x_2^{'};...;x_n^{'}\right)$ и $x^{''}=\left(x_1^{'};x_2^{''};...;x_n^{''}\right)$ множества G, находящихся на расстоянии, меньшем δ, выполняется неравенство $\left|f\left(x^{'}\right)-f\left(x^{''}\right)\right|<\varepsilon$:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall x^{'},x^{''}\in G\ \ \rho\left(x^{'},x^{''}\right)<\delta\quad\left|f\left(x^{'}\right)-f\left(x^{''}\right)\right|<\varepsilon.$$

Замечание. Функция, непрерывная на множестве, не обязательно будет равномерно непрерывной на этом множестве.

Построим отрицание: функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *не является равномерно-непрерывной* на множестве G, если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ существуют элементы $x^{'} = (x_1^{'}; x_2^{'}; ...; x_n^{'})$ и $x^{''} = (x_1^{'}; x_2^{''}; ...; x_n^{''})$ множества G такие, что $\rho(x^{'}, x^{''}) < \delta$, но $\left| f(x^{'}) - f(x^{''}) \right| \geq \varepsilon$.

Пример. Показать, что функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0; +\infty)$.

Решение. Пусть $\varepsilon_0 = 1$.

Для любого $\delta > 0$ возьмем $M_1 = \frac{1}{\delta}$ и $M_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$.

Тогда $\rho(M_1, M_2) = \left| \frac{1}{\delta} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$.

При этом

$$\left| f(M_1) - f(M_2) \right| = \left| \left(\frac{1}{\delta} \right)^2 - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right| = \left| \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{2} \right) \right| =$$

$$= \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \right) \geq 1.$$

Значит, функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной.

Теорема 3 (Кантора). *Функция* $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *непрерывная на компакте* G, $G \in \boldsymbol{R}^n$, *равномерно-непрерывна на этом компакте.*

► Доказываем методом от противного.

Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, непрерывна на компакте G, но не равномерно непрерывна на этом компакте.

Рассмотрим последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; ...; x_n^m) \in G$. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ найдутся точки x_m и $x_l \in A$ такие, что $\rho(x_m, x_l) < \frac{1}{m}$, но $\left| f(x_m) - f(x_l) \right| \geq \varepsilon_0$.

Так как G – компакт, то из последовательности $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $(x_{m_k})_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in G$, $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Используя неравенство треугольника, получаем

$$0 \le \rho(x_{m_k}, x_0) \le \rho(x_{m_k}, x_{m_k}) + \rho(x_{m_k}, x_0) < \frac{1}{m_k} + \rho(x_{m_k}, x_0) \to 0$$

при $k \to \infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = x_0$.

Поскольку функция $u = f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{l_k}) = x_0 .$$

Полагая $m = m_k$, получаем $\left| f(x_{m_k}) - f(x_l) \right| \ge \varepsilon_0$.

Переходя в неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получаем противоречие:

$$0 = \left| f(M_0) - f(M_0) \right| \ge \varepsilon_0 > 0 .$$

Полученное противоречие доказывает, что функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, должна быть равномерно непрерывной на множестве G. ◄

Определение 3. ***Колебанием*** $\omega(f;G)$ функции $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in G$, называется верхняя грань всевозможных разностей значений функции f:

$$\omega(f;G) = \sup_{x;x' \in G} \left| f(x') - f(x) \right|,$$

где $x' = (x_1'; x_2'; ...; x_n') \in G$.

Определение 4. ***Диаметром*** множества G называется верхняя грань расстояний между точками множества $G \in \boldsymbol{R}^n$.

Обозначается: $\operatorname{diam} G = \sup\limits_{x;x' \in G} \rho(x';x)$ или $\mathrm{d}(G) = \sup\limits_{x;x' \in G} \rho(x';x)$.

Равномерная непрерывность функции $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, на множестве $G \in \boldsymbol{R}^n$ означает, что колебание функции на любом множестве достаточного малого диаметра сколь угодно мало.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение непрерывности функции на компактах.
2. Какие функции непрерывны на линейно связных множествах?
3. Сформулируйте определение равномерной непрерывности функции. В чем суть теоремы Кантора?
4. Какое число называется колебанием функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$?

Лекция 4. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

1. Частные и полные приращения функции многих переменных.
2. Частные производные.
3. Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных.
4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

1. Частные и полные приращения функции многих переменных. Пусть функция $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ определена в окрестности точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Дадим переменной x_1^0 приращение Δx_1, а значения x_2^0, x_3^0, ..., x_n^0 оставим без изменения.

Определение 1. ***Частным приращением*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется приращение

$$\Delta_{x_1} f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Аналогично определяются частные приращения $\Delta_{x_2} f(x_0)$, $\Delta_{x_3} f(x_0)$, ..., $\Delta_{x_n} f(x_0)$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

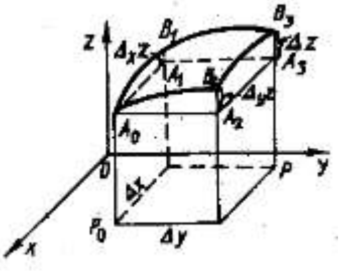


Рис.1. Частные и полное приращения функции двух переменных

Определение 2. ***Полным приращением*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется разность

$$\Delta f(x_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; ...; x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0).$$

Геометрически для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных частные и полное приращения функции в точке $(x_0; y_0)$

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0),$$
$$\Delta_y z = \Delta_y f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

можно изобразить отрезками A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 (рис.1).

Пример. Найти частные и полное приращения функции $z = xy^2$ в точке $M_0(1;2)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

Решение. Имеем

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)y_0^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 \Delta x,$$
$$\Delta_x z\big|_{(1;2)} = 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

Аналогично

$$\Delta_y z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = x_0(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$
$$= 2x_0 y_0 \Delta y + x_0 \Delta y^2,$$
$$\Delta_y z\big|_{(1;2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 0{,}84.$$

Тогда

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x)(y_0 + \Delta y)^2 - x_0 y_0^2 =$$
$$= 1{,}1 \cdot 2{,}2^2 - 1 \cdot 2^2 = 1{,}324.$$

2. Частные производные.

Напоминание. Производная функции $y = f(x)$ одной переменной характеризует скорость изменения функции в точке x. В случае двух и нескольких переменных можно говорить о скорости изменения функции в точке только в заданном направлении, так как скорость изменения функции нескольких переменных в точке по различным направлениям может быть не одинакова.

Определение 3. ***Частной производной*** функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ по переменной x_1 в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется предел отношения частного приращения функции $\Delta_{x1} f(x_0)$ к соответствующему приращению аргумента Δx_1, когда Δx_1 произвольным образом стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f\left(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0\right) - f\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)}{\Delta x_1}.$$

Обозначается: $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x_0}$, $\left.f'_{x_1}\right|_{x=x_0}$.

Таким образом, имеем:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f\left(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0; ...; x_n^0\right) - f\left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)}{\Delta x_1}.$$

Аналогично определяются частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ по переменным x_2, ..., x_n в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$.

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии, что все остальные переменные остаются постоянными. Вследствие этого, все правила и формулы дифференцирования, справедливые для производных функций одной переменной, имеют место и для частных производных. Однако во всех этих правилах и формулах при нахождении частной производной по какой-либо переменной все остальные переменные считаются постоянными.

Примеры. 1. Найти частные производные функций

1) $z = x^2 + \sin\left(x + y^2\right)$, 2) $u = xy + \ln(x - y - z)$,

3) $u = xy + \sin^2(z - xt)$.

Решение.

1. Частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ вычисляем как производную данной функции по переменной x, считая y постоянной. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \cos\left(x + y^2\right).$$

Аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \cos\left(x + y^2\right).$$

2. Частную производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ вычисляем как производную

данной функции по переменной x, считая, что переменные y, z постоянны. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+\frac{1}{x-y-z}=\frac{xy-y^2-yz+1}{x-y-z}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{1}{x-y-z}=\frac{x^2-xy-xz-1}{x-y-z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{x-y-z}.$$

3. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y-2\sin(z-xt)\cos(z-xt)(-t)=y-t\sin 2(z-xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2\sin(z-xt)\cos(z-xt)=\sin 2(z-xt),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\sin(z-xt)\cos(z-xt)(-x)=-x\sin 2(z-xt).$$

3. Геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных. Г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л ч а с т н ы х п р о и з в о д н ы х. Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$. Графиком функции $z=f(x,y)$ является некоторая поверхность Q. Возьмем точку $P_0(x_0;y_0)\in D(f)$. На этой поверхности ей соответствует точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Пересечем график данной функции плоскостью $y=y_0$. В сечении получим кривую $z=f(x;y_0)$ (на рис.2 это кривая AM_0B), которую можно рассматривать как график функции одной переменной $z=f(x;y_0)$ в плоскости $y=y_0$. Тогда, по геометрическому смыслу производной функций одной переменной, значение частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ есть тангенс угла α, образованного положительным направлением оси Ox и касательной, проведенной в точке $M_0(x_0;y_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ (см. рис.2).

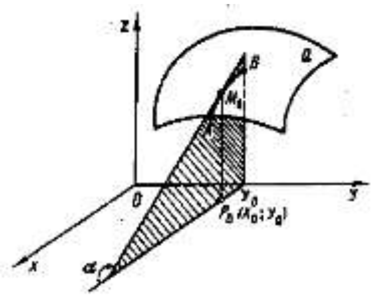


Рис.2. Геометрический смысл частных производных

Аналогично определяется геометрический смысл частной производной функции $z = f(x, y)$ по y.

Механический смысл частных производных. Частные производные $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z = f(x, y)$ в данной точке $P_0(x_0; y_0)$, причем $f'_x(x_0, y_0)$ задает скорость изменения функции в направлении прямой $y = y_0$ (или, что то же, относительно переменной x), $f'_y(x_0, y_0)$ – в направлении прямой $x = x_0$ (относительно переменной y).

4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Графиком функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ является некоторая поверхность Q (рис.3). Выберем на ней точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

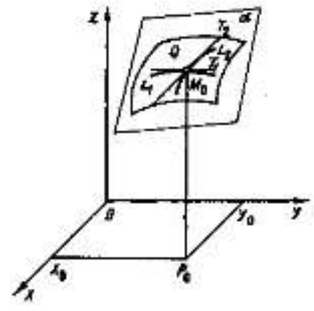


Рис.3. Касательная плоскость

О п р е д е л е н и е 4. ***Касательной плоскостью*** к поверхности Q в данной точке M_0 называется плоскость, которая содержит все касательные к кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Найдем уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке M_0. Для этого рассмотрим сечения поверхности Q плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$. Линия пересечения L_1 поверхности Q плоскостью $x = x_0$ задается системой уравнений

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = x_0, \end{cases}$$

а линия пересечения L_2 поверхности Q плоскостью $y = y_0$ – системой уравнений

$$\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = y_0. \end{cases}$$

Уравнения касательных T_1 и T_2 к линиям L_1 и L_2 в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеют вид соответственно

$$T_1 : \begin{cases} x = x_0, \\ z - z_0 = f'_y(x_0, y_0)(y - y_0), \end{cases}$$

$$T_2 : \begin{cases} y = y_0, \\ z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0). \end{cases}$$

Запишем уравнение плоскости α, проходящей через касательные T_1 и T_2. Уравнение любой плоскости, проходящей через точку $x = x_0$, $y = y_0$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

или $z - z_0 = -\dfrac{A}{C}(x - x_0) - \dfrac{B}{C}(y - y_0)$.

Касательные T_1 и T_2 получаются сечением плоскости двумя плоскостями $x = x_0$, $y = y_0$. Следовательно, уравнение касательной T_1

$$\begin{cases} z - z_0 = -\dfrac{B}{C}(y - y_0), \\ x = x_0, \end{cases}$$

а уравнение касательной T_2

$$\begin{cases} z - z_0 = -\dfrac{A}{C}(x - x_0), \\ y = y_0. \end{cases}$$

Сравнивая коэффициенты при $y - y_0$ и при $x - x_0$ в формулах, получим

$$-\frac{A}{C} = f'_x(x_0, y_0),$$

$$-\frac{B}{C} = f'_y(x_0, y_0).$$

Подставляя эти значения в уравнение плоскости, находим уравнение искомой плоскости α, проходящей через касательные T_1 и T_2:

$$f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

или

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0).$$

О п р е д е л е н и е 5. ***Нормалью*** к поверхности Q в данной точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной плоскости, проведенной в данной точке поверхности.

Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, канонические уравнения нормали запишутся в виде

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Замечание. Точка, в которой $F'_x = F'_y = F'_z = 0$ или хотя бы одна из этих частных производных не существует, называется ***особой точкой поверхности***. В такой точке поверхность может не иметь касательной плоскости.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 5 - x^2 - y^2$ в точке $M_0(1;1;3)$.

Р е ш е н и е . Уравнение поверхности задано явной функцией. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$f'_x = -2x$, $\qquad f'_y = -2y$,

$f'_x\big|_{(1,1)} = -2$, $\qquad f'_y\big|_{(1,1)} = -2$.

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид

$$-2(x-1)-2(y-1)-(z-3)=0 \text{ или } 2x+2y+z-7=0.$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1},$$

или

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как определяются частные и полные приращения функции многих переменных?

2. Дайте определение частных производных.

3. В чем состоит геометрический и механический смысл частных производных функции многих переменных?

4. Выведите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

Лекция 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости.
2. Полный дифференциал функции многих переменных и его геометрический смысл.
3. Дифференцирование сложной функции.
4. Инвариантность формы первого дифференциала.

1. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости.

Напоминание. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если приращение функции представимо в виде $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$. Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x_0 является существование производной:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A(x_0).$$

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Пусть $z = f(x, y)$ определена в окрестности $U(\delta; P_0)$ точки $P_0(x_0; y_0)$.

Определение 1. Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $P_0(x_0; y_0)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \tag{1}$$

где A и B – некоторые постоянные, зависящие от x_0 и y_0; $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые функции от Δx и Δy: $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(\Delta x, \Delta y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$.

Данное равенство выражает *условие дифференцируемости* функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Определение 2. Функция $z = f(x, y)$, дифференцируемая в каждой точке множества G, называется ***дифференцируемой на множестве*** G.

Пример. Доказать, что функция $z = xy^2$ дифференцируема на всей плоскости Oxy.

Решение. Действительно, полное приращение данной функции в любой точке $P(x;y)\in \boldsymbol{R}^2$ имеет вид

$$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)^2-xy^2=$$
$$=y^2\Delta x+2xy\Delta y+\left(2xy\Delta y+\Delta y^2\right)\Delta x+x(\Delta y)^2 .$$

Положив $y^2=A$, $2xy=B$, $2xy\Delta y+\Delta y^2=\alpha$, $x\Delta y=\beta$, получим представление Δz в виде условия дифференцируемости, так как A и B в фиксированной точке $P_0(x_0;y_0)$ являются постоянными, а $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Пусть $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$. Очевидно, что если $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, то $\rho\to 0$, и наоборот, если $\rho\to 0$, то $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, а следовательно, α и β стремятся к нулю.

Тогда сумму $\alpha\Delta x+\beta\Delta y$ можно переписать в виде

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\left(\alpha\cdot\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\cdot\frac{\Delta y}{\rho}\right)\cdot\rho=\varepsilon\cdot\rho=o(\rho),$$

так как $\left|\frac{\Delta x}{\rho}\right|\le 1$, $\left|\frac{\Delta y}{\rho}\right|\le 1$ и $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon=\lim\limits_{\rho\to 0}\left(\alpha\frac{\Delta x}{\rho}+\beta\frac{\Delta y}{\rho}\right)=0$.

С учетом этого условие дифференцируемости функции в точке $P_0(x_0;y_0)$ можно записать в виде

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho), \tag{2}$$

где $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ – расстояние между точками $P_0(x_0;y_0)$ и $P(x;y)$, причем $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0$.

Условия дифференцируемости (1) и (2) функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ эквивалентны.

В равенствах (1) и (2) слагаемое $A\Delta x+B\Delta y$, линейное относительно Δx и Δy, называется ***главной частью приращения функции***, так как оставшееся слагаемое $\alpha\Delta x+\beta\Delta y=o(\rho)$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка малости, чем $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$.

Теорема 1 (связь дифференцируемости и непрерывности). *Если функция* $z=f(x,y)$ *дифференцируема в точке* $P_0(x_0;y_0)$, *то она и непрерывна в этой точке.*

► Действительно, по определению функции, дифференцируемой в точке $P_0(x_0;y_0)$, ее приращение представимо в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\,,$$

где $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0$; $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0$; A, B – некоторые числа, не зависящие от Δx и Δy.

Следовательно,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left(A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\right) = 0\,,$$

а это означает, что функция $z = f(x,y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0;y_0)$. ◄

Теорема 2 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то она имеет в этой точке частные производные $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$, причем $f'_x(x_0,y_0) = A$, $f'_y(x_0,y_0) = B$.*

► Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, тогда ее приращение представимо в виде (1). Положив в формуле (1) $\Delta y = 0$, имеем $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x$. Разделив это равенство на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A = f'_x(x_0,y_0).$$

Следовательно, в точке $P_0(x_0;y_0)$ существует частная производная $f'_x(x,y_0)$.

Аналогично доказывается существование частной производной $f'_y(x_0,y_0) = B$ в точке $P_0(x_0;y_0)$. ◄

Замечание. Утверждения, обратные утверждениям теорем 1 и 2 неверны, т.е. из непрерывности функции, а также существования ее частных производных, еще не следует дифференцируемость функции.

Пример. Доказать, что функция $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ непрерывна в точке $O(0;0)$, но не имеет в этой точке частных производных.

Р е ш е н и е. Действительно,

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(0+\Delta x)+0-0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}.$$

Функция $\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x\to 0$. Следовательно, $f'_x(0,0)$ не существует.

Аналогично доказывается, что не существует $f'_y(0,0)$.

Теорема 3 (достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция $z=f(x,y)$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, непрерывные в самой этой точке, то она дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$.*

► Представим полное приращение функции в следующем виде:

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$$
$$=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).$$

Выражение $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)$ является приращением функции по переменной x. Тогда по теореме Лагранжа

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f'_x(\xi,y_0+\Delta y)\Delta x,$$

где $x_0<\xi<x_0+\Delta x$.

Аналогично $f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f'_y(x_0,\eta)\Delta y$, где $y_0<\eta<y_0+\Delta y$.

Следовательно,

$$\Delta f(x_0,y_0)=f'_x(\xi,y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0,\eta)\Delta y.$$

По условию теоремы частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны в точке $P_0(x_0;y_0)$. Тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(\xi,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} f'_y(x_0,\eta)=f'_y(x_0,y_0).$$

Из последних равенств, согласно определению предела, следует, что:

$$f'_x(\xi,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)+\alpha,$$
$$f'_y(x_0,\eta)=f'_y(x_0,y_0)+\beta,$$

где α, β – бесконечно малые функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Подставляя выражения для $f'_x(\xi, y_0+\Delta y)$, $f'_y(x_0, \eta)$ в формулу, имеем:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y .$$

Значит, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$. ◄

Функции с непрерывными частными производными называются ***непрерывно дифференцируемыми***.

Пример. Функция $z = x^2 e^{xy}$ непрерывно дифференцируема в любой точке $P(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$, так как ее частные производные $z'_x = \left(2x + x^2 y\right)e^{xy}$ и $z'_y = x^3 e^{xy}$ всюду непрерывны.

2. Полный дифференциал функции нескольких переменных и его геометрический смысл. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y .$$

Сумма первых двух слагаемых есть главная линейная (относительно Δx и Δy) часть приращения функции.

Определение 3. Если функция $z = f(x; y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то главная линейная относительно приращения аргументов часть ее полного приращения называется ***полным дифференциалом*** функции.

Обозначается:

$$dz\Big|_{P(x_0; y_0)} = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

или

$$df(x_0; y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y .$$

Пример. Если $z = x^2 y$, то $dz = 2xy\Delta x + x^2\Delta y \quad \forall P(x; y) \in \boldsymbol{R}^2$.

Приращения независимых переменных Δx и Δy называются ***дифференциалами независимых переменных*** x и y и *обозначаются* соответственно dx и dy .

Тогда полный дифференциал функции запишется в виде:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy .$$

Выражения $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy$ называются ***частными дифференциалами*** функции $z = f(x; y)$.

Обозначаются: $d_x z$ и $d_y z$.

Таким образом,

$$dz = d_x z + d_y z .$$

Геометрический смысл полного дифференциала. Учитывая, что $\Delta x = x - x_0 = dx$, $\Delta y = y - y_0 = dy$, уравнение касательной плоскости можно записать в виде

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy .$$

Правая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, а левая его часть $z - z_0$ – приращение аппликаты касательной плоскости в точке касания: $z - z_0 = df(x_0, y_0)$.

Поэтому полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ представляет собой отрезок AB.

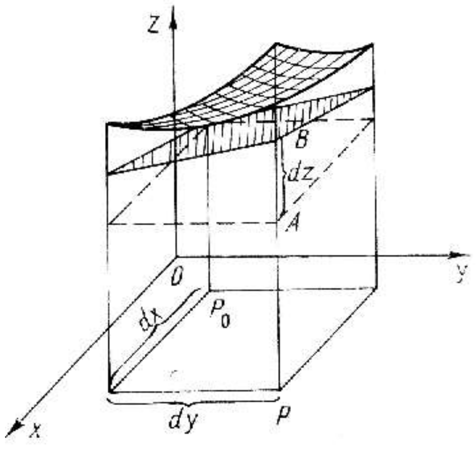


Рис.1. Геометрический смысл дифференциала

Замечание. Определение дифференцируемости функции и полного дифференциала обобщаются на случай функции многих переменных $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Условие дифференцируемости запишется в виде:

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+o(\rho),$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x_1)^2+(\Delta x_2)^2+...+(\Delta x_n)^2}$.

Дифференциал функции $u=f(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет вид:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

4. Дифференцирование сложной функции. Пусть $z=f(u;v)$ – функция двух переменных u и v, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x и y, т.е. $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Тогда $z=f(u(x,y),v(x,y))=F(x,y)$ – сложная функция двух независимых переменных x и y, а переменные u и v – промежуточные переменные.

Теорема 4. *Если функция $z=f(u;v)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0;v_0)$, а функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ дифференцируемы в точке $P_0(x_0;y_0)$, то сложная функция $z=F(x;y)$, где $u=u(x,y)$; $v=v(x,y)$, дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, причем ее частные производные вычисляются по формулам:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

►Докажем первую из формул. В точке $P_0(x_0;y_0)$ переменной x дадим приращение Δx, сохранив y_0 постоянной. Тогда функции u и v получат частные приращения $\Delta_x u$, $\Delta_x v$, а функция z – полное приращение Δz (так как $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$ – приращения по обоим промежуточным аргументам). Функция $z=f(x;y)$ дифференцируема в точке $M_0(u_0;v_0)$, поэтому ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v+\alpha\Delta_x u+\beta\Delta_x v.$$

Разделим данное равенство на $\Delta x\neq 0$:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \frac{1}{\Delta x}\alpha\Delta_x u + \frac{1}{\Delta x}\beta\Delta_x v .$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ и $\Delta_x v \to 0$ в силу непрерывности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\Delta x}\alpha\ \Delta_x u = \alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x},\ \frac{1}{\Delta x}\beta\ \Delta_x v = \beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу и учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = 0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = 0$, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Аналогично доказывается $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$. ◄

Замечание. Для функции трех переменных $w = f(u,v,t)$, каждая из которых, в свою очередь, является функцией независимых переменных x, y, z т.е. $u = u(x,y,z)$, $v = v(x,y,z)$, $t = t(x,y,z)$ и $w = f(u(x,y,z), v(x,y,z), t(x,y,z)) = F(x,y,z)$ частные производные вычисляются по формулам

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}.$$

Аналогично для функции n, $n > 3$, переменных.

Частные случаи задания сложной функции $w = f(u,v,t)$.

1. Пусть $w = f(u,v,t)$, $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, $t = t(x,y)$.

Тогда $w = f(u(x,y), v(x,y), t(x,y)) = F(x,y)$, является сложной функцией только двух аргументов, и, значит, имеем две частные производные $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$.

2. Пусть $z = f(x, y, u)$, $y = y(x)$, $u = u(x)$.

Тогда $z = f(x, y(x), u(x)) = F(x)$ – функция одной переменной x. Найдем z'_x по общей формуле дифференцирования сложной функции:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Так как $y = y(x)$ и $u = u(x)$ – функции только одной переменной x, то их частные производные обращаются в обыкновенные производные. Кроме того, $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$.

Следовательно,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}.$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ сложной функции $z = f(x, y(x), u(x))$ называется ***полной производной***.

Между частной $\frac{\partial z}{\partial x}$ и полной $\frac{dz}{dx}$ производными имеется существенное различие. Полная производная $\frac{dz}{dx}$ – это обыкновенная производная от z как функции x, а $\frac{\partial z}{\partial x}$ есть частная производная от z по переменной x, входящей в выражение функции непосредственно, т.е. при условии, что другие переменные (y и u зависящие от x, при дифференцировании остаются постоянными).

Примеры. 1. Вычислить частные производные сложной функции двух переменных $f(u, v) = u \cdot \ln v$, где $u = 3x - y$; $v = x^2 + y^2$.

Решение. Имеем $u'_x = 3$, $v'_x = 2x$, $u'_y = -1$, $v'_y = 2y$, $f'_u = \ln v$, $f'_v = \frac{u}{v}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=3\ln v+2x\frac{u}{v}=3\ln\left(x^2+y^2\right)+2x\frac{3x-y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\ln v+2y\frac{u}{v}=-\ln\left(x^2+y^2\right)+2y\frac{3x-y}{x^2+y^2}.$$

2. Найти полную производную сложной функции $z=x\sin v\cos w$, где $v=\ln\left(x^2+1\right)$; $\boldsymbol{w=-\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. По формуле имеем

$$\frac{dz}{dx}=\sin v\cos w+x\cos v\cos w\frac{2x}{x^2+1}-x\sin v\sin w\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\cos\sqrt{1-x^2}+\frac{2x^2}{x^2+1}\cos\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\cos\sqrt{1-x^2}+$$

$$+\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\sin\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)\sin\sqrt{1-x^2}=.$$

4. Инвариантность формы первого дифференциала функции нескольких переменных. Найдем полный дифференциал сложной функции $z=f\left(u(x,y),v(x,y)\right)$ в точке $P_0\left(x_0;y_0\right)$. Подставим выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, определяемые равенствами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

в формулу полного дифференциала сложной функции двух переменных $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Получим

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy$$

или

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right).$$

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=dv$, то

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Видно, что форма записи полного дифференциала функции двух переменных не зависит от того, являются ли u и v независимыми переменными, или функциями других независимых переменных. В этом и заключается ***инвариантность формы первого дифференциала функции нескольких переменных***.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение дифференцируемости функции в точке. Как связаны непрерывность и дифференцируемость функции $z=f(x,y)$?

2. Сформулируйте и докажите необходимое условие дифференцируемости функции $z=f(x,y)$.

3. Сформулируйте и докажите достаточное условие дифференцируемости функции $z=f(x,y)$.

4. Что называется полным дифференциалом функции многих переменных? В чем состоит геометрический смысл?

5. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

6. В чем заключается инвариантность формы первого дифференциала?

Лекция 6. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

1. Производная по направлению.
2. Градиент.

1. Производная по направлению. Рассмотрим функцию $z = f(x,y)$, определенную и дифференцируемую в окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$. и пусть $\vec{l} = (\cos\alpha;\cos\beta)$ – произвольный вектор плоскости, отличный от нулевого, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ направляющие косинусы вектора $\vec{l}$. Проведем через точку $P_0(x_0;y_0)$ прямую Γ так, чтобы одно из ее направлений совпадало с направлением вектора $\vec{l}$.

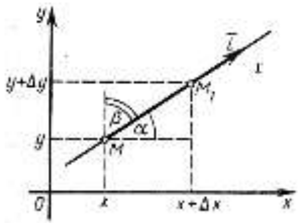


Рис.1. Производная по направлению

Возьмем на направленной прямой точку $P_1(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)$. Тогда $P_0P_1 = \Delta l = \pm\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ есть приращение вдоль прямой Γ. Функция $z = f(x,y)$ получит при этом приращение $\Delta z = f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0)$.

Определение 1. ***Производной по направлению*** вдоль вектора $\vec{l}$ функции $z = f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$.

Обозначается: $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta l}$.

Теорема 1. *Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$, то производная по направлению в этой точке вычисляется по формуле:*

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta .$$

► Так как функция дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то ее приращение в этой точке вдоль прямой Γ можно записать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y ,$$

где $\alpha_1 \to 0$ и $\alpha_2 \to 0$ при $\Delta l \to 0$.

Разделим обе части этого равенства на Δl, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta l} + \alpha_2 \frac{\Delta y}{\Delta l}.$$

Учитывая, что (рис.1), имеем $\frac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta$.

Поэтому

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \alpha_1 \cos\alpha + \alpha_2 \cos\beta .$$

Переходя к пределу при $\Delta l \to 0$, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta . ◄$$

В частности, при $\alpha = 0$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$ имеем $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}$, а при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = 0$ имеем $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Отсюда следует, что частные производные по переменным x и y являются частными случаями производной по направлению.

Пример. Вычислить производную по направлению функции $z = x^2 + xy^2$ в точке $P_0(1;2)$ в направлении вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(3;0)$.

Решение. Координаты вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$ равны

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (3-1; 0-2) = (2; -2).$$

Тогда длина вектора есть $\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$.

Координаты нормированного вектора есть

$$\vec{l} = \left(\frac{2}{2\sqrt{2}}; -\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Отсюда $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Значения частных производных в точке $P_0(1;2)$ есть

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)} = \left.\left(2x + y^2\right)\right|_{(1;2)} = 6,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;2)} = \left.2xy\right|_{(1;2)} = 4.$$

Тогда производная по направлению равна $\frac{\partial z}{\partial l} = \sqrt{2}$.

2. Градиент.

Определение 2. ***Градиентом*** функции $z = f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Обозначается: $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ или $\nabla f = \left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Градиент ∇f функции $z = f(x,y)$ можно записать с помощью координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в виде $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$.

Используя скалярное произведение векторов в координатной форме, можно записать $\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \vec{l}_0 \cdot \nabla f$,

где $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|}$, $\left|\vec{l}_0\right| = 1$. С другой стороны, скалярное произведение векторов равно $\vec{l}_0 \cdot \nabla f = \left|\vec{l}_0\right| \cdot \left|\nabla f\right| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{l}_0$ и ∇f. Сравнивая, получим $\frac{\partial z}{\partial l} = \left|\nabla f\right| \cdot \cos\varphi$. Отсюда следует, что $\frac{\partial z}{\partial l}$ имеет наибольшую длину при $\cos\varphi = 1$, т.е. когда направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением вектора ∇f.

Градиент ∇f функции $z = f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Замечания. **1.** Производная по направлению для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma ,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

2. Пусть функция $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geq 2$, определена и дифференцируема в точке $x_0 = \left(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0\right)$. И пусть задан n-мерный вектор $\vec{l} \neq 0$, единичный вектор $\vec{l}_0 = \frac{\vec{l}}{\left|\vec{l}\right|} = (\cos\alpha_1; \cos\alpha_2; ...; \cos\alpha_n)$, где $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, ..., $\cos\alpha_n$ направляющие косинусы в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Тогда существует производная по любому направлению и

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + ... + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\cos\alpha_n .$$

2. Градиент $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$ функции $u = f(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geq 2$, определяется по формуле:

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}; \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right).$$

Пример. Найти градиент функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $P(1;1;1)$.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x , \ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y , \ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z .$$

Тогда $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1;1;1)} = 2$, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1;1;1)} = 2$, $\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1;1;1)} = 2$.

Следовательно, градиент функции равен

$$\operatorname{grad} f(x) = (2;2;2).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение производной по направлению.

2.Докажите формулу $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$.

Лекция 7. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
2. Теорема о равенстве смешанных производных.
3. Дифференциалы высших порядков.

1. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет непрерывные частные производные $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в точке $P(x; y) \in D(f)$. Эти производные, в свою очередь, являются функциями двух переменных x и y. Функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называются ***частными производными первого порядка***. Частные производные по x и по y от частных производных первого порядка, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** от функции $z = f(x, y)$ в точке $P(x; y)$.

Обозначаются:

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $f''_{xx}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, z''_{xx} – функция f дифференцируется последовательно два раза по x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $f''_{xy}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$, z''_{xy} – функция f дифференцируется сначала по x, а затем по y;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $f''_{yx}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, z''_{yx} – функция f дифференцируется сначала по y, а затем по x;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $f''_{yy}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$, z''_{yy} – функция f дифференцируется последовательно два раза по переменной y.

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по x, так и по y. В результате получим восемь ***частных производных третьего порядка***:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Таким образом, частная производная от производной $(n-1)$-го порядка называется ***частной производной*** n***-го порядка*** и обозначается $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}$, $\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}$ и т.д.

Частные производные высших порядков функции z, взятые по различным переменным, например $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ называются ***смешанными производными***.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $z = \sin\left(x^2 + y^2\right)$.

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^2$. Найдем частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\cos\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right).$$

Частные производные первого порядка определены и непрерывны на $\boldsymbol{R}^2$.

Вычислим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Видно, что смешанные частные производные второго порядка этой функции равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Далее находим:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4^2 x\sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\cos\left(x^2 + y^2\right) - 4y^2 \sin\left(x^2 + y^2\right).$$

2. Теорема о равенстве смешанных производных. Среди частных производных второго порядка функции $z = f(x, y)$ имеются две смешанные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Возникает вопрос: зависит ли результат дифференцирования функций нескольких переменных от порядка дифференцирования по разным переменным.

Теорема 1. *Если функция* $z = f(x, y)$ *и ее частные производные* f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} *определены и непрерывны в точке* $P_0(x_0; y_0)$ *и в некоторой ее окрестности, то*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

► Пусть смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} определены в прямоугольнике

$$\Pi = \left\{(x; y) \middle| \, |x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \delta \right\}$$

и непрерывны в точке $P_0(x_0; y_0)$.

Рассмотрим в прямоугольнике Π функцию

$$g(x; y) = f(x; y) - f(x_0; y) - f(x; y_0) + f(x_0; y_0).$$

При фиксированном $y \in (y_0 - \delta; y_0 + \delta)$ на интервале $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = f(t; y) - f(t; y_0),$$

которая дифференцируема на этом интервале и

$$\varphi'(t) = f'_x(t; y) - f'_x(t; y_0).$$

Функцию $g(x; y)$ можно записать в виде

$$g(x; y) = \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

Применяя формулу конечных приращений Лагранжа по переменной x, получим:

$$g(x; y) = \varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta_1 \Delta x)\Delta x =$$
$$= \left[f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x; y_0)\right] \cdot \Delta x,$$

где $0 < \theta_1 < 1$.

Применяя еще раз формулу конечных приращений Лагранжа, но уже по переменной y, имеем

$$g(x;y)= f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x; y_0+\theta_2\Delta y)\cdot \Delta x\Delta y,$$

где $0<\theta_2<1$.

При фиксированном $x\in(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ на интервале $(y_0-\delta; y_0+\delta)$ рассмотрим функцию

$$\psi(\tau)= f(x;\tau)- f(x_0;\tau).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, получим

$$g(x;y)=\psi(y)-\psi(y_0)=\psi'(y_0+\theta_3\Delta y)\Delta y =$$

$$=\left[f'_y(x;y_0+\theta_3\Delta y)- f'_y(x_0;y_0+\theta_3\Delta y)\right]\cdot \Delta y =$$

$$= f''_{yx}(x_0+\theta_4\Delta x; y_0+\theta_3\Delta y)\cdot \Delta y\Delta x,$$

где $0<\theta_3<1$, $0<\theta_4<1$.

Переходя к пределу при $(\Delta x;\Delta y)\to(0;0)$ и пользуясь непрерывностью смешанных производных в точке $P_0(x_0;y_0)$, получаем равенство

$$f''_{xy}(x_0,y_0)= f''_{yx}(x_0,y_0). \blacktriangleleft$$

Замечание. Все приведенные выше рассуждения, а также теорема 1 имеют место и для функции любого числа переменных.

Пример. Найти частные производные второго порядка функции $u = xyz - e^{x+y}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}^3$. Вычисляем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz - e^{x+y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = xz - e^{x+y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = xy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{x+y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = z - e^{x+y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{x+y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} = x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

3. Дифференциалы высших порядков. С л у ч а й 1. Ф у н к ц и я $z = f(x;y)$. Пусть $z = f(x,y)$ – функция двух независимых переменных x и y, дифференцируемая в области $D(f)$.

Придавая x и y приращения $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, в любой точке $P(x;y) \in D(f)$ можно вычислить полный дифференциал

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy,$$

который называют ***дифференциалом первого порядка*** функции $z = f(x,y)$.

Дифференциал от дифференциала первого порядка в любой точке $P(x;y) \in D(f)$ если он существует, называется ***дифференциалом второго порядка*** и обозначается

$$d^2z = d(dz).$$

Найдем аналитическое выражение для d^2z, считая dx и dy постоянными:

$$d^2z = d\left(f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right) = d\left(f'_x(x,y)\right)dx + d\left(f'_y(x,y)\right)dy =$$
$$= \left(f''_{xx}(x,y)dx + f''_{yx}(x,y)dy\right)dx + \left(f''_{yx}(x,y)dx + f''_{yy}(x,y)dy\right)dy =$$
$$= f''_{xx}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{yy}(x,y)dy^2.$$

Поступая аналогично, получаем аналитическое выражение для ***дифференциала третьего порядка*** d^3z **:**

$$d^3z = d\left(d^2z\right) =$$
$$= f'''_{xxx}(x,y)dx^3 + 3f'''_{xxy}(x,y)dx^2dy + 3f'''_{xyy}(x,y)dxdy^2 + 3f'''_{yyy}(x,y)dy^3.$$

И так далее.

Определение 1. Функция f называется k ***раз непрерывно дифференцируемой*** в области G, если для нее существует k-ый дифференциал в этой области.

Обозначается: $f \in \mathrm{C}_G^k$.

Замечания. 1. Аналитические выражения для dz, d^2z и d^3z кратко записывают в виде следующих символических формул:

$$dz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)z,$$

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z,$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 z.$$

Тогда и для любого n справедливо соотношение

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z ,$$

причем правая часть этого равенства раскрывается формально по биномиальному закону.

2. Если $z = f(x, y)$ – дифференцируемая функция промежуточных аргументов x и y, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями u и v, то $dx \neq \Delta x$, $dy \neq \Delta y$. Следовательно, можно получить новые выражения для $d^2 z = d(dz)$, $d^3 z = d(d^2 z)$, …. Следовательно, приведенные выше формулы дифференциалов *не являются* инвариантными для сложных функций.

Пример. Найти dz и $d^2 z$, если $z = \ln(x - y) + \sqrt{xy}$.

Решение. Используем формулу $dz = z'_x dx + z'_y dy$. Так как

$$z'_x = \frac{1}{x - y} + \frac{y}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{x - y} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} ,$$

$$z'_y = \frac{-1}{x - y} + \frac{x}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x - y} ,$$

то

$$dz = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{1}{x - y} \right) dx + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}} - \frac{1}{x - y} \right) dy .$$

Для определения $d^2 z$ вычислим предварительно частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{1}{(x - y)^2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}} ,$$

$$z''_{yy} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}} - \frac{1}{(x - y)^2} ,$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{(x - y)^2} + \frac{1}{4\sqrt{xy}} .$$

Тогда

$$d^2z=\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{y}{x^3}}\right)dx^2+2\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4\sqrt{xy}}\right)dxdy-$$
$$-\left(\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{x}{y^3}}\right)dy^2.$$

Случай 2. Функция $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$. Пусть задана функция многих переменных $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ пространства $\boldsymbol{R}^n$. Производные порядка выше первого определяются по формуле

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}=\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1}f}{\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}\right).$$

Дифференциал

$$du(x)=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n,\ x\in G,$$

есть функция $2n$ переменных, а именно $x_1,x_2,...,x_n$ и dx_1, dx_2, ..., dx_n.

Если фиксировать переменные dx_1, dx_2, ..., dx_n, то дифференциал $du(x)$ является функцией x, имеющей в области G непрерывные частные производные. Следовательно, $du(x)$ как функция x имеет в каждой точке $x\in G$ дифференциал $d(du)$.

Обозначим приращения независимых переменных δx_1, δx_2, ..., δx_n. Тогда

$$d(du)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(du)}{\partial x_k}\delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_i}dx_i\delta x_k.$$

Выражение $d(du)$ есть билинейная форма относительно приращений δx_1, δx_2, ..., δx_n. Полагая

$$dx_1=\delta x_1,\ dx_2=\delta x_2,\ ...,\ dx_n=\delta x_n$$

получаем квадратичную форму, которая называется ***вторым дифференциалом*** функции $u=f(x)$ в точке x.

Обозначается: $d^2u=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_i}dx_i dx_k$.

Аналогично, предполагая, что все частные производные третьего порядка непрерывны, определяется третий дифференциал функции $u = f(x)$:

$$d^3u = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} dx_i dx_k dx_j \ .$$

По индукции определяется дифференциал m-го порядка в предположении, что все частные производные m-го порядка непрерывны в точке x. Если дифференциал $d^{m-1}u$ вычислен как однородная форма порядка $m-1$ относительно dx_1, dx_2, ..., dx_n с коэффициентами, являющимися функциями x, то вычисляя первый дифференциал от $d^{m-1}u$ и полагая затем $dx_i = \delta x_i$, $i = 1,2,..., n$, получим:

$$d^m u = \sum_{k=1}^{n} ... \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_m}} dx_{i_1} ... dx_{i_m} \ .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как находятся частные производные высших порядков?
2. Что называется смешанной производной? Сформулируйте теорему о равенстве смешанных производных.
3. Докажите формулу для дифференциала второго порядка.

Лекция 8. ТЕОРЕМА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Формула Тейлора для функции двух переменных.
2. Формула Маклорена.

1. Формула Тейлора для функции двух переменных.

Напоминание. Формула Тейлора для функции одной переменной $y = f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа записывается через дифференциалы этой функции в виде:

$$f(x)=$$

$$= f(x_0)+df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi).$$

Теорема 1 (Тейлора). *Пусть функция двух переменных $z = f(x,y)$ непрерывна со всеми частными производными до $(n+1)$ порядка включительно в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_0;y_0)\in D(f)$. Тогда справедлива формула формулой Тейлора для функции двух переменных*

$$f(x,y)= f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+R_n, \quad (1)$$

где $R_n=\dfrac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi,\eta)$, $x_0<\xi<x$; $y_0<\eta<y$.

► Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t)= f(x_0+t\Delta x;y_0+t\Delta y),\ 0\le t\le 1,$$

которая является сложной функцией независимой переменной t и имеет $(n+1)$-ю производную по t на отрезке $[0;1]$.

Согласно формуле Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$F(t)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{F^n(0)}{n!}t^n+\frac{F^{n+1}(\theta\, t)}{(n+1)!}t^{n+1}, \quad (2)$$

где $0<\theta<1$.

Отсюда при $t=1$ получим

$$F(1)= f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)=$$

$$=F(0)+\frac{F^{'}(0)}{1!}+\frac{F^{''}(0)}{2!}+...+\frac{F^{n-1}(0)}{(n-1)!}+\frac{F^{n}(\theta)}{n!},$$

где $0<\theta<1$.

Найдем производные функции $F(t)$. Так как $\frac{dx}{dt}=\Delta x$ и $\frac{dy}{dt}=\Delta y$, то первая производная есть:

$$F^{'}(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f\left(x_0+t\Delta x;y_0+t\Delta y\right),$$

вторая –

$$F^{''}(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Delta x+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Delta y=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dt}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\Delta y=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2=$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f\left(x_0+t\Delta x;y_0+t\Delta y\right).$$

По индукции получаем:

$$F^{(k)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f\left(x_0+t\Delta x;y_0+t\Delta y\right),\ k=0,1,...,n,$$

$$F^{(n+1)}(t)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f\left(x_0+t\Delta x;y_0+t\Delta y\right).$$

Тогда

$$F(0)=f(x_0;y_0),$$

$$F^{'}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)f(x_0;y_0)=df(x_0;y_0),$$

$$F''(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0;y_0)=d^2 f(x_0;y_0),$$

. . . .

$$F^n(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0;y_0)=d^n f(x_0;y_0),$$

$$F^{n+1}(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y)=$$

$$=d^{n+1} f(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y).$$

Подставляя в формулу (2), имеем

$$F(1)-F(0)=f(x,y)-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0)+\ldots$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi,\eta),$$

где $(x_0+\theta\Delta x;y_0+\theta\Delta y)=(x;y)$.◄

Следствие. *При условиях теоремы 1 имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)+o(\rho^n). \tag{3}$$

► Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа для функции $z=f(x,y)$

$$R_n(\xi;\eta)=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi,\eta)$$

является при $(x;y)\to(x_0;y_0)$ бесконечно малой величиной более высокого порядка малости по сравнению с $\rho^n(P,P_0)$, где $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Поэтому остаточный член $R_n(\xi;\eta)$ можно представить в форме Пеано

$$R(x,y)=o(\rho^n).\ ◄$$

2. Формула Маклорена. Если в формуле (1) положить $x_0=y_0=0$, получается ***формула Маклорена*** для функции двух переменных $z=f(x,y)$:

$$f(x,y)=f(0,0)+df(0,0)+\frac{1}{2!}d^2 f(0,0)+...+\frac{1}{n!}d^n f(0,0)+R_n .$$

Пример. Записать формулу Тейлора при $n=2$ с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x,y)=2^{xy}$ в точке $P_0(1;1)$.

Решение. Для любых x, $y\in U(\varepsilon;P_0)$ имеет место формула Тейлора второго порядка:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0)+o(\rho^2)$$

или в краткой записи

$$f(P)=f(P_0)+df(P_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(P_0)+o(\rho^2).$$

Вычислим:

$f(P_0)=2$,

$df(P_0)=\left(f'_x(P_0)dx+f'_y(P_0)dy\right)=$

$=\left(y\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(x-1)+x\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-1)\right)\Big|_{P_0}=$

$=2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)$,

$d^2 f(P_0)=f''_{xx}(P_0)dx^2+2f''_{xy}(P_0)dxdy+f''_{yy}(P_0)dy^2=$

$=\left(y^2\cdot 2^{xy}\ln^2 2(x-1)^2+2\left(2^{xy}\ln 2+xy\cdot 2^{xy}\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)\right)+$

$+x^2\cdot 2^{xy}\ln 2\cdot(y-2)^2\Big|_{P_0}=$

$=2\ln^2 2\cdot(x-1)^2+2\left(\ln 2+2\ln^2 2\right)(x-1)(y-1)+2\ln 2\cdot(y-1)^2.$

Следовательно,

$$2^{xy}=2+2\ln 2\cdot(x-1)+2\ln 2\cdot(y-1)+\ln^2 2\cdot(x-1)^2+$$
$$+(1-2\ln 2)\ln 2\cdot(x-1)(y-1)+\ln 2\cdot(y-1)^2+o(\rho^2),$$

где $\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$.

С помощью формулы Тейлора для функции двух независимых переменных можно находить приближенные значения функции в точке, а также исследовать функции двух переменных на экстремум.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему Тейлора для функции двух переменных.
2. Какой вид имеет формула Маклорена для функции двух переменных?

Лекция 9. ЭКСРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Понятие экстремума функции многих переменных.
2. Некоторые сведения о квадратичных формах.
3. Достаточные условия экстремума.

1. Понятие экстремума функции многих переменных. Пусть дана функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n) = f(P)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Определение 1. Точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ называется точкой ***локального максимума (минимума)*** функции $u = f(P)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $P(x_1; x_2; ...; x_n) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ выполняется неравенство

$$f(P_0) > f(P)$$
$$(\ f(P_0) < f(P)),$$

значение $f(P_0)$ называют ***локальным максимумом (минимумом)*** функции.

Обозначается:

$$\max_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)$$
$$(\ \min_{P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)} f(P) = f(P_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называют ***точками экстремума*** функции, а максимумы и минимумы функции – ***экстремумами функции***.

Примеры. **1.** Функция $z = 1 - (x-1)^2 - (y-1)^2$ имеет локальный максимум в точке $P_0(1;1)$, $z_{\max} = z(1,1) = 1$. Действительно, существует окрестность точки $P_0(1;1)$ (рис.1), в которой выполняется условие $f(1;1) > f(x;y) \ \ \forall P(x;y) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$.

2. Функция $z = (x-1)^2 + (y-2)^2$ имеет локальный минимум в точке $P_0(1;2)$ (рис.2), так как в любой точке $P(x;y)$, принадлежащей достаточно малой окрестности точки P_0, выполняется условие $f(1,2) < f(x,y) \ \ \forall P(x;y) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$.

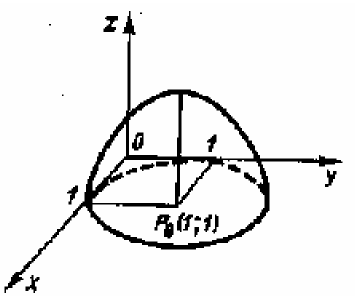


Рис.1.

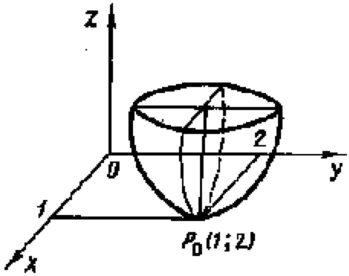


Рис.2.

Замечание. Если функция $u = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ локальный экстремум, то:
в случае *локального максимума* – $f(P) - f(P_0) = \Delta u < 0$,
в случае *локального минимума* – $f(P) - f(P_0) = \Delta u > 0$.

Из сказанного выше следует, что полное приращение функции не меняет знака в окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$. Однако для всех точек $P \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ определить знак приращения Δu практически невозможно, поэтому надо искать другие условия, по которым можно судить о наличии и характере экстремума функции в данной точке.

Теорема 1 (необходимые условия существования локального экстремума). *Если в точке* $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ *дифференцируемая функция* $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ *имеет локальный экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:*

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_2} = ... = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x_n} = 0, \qquad (1)$$

или, по крайней мере, одна из них не существует.

► Докажем утверждение теоремы для функции двух переменных $z = f(x; y)$.

Пусть $P_0(x_0; y_0)$ – стационарная точка данной функции. Рассмотрим в $U(\delta; P_0)$ лишь те точки, для которых $y = y_0$. Получим функцию $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ одной переменной x. Эта функция имеет в точке x_0 экстремум, следовательно,

$\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0$.

Аналогично доказывается, что $f'_y(x_0, y_0) = 0$. ◄

Пример. Функция $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет максимум в точке $P_0(0;0)$ (рис.3), так как для любой точки $P(x; y) \in \overset{\circ}{U}(\delta; P_0)$ выполняется условие $f(0,0) > f(x, y)$.

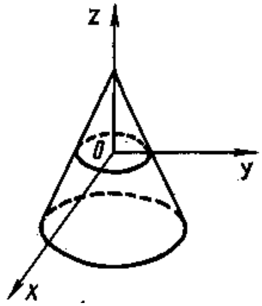


Рис.3.

Частные производные функции равны

$$f'_x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f'_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

и в точке $P_0(0;0)$ не существуют.

Следствие. *Если функция $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке $du(P_0)$ равен нулю или не существует.*

Точка $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, в которой выполняется условие (1), называется ***точкой возможного экстремума*** или ***стационарными (критическими).***

Равенство нулю частных производных первого порядка не является достаточным условием существования экстремума функции $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Пример. Функцию $z = xy^2$. Она задана на всей числовой плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Точка $O(0;0)$ будет критической, поскольку частные производные в ней равны нулю. Так как функция равна нулю в точке O, а в любой сколь угодно малой окрестности $U(\delta; P_0)$ она принимает как положительные, так и отрицательные значения, то функция $z = xy^2$ не имеет в точке O экстремума.

2. Некоторые сведения о квадратичных формах.

Определение 2. Функция вида

$$Q(x_1; x_2; ...; x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 +$$

$$+ a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + ... + a_{nn}x_n^2 == \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

называется ***квадратичной формой*** от переменных x_1, x_2, ..., x_n, числа a_{ij}, $i, j = 1,2,...,n$, называются ***коэффициентами квадратичной формы***, матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей квадратичной формы***.

Если $a_{ij} = a_{ji}$ для $\forall i; j \quad i \neq j$, то квадратичная форма называется ***симметричной***.

Определение 3. Определители

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называются ***главными*** минорами матрицы A.

Определение 4. Квадратичная форма $Q(x_1; x_2; ...; x_n)$ называется ***положительно определенной*** (***отрицательно определенной***), если для любых значений переменных x_1, x_2, ..., x_n, одновременно не равных нулю, она принимает положительные (отрицательные) значения.

Пример. Квадратичная форма $Q(x_1; x_2) = x_1^2 + x_2^2$ является положительно определенной квадратичной формой, так как $Q(x_1; x_2) > 0$ во всех точках $(x_1; x_2)$, кроме точки $O(0;0)$.

О п р е д е л е н и е 5. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***знакоопределенной***, если она является положительно определенной или отрицательно определенной. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***квазизнакоопределенной***, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значении, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ называется ***знакопеременной***, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Примеры. **1.** Квадратичная форма $Q(x_1;x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ является квазиопределенной квадратичной формой, так как $Q(x_1;x_2) \geq 0$ во всех точках $(x_1;x_2)$, при этом $Q(x_1;x_2) = 0$ не только в точке $O(0;0)$.

2. Квадратичная форма $Q(x_1;x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2$ является знакопеременной.

Теорема 2 (критерий Сильвестра). *1) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее главные миноры были положительны:*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, ...,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

2) Для того, чтобы квадратичная форма $Q(x_1;x_2;...;x_n)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров ее матрицы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0\,,\ \Delta_2 > 0\,,\ \Delta_3 < 0\,,\ \Delta_4 > 0\,,\ ... .$$

Без доказательства.

3. Достаточные условия экстремума.

Теорема 3 (достаточные условия существования локального экстремума). *Пусть функция $u = f(x_1;x_2;...;x_n) = f(P)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ и дважды дифференцируема в самой точке P_0,* *причем* P_0 *– точка возможного экстремума, т.е.* $du(P_0)=0$. *Тогда 1) если второй дифференциал* $d^2u(P_0)$ *является положительно определенной (отрицательно определенной) формой от переменных* dx_1, dx_2, ..., dx_n, *то функция* $u=f(P)$ *имеет в точке* P_0 *локальный минимум (максимум);*

2) если $d^2u(P_0)$ *является знакопеременной квадратичной формой, то функция* $u=f(P)$ *в точке* P_0 *экстремума не имеет.*

Без доказательства.

Замечание. Если $du(P_0)=0$, а $d^2u(P_0)$ является квазиопределенной квадратичной формой, то функция $u=f(P)$ может иметь в точке P_0 локальный экстремум, а может и не иметь.

Для функции двух переменных $z=f(x;y)$ данная теорема формулируется следующим образом.

Теорема 4 (достаточные условия существования локального экстремума). *Пусть* $P_0(x_0;y_0)$ *– стационарная точка, дважды дифференцируемой в окрестности* $U(\delta;P_0)$ *функции* $z=f(x;y)$. *И пусть*

$$\Delta(P_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{xy}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2. \qquad (2)$$

Тогда стационарная точка $P_0(x_0;y_0)$ *является:*

1) точкой локального максимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и* $f''_{xx}(x_0,y_0)<0$;

2) точкой локального минимума, если $\Delta(P_0)>0$ *и* $f''_{xx}(x_0,y_0)>0$;

3) если $\Delta(P_0)<0$, *то в стационарной точке* P_0 *экстремума нет,*

4) если $\Delta(P_0)=0$, *то локальный экстремум может быть, а может и не быть.*

► Из определения локального экстремума следует, что если функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0;y_0)$ локальный максимум, то приращение $\Delta z<0 \quad \forall P\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0)$; если же $P_0(x_0;y_0)$ – точка локального минимума, то $\Delta z>0 \quad \forall P\in \overset{\circ}{U}(\delta;P_0)$.

Для определения знака приращения Δz в δ-окрестности стационарной точки $P_0(x_0; y_0)$ разложим функцию $z = f(x, y)$ по формуле Тейлора

$$\Delta z = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)} d^{n+1} f(\xi, \eta),$$

где $df(x_0, y_0)$, $d^2 f(x_0, y_0)$, ... – дифференциалы соответственно первого, второго и более высоких порядков функции $z = f(x, y)$, вычисленные в точке $P_0(x_0; y_0)$; $d^{n+1} f(\xi, \eta)$ – дифференциал $(n+1)$-го порядка функции $z = f(x, y)$, вычисленный в некоторой точке $P(\xi, \eta) = P(x_0 + \theta\,\Delta x; y_0 + \theta\,\Delta y)$, где $0 < \theta < 1$. Поэтому $x_0 < \xi < x$, $y_0 < \eta < y$.

Сохраним в формуле Тейлора только первые два члена, т.е. положим

$$\Delta z \approx df(x_0, y_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0).$$

Так как P_0 – стационарная точка, то $dz\big|_{P_0} = 0$. Следовательно,

$$\Delta z \approx \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2\right).$$

Для удобства записей обозначим вторые частные производные в точке $P_0(x_0; y_0)$ через A, B, C:

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A,\ f''_{xy}(x_0, y_0) = B,\ f''_{yy}(x_0, y_0) = C.$$

Тогда, считая, что $\Delta y \neq 0$, имеем:

$$\Delta z = \frac{(\Delta y)^2}{2}\left(A\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + 2B\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right) + C\right) = \frac{(\Delta y)^2}{2}\left(At^2 + 2Bt + C\right).$$

Из последнего равенства видно, что знак Δz определяется знаком трехчлена $At^2 + 2Bt + C$, где $t = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$.

Дискриминант данного трехчлена равен $B^2 - AC$.

1. Если $B^2 - AC < 0$ или $\Delta(P_0) = AC - B^2 > 0$, то для любого $A > 0$ приращение $\Delta z > 0$ и $P_0(x_0; y_0)$– точка локального минимума, а для любого $A < 0$ приращение $\Delta z < 0$ и $P_0(x_0; y_0)$ – точка локального максимума.

2. Если $B^2 - AC > 0$, то трехчлен $At^2 + Bt + C$ имеет два действительных корня, и в промежутке изменения $T = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ приращение Δz меняет знак. Поэтому при $B^2 - AC > 0$ или $\Delta(P_0) = AC - B^2 < 0$ стационарная точка $P_0(x_0; y_0)$ не является точкой экстремума.

3. Если $B^2 - AC = 0$, то стационарная точка $P_0(x_0; y_0)$ будет точкой локального минимума при $A > 0$ и точкой локального максимума при $A < 0$.

Если $B^2 - AC = 0$ и $A = B = 0$, то $\Delta z \approx \dfrac{1}{2} C(\Delta y)^2$ и знак Δz определяется знаком C. Поэтому стационарная точка будет точкой локального минимума при $C > 0$ и точкой локального максимума при $C < 0$. ◄

Замечания. 1. Если $\Delta(P_0) = 0$, то нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке P_0. В этом случае необходимо произвести дополнительные исследования знака функции $z = f(x, y)$ в $U(\delta; P_0)$. Действительно, если $B^2 - AC = 0$ и $A = B = C = 0$, то $d^2 z = 0$ и $\Delta z \approx \dfrac{1}{3!} d^3 z\Big|_{P_0}$, т.е. в этом случае знак Δz определяется знаком $d^3 z\Big|_{P_0}$. Следовательно, требуются дополнительные исследования по определению знака Δz в окрестности стационарной точки P_0.

2. При выводе достаточных условий экстремума предполагалось, что $\Delta y \neq 0$. Если $\Delta y = 0$ для любого $\Delta x \neq 0$, то получаем экстремум функции одной переменной $z = f(x, y)$. Аналогично если $\Delta x = 0$ для любого $\Delta y \neq 0$, то $z = f(x_0, y)$.

Приращения Δx и Δy не могут равняться нулю одновременно, поскольку в подобном случае точка $P(x + \Delta x; y + \Delta y)$ совпала бы с точкой $P_0(x_0; y_0)$ и функция $z = f(x, y)$ не получила бы никакого приращения.

Примеры. 1. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 2\right),\ z'_y = 2ye^{\frac{x}{2}}.$$

Находим точки возможного экстремума. Для этого решим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y^2 + 2 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = -2$, $y_0 = 0$.

Таким образом, существует только одна стационарная точка $P_0(-2;0)$, в которой функция z может достигать экстремума.

Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки $P_0(-2;0)$. Для этого вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}\left(x + y^2 + 4\right)\Big|_{(-2;1)} = \frac{1}{2e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = ye^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{\frac{x}{2}}\Big|_{(-2;1)} = \frac{2}{e}.$$

Так как

$$\Delta(P_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \frac{1}{e^2} > 0$$

и $A > 0$, то точка $P_0(-2;0)$ является точкой локального минимума:

$$z_{\min} = z(-2{,}0) = -\frac{2}{e}.$$

2. Исследовать на экстремум функцию $z = e^{-x}\left(x + y^2\right)$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка данной функции:

$$z'_x = e^{-x}\left(1 - x - y^2\right),\ z'_y = 2ye^{-x}.$$

Для определения точек возможного экстремума решим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1 - x - y^2 = 0 \\ y = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 1$ и $y_0 = 0$.

Таким образом, функция имеет только одну стационарную точку $P_0(1;0)$.

Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки. Для этого вычислим частные производные второго порядка функции z в точке P_0:

$$A = z''_{xx}(P_0) = e^{-x}\left(x + y^2 - 2\right)\Big|_{(1;0)} = -\frac{1}{e},$$

$$B = z''_{xy}(P_0) = -2ye^{-x}\Big|_{(1;0)} = 0,$$

$$C = z''_{yy}(P_0) = 2e^{-x}\Big|_{(1;0)} = \frac{2}{e}.$$

Так как $\Delta(P_0) = AC - B^2 = -\dfrac{2}{e^2} < 0$, то в точке $P_0(1;0)$ нет экстремума, т.е. в окрестности $U(\delta; P_0)$ исследуемая функция меняет знак.

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

Решение. Вычислим частные производные первого порядка функции z:

$$z'_x = 4x^3,\ z'_y = 4y^3.$$

Решая систему уравнений $\left.\begin{aligned} z'_x &= 0 \\ z'_y &= 0 \end{aligned}\right\}$ находим стационарную точку $P_0(0;0)$ данной функции.

Исследуем знак приращения Δz в окрестности стационарной точки $P_0(0;0)$. Так как

$$A = z''_{xx}(P_0) = 0,\ B = z''_{xy}(P_0) = 0,\ C = z''_{yy}(P_0) = 0,$$

то $\Delta(P_0) = AC - B^2 = 0$. Следовательно, нельзя определенно ответить на вопрос о существовании экстремума в точке $P_0(0;0)$.

В данном случае стационарная точка $P_0(0;0)$ является точкой локального минимума, поскольку $\Delta z > 0 \quad \forall P \in \dot{U}(\delta; P_0)$; $z_{\min} = z(0,0) = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение локального экстремума функции.
2. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии локального экстремума .
3. Какие точки называются точками возможного экстремума функции?
4. Какая функция называется квадратичной формой? Что такое матрица квадратичной формы и ее главные миноры?
5. Какая квадратичная форма называется 1) положительно определенной, 2) отрицательно определенной, 3) знакоопределенной, 4) квазизнакоопределенной, 5) знакопеременной?
6. Сформулируйте критерий Сильвестра.
7. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции многих переменных $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$.
8. Сформулируйте и докажите достаточное условие экстремума функции двух переменных $z = f(x; y)$.

Лекция 10. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Неявные функции, задаваемые одним уравнением.
2. Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением.
3. Неявные функции, определяемые системой уравнений.
4. Достаточное условие независимости функций

1. Неявные функции, задаваемые одним уравнением. Известно, что функция $y = f(x)$ может быть задана неявно уравнением, связывающим переменные x и y:

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

Примеры.

1. Уравнение $x - 2y - 1 = 0$ определяет функцию $y = \frac{1}{2}(x+1)$; $D(y) = E(y) = \boldsymbol{R}$.

2. Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ выполняется только при $x = y = 0$ и задает точку $O(0;0)$.

3. Уравнение $x^2 + y^2 + 4 = 0$ не определяет никакой функции на $\boldsymbol{R}$, так как оно не имеет действительных корней, а значит, нельзя рассматривать y как функцию от x.

Итак, уравнение вида (1) не всегда задает функцию $y = f(x)$.

Возникает вопрос, при каких условиях уравнение $F(x, y) = 0$ определяет одну из переменных как функцию другой.

Теорема 1 (существование неявной функции). *Пусть функция $F(x, y) = 0$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) существует точка $P_0(x_0; y_0)$, в которой $F(x_0, y_0) = 0$;

2) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;

3) функции $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$.

Тогда существует единственная функция $y = f(x)$ определенная на некотором интервале, содержащем точку x_0, и удовлетворяющая при любом x из этого интервала уравнению $F(x, y) = 0$, такая, что $f(x_0) = y_0$.

Без доказательства.

Замечание. Условие $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ является достаточным, но необходимым условием для существования в некоторой окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$ единственной неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением (1).

Пример. Доказать, что уравнение $y^3 + 2xy + x^4 - 4 = 0$ задает неявную функцию.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x, y)$. Имеем:

1) $F(1{,}1) = 0$;

2) $F(1{,}1) = 0$; $F'_y(1{,}1) = \left(3y^2 + 2x\right)\Big|_{(1;1)} = 5 \neq 0$;

3) частные производные $F'_x = 2y + 4x^3$ и $F'_y = 3y^2 + 2x$ являются непрерывными функциями в любой окрестности точки $P(1{,}1)$.

Следовательно, существует единственная функция $y = f(x)$, удовлетворяющая уравнению $y^3 + 2xy + x^4 - 4 = 0$ и условию

$$f(1) = 1.$$

Неявная функция двух независимых переменных определяется уравнением $F(x, y, z) = 0$, связывающим три переменные. Справедлива теорема, аналогичная приведенной выше.

Теорема 2. *Пусть функция $F(x, y, z)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\exists P(x_0; y_0; z_0) : F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

2) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$;

3) $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$ *и* $F'_z(x, y, z)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_0; y_0; z_0)$.

Тогда существует единственная функция $z = f(x, y)$ определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y, z) = 0$ $\forall\, x, y \in U(\delta, P_0)$, такая, что $f(x_0, y_0) = z_0$.

Без доказательства.

2. Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением. Пусть условия 1–3 теоремы 1 выполнены и уравнение (1) определяет y как некоторую функцию от x. Если в это уравнение подставить вместо y функцию $f(x)$, то получим тождество

$$F(x, f(x)) = 0.$$

Продифференцируем данную функцию по правилу дифференцирования сложной функции:

$$F'_x \cdot 1 + F'_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Теорема 3. *Пусть 1) функция* $F(x, y) = 0$ *дифференцируема в некоторой* δ *-окрестности точки* $P_0(x_0; y_0)$*;2) частная производная* $F'_y(x, y)$ *непрерывна в точке* $P_0(x_0; y_0)$*; 3)* $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. *Тогда существует такой прямоугольник*

$$\Pi_{(P_0; d_1; d_2)} = \{(x; y) \mid |x - x_0| < d_1, |y - y_0| < d_2\} \subset \delta,$$

в котором уравнение $F(x, y) = 0$ *определяет единственную неявную функцию вида* $y = f(x)$, *причем* $f(x_0) = y_0$. *Функция* $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(x_0 - d_1; x_0 + d_1)$, *и ее производная вычисляется по формуле*

$$\frac{dy}{dx} = -\left.\frac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)}\right|_{y = f(x)} = -\frac{F'_x(x; f(x))}{F'_y(x; f(x))}.$$

Без доказательства.

Замечание. В формуле важен порядок действий при вычислении $F_x(x; f(x))$: сначала берется частная производная по x функции $F(x; y)$, а затем вместо y подставляется $f(x)$, но не наоборот.

Пример. Вычислить производную неявной функции, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

Решение. Обозначим через $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$. Имеем

$F'_x = \dfrac{2x}{a^2}$, $F'_y = \dfrac{2y}{b^2}$. Следовательно, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$.

Пусть уравнение $F(x_1; x_2; ...; x_n; y) = 0$ определяет y как некоторую функцию независимых переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Если в это уравнение вместо переменной u подставить выражение $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ получается тождество $F(x_1; x_2; ...; x_n; y(x_1; x_2; ...; x_n)) = 0$

Теорема 4. *Пусть 1) функция* $F(x_1; x_2; ...; x_n; y) = F(P)$ *дифференцируема в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0; y_0)$*; 2) частная производная* $F'_y(x_1; x_2; ...; x_n; y)$ *непрерывна в точке* $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0; y_0)$*; 3)* $F(P_0) = 0$, $F'_y(P_0) \neq 0$. *Тогда существует такой параллелепипед*

$$\Pi = \left\{ (x_1; x_2; ...; x_n; y) \,\middle|\, \left| x_i - x_i^0 \right| < d_i,\, i = 1,2,..., n, \left| y - y_0 \right| < c \right\} \subset \delta,$$

в котором уравнение $F(x_1; x_2; ...; x_n; y) = 0$ *определяет единственную неявную функцию вида* $y = f(x_1; x_2; ...; x_n)$*, причем* $f(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0) = y_0$. *Функция* $y = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ *дифференцируема при* $\left| x_i - x_i^0 \right| < d_i$, $i = 1,2,..., n$, *ее частные производные вычисляются по формулам*

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\left.\frac{F'_{x_1}}{F'_y}\right|_{y = f(x_1; x_2; ...; x_n)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -\left.\frac{F'_{x_2}}{F'_y}\right|_{y = f(x_1; x_2; ...; x_n)}, \qquad (2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_n} = -\left.\frac{F'_{x_n}}{F'_y}\right|_{y = f(x_1; x_2; ...; x_n)}.$$

Без доказательства.

Замечания. 1. Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет z как некоторую функцию $z = f(x, y)$ независимых переменных x и y. Если в это уравнение вместо z подставить $f(x, y)$ получается тождество $F(x, y, f(x)) = 0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

2. Если уравнение поверхности Q задано неявной функцией $F(x,y,z)=0$, то:

$$z'_x(x_0,y_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},$$

$$z'_y(x_0,y_0)=-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Следовательно, уравнение ***касательной*** плоскости α к поверхности имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

и каноническое уравнение ***нормали*** к поверхности принимает вид

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Пример. Найти частные производные неявной функции

$$e^{-xy}-2z+e^z=0.$$

Решение. Имеем

$$F'_x=-ye^{-xy},\ F'_y=-xe^{-xy},\ F'_z=-2+e^z.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$

Пример. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0(0;1;1)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$F'_x(x,y,z)=2x$, $F'_x(0,1,1)=0$,

$F'_y(x,y,z)=4y$, $F'_y(0,1,1)=4$,

$F'_z(x,y,z)=6z$, $F'_z(0,1,1)=6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости α имеет вид $4(y-1)+6(z-1)=0$ или $2y+3z-5=0$.

Уравнение нормали $\frac{x-0}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{6}$ или $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

3. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Рассмотрим систему из m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0, \\ F_2(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0, \\ ....\ ....\ ....\ ....\ ...., \\ F_m(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, ..., y_m есть

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1;x_2;...;x_n), \\ y_2 = f_2(x_1;x_2;...;x_n), \\ ....\ ....\ ....\ .., \\ y_m = f_m(x_1;x_2;...;x_n), \end{cases} \tag{4}$$

и называется ***совокупностью неявных функций***, определяемых системой уравнений (3).

Определитель

$$J = \frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

составленный из частных производных, называется ***определителем Якоби (якобианом)*** функций F_1, F_2, ..., F_m по переменным y_1, y_2, ..., y_m.

Теорема 5. *Пусть 1) функции F_1, F_2, ..., F_m дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки*

$$P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;y_1^0;y_2^0;...;y_m^0),$$

2) частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i,j=1,2,...,m$ *непрерывны в этой* *точке* P_0,

3) $F_1(P_0)=0$, $F_2(P_0)=0$, ..., $F_m(P_0)=0$, $\left.\dfrac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}\right|_{P_0} \neq 0$.

Тогда существует такой параллелепипед

$$\Pi = \left\{ (x_1;x_2;...;x_n;y_1;y_2;...;y_m) \left| \begin{array}{l} \left|x_i - x_i^0\right| < d_i,\ i=1,2,...,n; \\ \left|y_j - y_j^0\right| < c_j,\ j=1,2,...,m \end{array} \right. \right\} \subset \delta,$$

в котором система уравнений (3) определяет единственную совокупность неявных функций вида (4), и эти функции дифференцируемы при $\left|x_i - x_i^0\right| < d_i$, $i=1,2,...,n$.

Без доказательства.

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i}$, ..., $\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i=1,2,...,n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + ... + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \\ \text{.......... ....,} \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial x_i} + ... + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\dfrac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0, \end{cases}$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 5, якобиан отличен от нуля).

4. Достаточное условие независимости функций. Пусть n функций

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1;x_2;...;x_n), \\ y_2 = f_2(x_1;x_2;...;x_n), \\ \text{.......... ....,} \\ y_m = f_m(x_1;x_2;...;x_n) \end{cases} \tag{6}$$

определены и дифференцируемы в некоторой области $D \subset \boldsymbol{R}^n$, $m \le n$.

Определение 1. Функция $y_k = f_k(x_1;x_2;...;x_n) = f_k(P)$ называется ***зависимой*** в области D от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k = \Phi(y_1; y_2; ... y_{k-1}; y_{k+1}; ...; y_m), \qquad (7)$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Определение 2. Функции, заданные системой (6), называются ***зависимыми*** в области D, если одна из них (любая) зависит в области D от остальных функций. Если ни одна из функций (6) не зависит от остальных, то функции (6) называются ***независимыми*** в области D.

Пример. Функции

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$

$$y_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$$y_3 = 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$$

являются зависимыми, так как $y_2 = y_1^2 - y_3$.

Теорема 6 (достаточное условие независимости). *Пусть:*

1) функции (6) дифференцируемы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, 2) якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в точке P_0. Тогда эти функции независимы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.

Без доказательства.

Следствие. *Если функции (6) зависимы в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, то все якобианы $\dfrac{D(y_1; y_2; ...; y_m)}{D(x_{i_1}; x_{i_2}; ...; x_{i_n})}$ равны нулю в δ-окрестности точки $P_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$.*

Пример. Доказать, что функции $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0;0)$.

Решение. Составим якобиан функций y_1 и y_2 по переменным x_1 и x_2

$$J = \frac{D(y_1; y_2)}{D(x_1; x_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2.$$

В точке $O(0;0)$ якобиан равен нулю $\left.\dfrac{D(y_1; y_2)}{D(x_1; x_2)}\right|_{(0;0)} = 0$. Для любой точки $P(x_1; x_2)$, где $x_1 \neq x_2$, из окрестности точки $O(0;0)$

якобиан отличен от нуля $\left.\frac{D(y_1;y_2)}{D(x_1;x_2)}\right|_{P(x_1;x_2)} \neq 0$. Согласно теореме 6, функции y_1 и y_2 независимы в окрестности точки $O(0;0)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется неявной?

2. Приведите примеры неявных функций.

3. Сформулируйте теорему о существовании единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y)=0$,.

4. Сформулируйте теорему о существовании единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y;z)=0$.

5. Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x;y)=0$, $F(x_1;x_2;...;x_n)=0$.

6. Что называется якобианом функций?

7. Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

8. Дайте определение функции, зависимой от других функций в некоторой области.

9. Дайте определение зависимости и независимости функций.

10. Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.

Лекция 11. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Понятие условного экстремума.
2. Методы отыскания условного экстремума.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

1. Понятие условного экстремума. Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x;y)$. При отыскании экстремумов этой функции иногда необходимо найти их не на всей области определения $D(f)$, а только на некотором ее подмножестве, например на линии $\Gamma \subset D(f)$. Таким образом, ставится задача отыскания на линии Γ точки P_0, в которой значение функции является наибольшим или наименьшим по сравнению с ее значениями в других точках линии Γ, находящихся вблизи точки P_0.

Пример. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x + y - 1 = 0$.

Решение. Уравнение $x + y - 1 = 0$ в $\boldsymbol{R}^3$ определяет плоскость, параллельную оси Oz и пересекающую плоскость Oxy по прямой Γ.

Функция $z = x^2 + y^2$ определена на всей плоскости $\boldsymbol{R}^2$, а ее экстремумы требуется найти только среди тех точек плоскости, которые лежат на прямой Γ: $x + y - 1 = 0$. Из данного уравнения находим $y = 1 - x$. Подставляя это выражение в уравнение $z = x^2 + y^2$, получаем функцию $z = 2x^2 - 2x - 1$ одной переменной x.

Таким образом, задача свелась к задаче отыскания безусловных локальных экстремумов функции одной переменной. Найдем точки локальных экстремумов, лежащих на линии Γ. Так как $z'_x = 4x - 2$, то $x_0 = \dfrac{1}{2}$ – точка возможного экстремума. Она является точкой локального минимума, поскольку $z''(x_0) = z''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 > 0$, т.е. $z_{\min} = z\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0{,}5$. Следовательно, функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$ имеет условный локальный минимум $z=\frac{1}{2}$ в точке $P_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Из рис.1 видно, что на поверхности параболоида вращения $z=x^2+y^2$ безусловный минимум равен 0 и достигается в точке $O(0;0)$, т.е. он не совпадает с точкой $P_0\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ условного минимума, лежащей на прямой $x+y-1=0$.

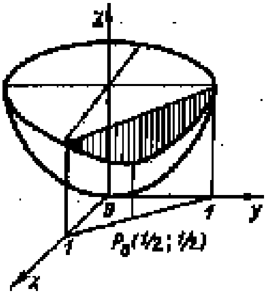


Рис.1.

Рассмотрим функцию $u=f(x_1;x_2;...;x_n)=f(P)$ при условии, что ее аргументы являются связанными между собой соотношениями

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;...x_n)=0, \\ F_2(x_1;x_2;...x_n)=0, \\ ...., \\ F_k(x_1;x_2;...x_n)=0, \end{cases} \qquad (1)$$

которые называются ***уравнениями связи.*** И пусть координаты точки $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Определение 1. Говорят, что функция $u=f(x_1;x_2;...;x_n)=f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)$ ***условный минимум (максимум)*** при условиях связи (1), если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки $P(x_1;x_2;...;x_n)\in\delta$, $P\neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (1), выполняется неравенство $f(P)>f(P_0)$ ($f(P)<f(P_0)$).

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

2. Методы отыскания условного экстремума. Метод исключения части переменных. Рассмотрим задачу отыскания условного экстремума применительно к функции двух переменных.

Пусть требуется найти локальный экстремум функции $z = f(x;y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y)=0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, т.е. выразить y как функцию x: $y = y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $z = f(x,y)$ вместо y функцию $y(x)$, получим функцию одной переменной $z = f(x,y(x))$. Вычислив значения x, при которых эта функция достигает экстремума, и, определив затем из уравнения связи соответствующие им значения y, найдем искомые точки условного экстремума. Тот же самый результат получится, если уравнение $\varphi(x,y)=0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, т.е. x выразить как функцию y.

Если условие связи (линии Γ) задается параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in T$, то, подставляя x и y в аналитическое выражение функции $z = f(x,y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной. Однако если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных и представить параметрическими уравнениями, данная задача значительно усложняется.

Метод множителей Лагранжа. Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $z = f(x;y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно x или y. Для этого используем ***метод множителей Лагранжа***.

Введем вспомогательную функцию, называемую ***функцией Лагранжа***:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y),$$

где $f(x;y)$ – заданная функция; $\varphi(x;y)$ – левая часть уравнения связи.

Теорема 1. *Пусть 1) функция* $z=f(x;y)$ *определена и дифференцируема в точке* $P_0(x_0;y_0)$ *и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи* $\varphi(x,y)=0$ *;*

2) уравнение $\varphi(x,y)=0$ *удовлетворяет в* δ*-окрестности точки* P_0 *условиям теоремы 1 (лекция 10)*

Тогда существует такое число λ*, что*

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0.$$

► Функция $z=f(x,y)$ может иметь максимум или минимум при тех значениях x, при которых производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ обращается в нуль.

Учитывая, что уравнение $\varphi(x,y)=0$ разрешимо относительно $y=y(x)$, найдем полную производную функции $z=f(x;y)$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

которая в точках экстремума обращается в нуль:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (2)$$

Продифференцировав уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ по x, получим

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

Данному равенству удовлетворяют все точки x, y, лежащие на линии Γ, задаваемой уравнением связи $\varphi(x,y)=0$. Умножив все члены этого равенства на неизвестный коэффициент λ и сложив их с соответствующими членами равенства (2), получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0\,. \qquad (3)$$

Равенство (3) выполняется во всех точках локального экстремума, лежащих на линии Γ. Подберем неопределенный множитель λ так, чтобы для значений x и y, соответствующих экстремуму функции $z=f(x;y)$, коэффициент $\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ обратился в нуль. Тогда выражение $\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ тоже обратится в нуль. Таким образом, точки локального экстремума, лежащие на линии Γ, задаваемой уравнением связи $\varphi(x,y)=0$, должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=0\,,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0\,,\\ \varphi(x,y)=0\,.\end{cases} \qquad (4)$$

Из уравнений видно, что левые части уравнений являются частными производными функции $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ по переменным x, y, λ.◄

Решив систему (4), найдем критические точки и вспомогательное число λ.

Замечание. Система уравнений (4) представляет собой необходимые условия существования условного экстремума: не всякая критическая точка $P_0(x_0;y_0)$, координаты x_0 и y_0 которой удовлетворяют системе уравнений (4), будет точкой условного экстремума. Для исследования характера критической точки требуется провести дополнительный анализ знака приращения Δz в окрестности критической точки P_0, лежащей на линии Γ.

П р а в и л о   н а х о ж д е н и я   т о ч е к   у с л о в н о г о   э к с т р е м у м а. Для того чтобы определить точки условного экстремума функции $z=f(x;y)$, удовлетворяющие уравнению связи $\varphi(x,y)=0$, необходимо:

1) составить функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$;

2) вычислить частные производные функции Лагранжа по переменным x, y, λ;

3) приравняв нулю найденные производные, составить систему уравнений (4); решив ее, можно определить координаты критических точек P возможного условного экстремума;

4) определить знак приращения Δz в окрестностях критических точек по тем точкам окрестности, которые удовлетворяют уравнению $\varphi(x,y)=0$, т.е. лежат на линии L.

Если $(\forall P\in L)\cap(P\in U(\delta;P_0))$ выполняется условие $\Delta z=f(P)-f(P)>0$, то $P_0(x_0;y_0)$ – точка условного минимума.

Если $(\forall P\in L)\cap(P\in U(\delta;P_0))$ выполняется условие $\Delta z=f(P)-f(P)<0$, то $P_0(x_0;y_0)$ – точка условного максимума.

Пример. Найти локальный минимум функции $z=x^2+y^2$ при условии, что точки $(x;y)$ лежат на прямой l, уравнение которой $x+y-1=0$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ:

$$L'_x=2x+\lambda,\ L'_y=2y+\lambda,\ L'_\lambda=x+y-1.$$

Составляем и решаем систему уравнений вида (4):

$$\left.\begin{aligned}2x+\lambda=0,\\ 2y+\lambda=0,\\ x+y-1=0.\end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0=0{,}5$, $y_0=0{,}5$, $\lambda=-1$.

Таким образом, мы нашли единственную критическую точку $P_0(0{,}5;0{,}5)\in l$. Для любой точки $P\in l$ выполняется условие $f(P_0)>f(P)$. Следовательно, точка $P_0(0{,}5;0{,}5)$ является точкой условного минимума.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $u=f(x_1;x_2;...;x_n)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда в области D она достигает своих наименьшего и наибольшего значений, причем эти значения достигаются либо внутри области D, либо на ее границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения в ограниченной замкнутой области, называются ***точками абсолютного*** или ***глобального экстремума***. Если наибольшее или наименьшее значения достигаются во внутренних точках области, то это – точки локального экстремума функции $z = f(x; y)$.Таким образом, точки, в которых функция z принимает наибольшее и наименьшее значения, являются либо точками локального экстремума, либо граничными точками области.

Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области D необходимо:

1) вычислить значения функции в точках возможного экстремума, принадлежащих области D,

2) найти наибольшее и наименьшее значения на ее границе,

3) сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Предположим, что граница области D задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на границе области D сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений (абсолютного экстремума) функции одной переменной, так как уравнение границы области D связывает переменные x и y между собой. Значит, если разрешить это уравнение относительно одной из переменных или представить его в параметрическом виде и подставить выражения $x = x(t)$, $y = y(t)$ в уравнение $z = f(x, y)$, то придем к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной. Если же уравнение $\varphi(x, y) = 0$ нельзя разрешить ни относительно x, ни относительно y, а также невозможно представить его параметрическими уравнениями, то задача сводится к отысканию условного экстремума.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области D, ограниченной осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \ge 0$ (рис.2).

Решение. Определим критические точки, лежащие внутри области D (на рис.2. она заштрихована). Для этого вычислим частные производные: $z'_x = 6x^2 - 6y$, $z'_y = -6x + 6y$. Приравняв их нулю, составим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{r} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0. \end{array}\right\}$$

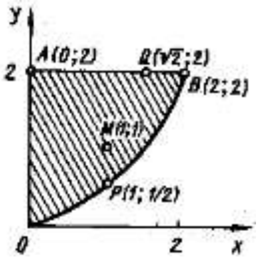


Рис.2.

Решив ее, найдем две критические точки: $O(0;0)$ и $M(1;1)$, в которых обе частные производные равны нулю. Точка $O(0;0)$ принадлежит границе области D. Следовательно, если функция z принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то этой точкой может быть только $M(1;1)$.

Исследуем функцию на границе области.

На отрезке OA $x = 0$ и, следовательно, $z = 3y^2$ ($0 \le y \le 2$). Функция $z = 3y^2$ является возрастающей функцией одной переменной y на отрезке $[0;2]$, наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка OA.

На отрезке AB $y = 2$, и поэтому здесь функция $z = 2x^2 - 12x + 12$ ($0 \le x \le 2$) представляет собой функцию одной переменной x. Ее глобальные экстремумы находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка. Находим частную производную $z'_x = 6x^2 - 12$. Решаем уравнение $z'_x = 0$ (или $6x^2 - 12 = 0$), откуда $x = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ имеется лишь одна критическая точка $x=\sqrt{2}$, на отрезке AB ей соответствует точка $Q\left(\sqrt{2};2\right)$.

Итак, глобальные экстремумы функции z на отрезке AB могут достигаться среди ее значений в точках A, Q и B.

На дуге параболы $y=\dfrac{1}{2}x^2$ имеем

$$z=2x^3-6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)+3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2=\frac{3}{4}x^4-x^3 \text{ при } 0\le x\le 2.$$

Решая уравнение

$$z'_x=3x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0,$$

находим критические точки $O(0;0)$ и $P\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т.е. среди значений

$z(O)=z(0;0)=0$, $\quad z(B)=z(2;2)=4$,

$z(A)=z(0;2)=12$, $\quad z(P)=z(1;1/2)=-\dfrac{1}{4}$,

$z(Q)=z\left(\sqrt{2};2\right)=12-8\sqrt{2}$, $\quad z(M)=z(1;1)=-1$.

Откуда $\max\limits_D z=z(A)=12$, $\min\limits_D z=z(M)=-1$.

Таким образом, точка A является точкой глобального максимума, а точка M – точкой глобального минимума данной функции в рассматриваемой замкнутой области D.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение условного экстремума функции.
2. Объясните, в чем состоит метод исключения части переменных.
3. Что такое функция Лагранжа? Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума.
4. Объясните, как исследовать точку возможного условного экстремума, найденную методом Лагранжа.

5. Как найти глобальные экстремумы функции двух переменных?

Тема 2
КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

1. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла первого рода.
2. Определение и свойства криволинейного интеграла первого рода.
3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.
4. Приложения криволинейного интеграла первого рода.

1. Задачи, приводящие к понятию криволинейного интеграла первого рода.

Задача о массе материальной линии. Пусть вдоль некоторой гладкой кривой AB распределена масса с переменной плотностью $\rho = \rho(x; y)$. Требуется определить массу m дуги AB.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < \ldots < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n.

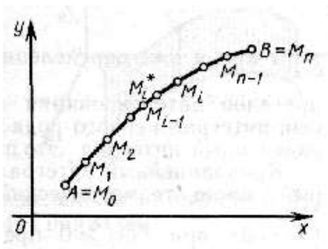


Рис.1. Задача о массе материальной линии

Будем считать, что на каждой частичной дуге плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i; \eta_i)$, где $C_i(\xi_i; \eta_i)$ – произвольная точка частичной области. Тогда масса части l_i приблизительно равна

$$m_i \approx \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta l_i,$$

а масса всей дуги AB

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta l_i \ . \tag{1}$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$. Сумма (1) тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением массы всей дуги AB можно считать

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta l_i \ . \tag{2}$$

З а д а ч а о п л о щ а д и ц и л и н д р и ч е с к о й п о в е р х н о с т и. Пусть в плоскости Oxy задана некоторая гладкая кривая AB, которая является областью определения некоторой функции $z = f(x;y)$, причем $\forall M(x;y) \quad f(M) \ge 0$. Тогда точки $(x;y;f(M))$ в совокупности представляют собой некоторую пространственную кривую. Требуется найти площадь цилиндрической поверхности, для которой AB – образующая, направляющие параллельны оси Oz, ограниченной сверху $z = f(x;y)$, снизу кривой AB, с боков прямыми.

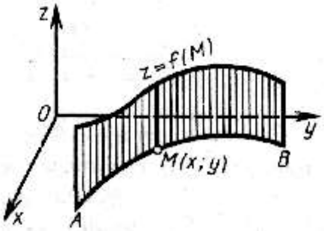


Рис.2. Цилиндрическая поверхность

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Из каждой точки разбиения M_0, M_1, ..., M_n проведем перпендикуляры к плоскости Oxy высотой $f(M_i)$, $i = 1,2,...,n$. В результате вся цилиндрическая поверхность разобьется на n полосок. На каждой частичной дуге l_i возьмем точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Каждую полоску заменим прямоугольником, у которого Δl_i – основание, $f(\xi_i;\eta_i)$ – высота. Тогда площадь каждой полоски приблизительно будет равна

$$S_i \approx f(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta l_i \ ,$$

а площадь всей цилиндрической поверхности

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i;\eta_i\right)\cdot \Delta l_i \; . \qquad (3)$$

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. Сумма (3) тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением площади всей цилиндрической поверхности можно считать

$$S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i;\eta_i\right)\cdot \Delta l_i \; . \qquad (4)$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

Напоминание: Кривая, заданная уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где $\alpha \le t \le \beta$, называется ***гладкой***, если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $x'(t)$ и $y'(t)$, не обращающиеся одновременно в нуль, $x'^2(t) + y'^2(t) \ne 0$. Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кривых, называется ***кусочно-гладкой***.

Рассмотрим на плоскости Oxy гладкую или кусочно-гладкую кривую AB, и предположим, что функция $z = f(x;y)$ определена и ограничена на кривой AB.

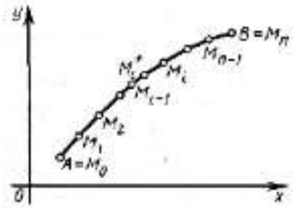


Рис.3. Разбиение кривой

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге l_i, $i = 1,2,..., n$ точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$.

Определение 1. Сумма

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;)\cdot\Delta l_i \tag{5}$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x;y)$, определенной на дуге AB.

Обозначим $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta l_i$

О п р е д е л е н и е 2. ***Криволинейным интегралом первого рода*** называется предел (если он существует) интегральной суммы (5) при $\lambda\to 0$:

$$I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;)\cdot\Delta l_i$$

Обозначается: $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$.

Подынтегральная функция $f(x;y)$ называется ***интегрируемой*** вдоль кривой AB, сама кривая AB – ***контуром интегрирования***, A и B – ***начальной*** и ***конечной*** точками интегрирования, dl – дифференциал дуги.

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 1-го рода). *Если функция $f(x;y)$ непрерывна в каждой точке гладкой кривой AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ существует, и его величина не зависит от способа разбиения кривой на части, и выбора точек в них.*

Криволинейный интеграла 1-го рода обладает следующими **свойствами**.

1. $\int\limits_{AB} dl=L$, где L – длина дуги AB.

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на дуге AB, то функция $\alpha\cdot f(x;y)+\beta\cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на дуге AB и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB}(\alpha f(x;y)+\beta g(x;y))dl=\alpha\int\limits_{AB} f(x;y)dl+\beta\int\limits_{AB} g(x;y)dl.$$

3 (аддитивность). Если дуга AB состоит из двух частей AC и CB, $AB=AC\cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на дуге AB и справедлива формула

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{AC} f(x;y)dl + \int\limits_{CB} f(x;y)dl .$$

4 (оценка интеграла). Если на дуге AB имеет место неравенство $|f(x;y)| \le M$, то

$$\left|\int\limits_{AB} f(x;y)dl\right| \le M \cdot L ,$$

где L – длина дуги AB.

5 (монотонность.) Если для точек кривой AB выполнено неравенство $f(x;y) \ge g(x;y)$,

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl \ge \int\limits_{AB} g(x;y)dl .$$

6. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления обхода дуги AB, т.е.

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{BA} f(x;y)dl .$$

3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования. Пусть плоская кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta],$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцированные функции параметра t, причём точке A соответствует $t = \alpha$, точке B – значение $t = \beta$.

Известно, что переменная длина дуги $l = l(t)$, отсчитываемая от начала кривой AB, является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра t и

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} .$$

При этом дифференциал длины дуги равен:

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

Тогда криволинейный интеграл вычисляется по формуле:

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t);y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt .$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dl$, где кривая AB есть

$$AB = \left\{ (x;y) \middle| x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их параметрические представления, имеем

$$y^2 = a^2 \sin^2 t\,,\ x' = -a\sin t\,,\ y' = a\cos t\,,$$

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a\,dt\,.$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} y^2 dl = \int\limits_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t \cdot a\,dt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{a^3\pi}{4}\,.$$

Полярное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана в полярных координатах уравнением

$$r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta\,,$$

и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha;\beta]$.

Декартовы и полярные координаты связаны между собой соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi, \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\},\ \forall\varphi \in [\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой и для вычисления дифференциала дуги можно применить формулу $dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$. Найдем производные от x и y по параметру φ:

$$\left.\begin{aligned} x'_\varphi &= r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y'_\varphi &= r'\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = r^2 + (r')^2$

Следовательно, $dl=\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$.

Тогда существуют интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ и имеет место равенство

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi)\cos\varphi;r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi .$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x+y)dl$, где кривая AB есть

$$AB=\left\{(x;y)\middle|\, x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r=\sqrt{\sin 2\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их представления в полярных координатах, имеем:

$$dl=\sqrt{\sin 2\varphi+\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi=\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{d\varphi}{r} .$$

Тогда

$$\int\limits_{AB}(x+y)dl=\int\limits_{0}^{\pi/2}(r\sin\varphi+r\cos\varphi)\frac{d\varphi}{r}=\int\limits_{0}^{\pi/2}(\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi=2 .$$

Явное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана уравнением

$$y=y(x),\ a\le x\le b ,$$

и $y(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a;b]$.

Рассматривая переменную x как параметр, дифференциал дуги примет вид $dl=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$. Тогда существует интеграл $\int\limits_{AB} f(x;y)dl$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{AB} f(x;y)dl=\int\limits_{a}^{b} f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx .$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} ydl$, где кривая AB есть

$AB=\{(x;y)|\,y^2=2x$ от точки $O(0;0)$ до точки $M(2;2)\}$.

Решение. Имеем

$$y=\sqrt{2x}\ ,\ y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}\ ,\ dl=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx\ .$$

Тогда

$$\int\limits_{AB} ydl=\int\limits_0^2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}dx=\int\limits_0^2\sqrt{2x+1}dx=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Замечание. Аналогично определяется криволинейный интеграл 1-го рода для функции 3-х переменных по пространственной дуге AB:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl\ .$$

Для вычисления криволинейного интеграла 1-го рода от функции $u=f(x;y;z)$ по пространственной кривой AB, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, справедлива формула:

$$\int\limits_{AB} f(x;y;z)dl=\int\limits_\alpha^\beta f\left(x(t);y(t);z(t)\right)\cdot\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt\ .$$

4. Приложения криволинейного интеграла первого рода.

1. Длина кривой. Длина L кривой AB плоской или пространственной линии вычисляется по формуле

$$L=\int\limits_{AB} dl\ .$$

2. Площадь цилиндрической поверхности. Пусть направляющей цилиндрической поверхности служит кривая AB, лежащая в плоскости Oxy, а образующая параллельна оси Oz. Тогда площадь поверхности, задаваемой функцией $z=f(x;y)$, находится по формуле

$$S=\int\limits_{AB} f(x;y)dl\ .$$

3. Масса материальной кривой. Масса материальной кривой AB переменной плотности $\rho=\rho(x;y)$ определяется формулой

$$m = \int\limits_{AB} \rho(x;y)dl.$$

4. Статические моменты. Статические моменты материальной кривой AB относительно осей Ox и Oy определяются по формулам

$$M_x = \int\limits_{AB} y\rho(x;y)dl, \qquad M_y = \int\limits_{AB} x\rho(x;y)dl.$$

5 .Координаты центра тяжести. Координаты центра тяжести материальной кривой AB определяются по формулам

$$x_0 = \frac{M_y}{m}, \qquad y_0 = \frac{M_x}{m}.$$

6. Моменты инерции. Для материальной кривой AB моменты инерции относительно осей Ox и Oy определяются по формулам

$$I_x = \int\limits_{AB} y^2\rho(x;y)dl, \qquad I_y = \int\limits_{AB} x^2\rho(x;y)dl,$$

а момент инерции относительно начала координат $O(0;0)$

$$I_0 = \int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right)\rho(x;y)dl.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачу о массе плоской кривой?
2. Сформулируйте задачу о площади цилиндрической поверхности?
3. Какая кривая называется гладкой и кусочно-гладкой?
4. Что называется интегральной суммой для функции $f(x;y)$, определенной на дуге AB?
5. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода.
6. Перечислите свойства криволинейного интеграла первого рода. Что общего и какие различия между свойствами криволинейного интеграла 1-го рода и определенного интеграла?
7. Как вычисляется криволинейного интеграла первого рода с помощью определенного в случае задания плоской кривой 1) в параметрическом виде; 2) в полярных координатах; 3) в явном виде?
8. Какие геометрические и физические приложения криволинейного интеграла первого рода?

Лекция 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

1. Задача о работе переменной силы.
2. Определение и свойства криволинейного интеграла второго рода.
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
4. Приложения криволинейного интеграла второго рода.

1. Задача о работе переменной силы. Пусть материальная точка под действием переменной силы $\vec{F}$ перемещается в плоскости Oxy вдоль некоторой кривой AB от точки A до точки B. Требуется найти работу силы $\vec{F}$.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < \ldots < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n.

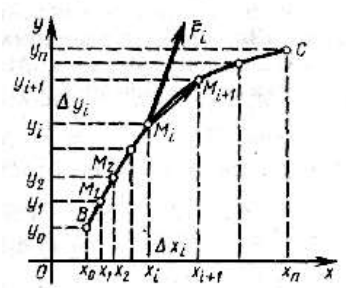


Рис.1. Задача о работе переменной силы

В виду малости дуги l_i, будем считать:

1) вектор силы перемещения $\vec{F}$ сохраняет на дуге $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ постоянное значение $\vec{F_i} = \vec{F}\left(P(\xi_i;\eta_i);Q(\xi_i;\eta_i)\right)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i)$ – произвольная точка дуги l_i, $P(\xi_i;\eta_i)$ и $Q(\xi_i;\eta_i)$ – проекции вектора $\vec{F_i}$ на оси Ox и Oy,

2) дуга $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ может быть заменена вектором $\overline{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i;\Delta y_i)$, где Δx_i Δy_i – проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси, $i = 1,2,..., n$.

Тогда работа A силы $\vec{F}$ на элементе дуги $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ приблизительно равна скалярному произведению векторов $\vec{F}_i$ и $\overline{M_{i-1}M_i}$, т.е. $A_i \approx \vec{F}_i \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$ или в координатной форме

$$A_i \approx P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i . \qquad (1)$$

Работа A силы $\vec{F}$ вдоль всей дуги AB

$$A \approx \sum_{i-1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i . \qquad (2)$$

Обозначим наибольшую из длин Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n как $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. Сумма (2) тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением работы A силы $\vec{F}$ всей дуги AB можно считать

$$A = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i . \qquad (3)$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла второго рода. Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены в каждой точке кривой AB. Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$, $i = 1,2,..., n$, точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Проекциями дуги $l_i = M_{i-1}M_i$ на оси Ox и Oy являются Δx_i и Δy_i.

Определение 1. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i;)\cdot \Delta x_i \qquad (3)$$

называется ***интегральной суммой по переменной*** x для функции $P(x;y)$; сумма

$$\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i;)\cdot \Delta y_i \qquad (4)$$

называется ***интегральной суммой по переменной*** y для функции $Q(x;y)$.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$.

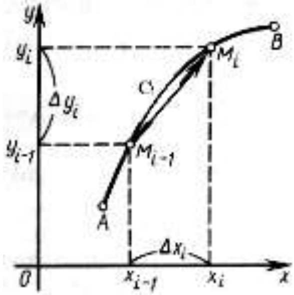


Рис.2. Определение криволинейного интеграла второго рода

О п р е д е л е н и е 2. ***Криволинейным интегралом по координате*** x ***по кривой*** AB от функции $P(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (3) при $\lambda \to 0$.

Обозначается:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i \qquad (5)$$

Криволинейным интегралом по координате y ***по кривой*** AB от функции $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (4) при $\lambda \to 0$.

Обозначается:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i\ . \qquad (6)$$

О п р е д е л е н и е 3. ***Криволинейным интегралом второго рода по кривой*** AB от функций $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$$

при $\lambda \to 0$.

Обозначается:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i; \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i; \eta_i) \Delta y_i = \int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy . \quad (7)$$

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 2-го рода). *Если кривая AB гладкая, а функции $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ непрерывны на кривой AB, то криволинейный интеграл второго рода существует.*

Без доказательства.

Пусть AB – ***замкнутая кривая (замкнутый контур)***, т.е. точка A совпадает с точкой B. Тогда для нее можно определить два направления обхода от точки A к точке B.

О п р е д е л е н и е 4. Направление обхода замкнутой кривой Γ называется ***положительным***, если область, лежащая внутри этого контура остается слева по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление называется ***отрицательным***.

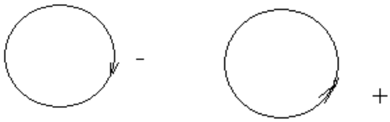


Рис.3. Ориентация кривой

Интеграл по замкнутому контуру Γ в положительном направлении обозначается как

$$\oint_{L} P(x; y) dx + Q(x; y) dy . \quad (8)$$

Ниже приведены основные **свойства** криволинейного интеграла второго рода.

1. Криволинейный интеграл второго рода можно записать в виде

$$\int_{AB} P(x; y) dx + Q(x; y) dy = \int_{AB} P(x; y) dx + \int_{AB} Q(x; y) dy .$$

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $P_1(x; y)$ и $P_2(x; y)$ интегрируемы на дуге AB по переменной x, то функция $\alpha \cdot P_1(x; y) + \beta \cdot P_2(x; y)$ также интегрируема на дуге AB по переменной x и справедливо равенство

$$\int_{AB} (\alpha P_1(x; y) + \beta P_2(x; y)) dx = \alpha \int_{AB} P_1(x; y) dx + \beta \int_{AB} P_2(x; y) dx .$$

Аналогично по переменной y.

3 (аддитивность). Если дуга AB состоит из двух частей AC и CB, $AB = AC \cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ интегрируемы, то функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ также интегрируемы на дуге AB и справедлива формула

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy =$$

$$= \int_{AC} P(x;y)dx + Q(x;y)dy + \int_{CB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy .$$

4 (ориентированность). При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак на противоположный:

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = -\int_{BA} P(x;y)dx + Q(x;y)dy .$$

5. Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int\limits_{AB} P(x;y)dx = 0$; если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oy, то $\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = 0$.

6. Интеграл по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем начальной точке A соответствует значение параметра $t = \alpha$, а конечной точке B – $t = \beta$. И пусть функция $P(x;y)$ непрерывна на кривой AB. Тогда, по определению 2, имеем

$$\int_{AB} P(x;y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i \ .$$

Так как

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}),$$

то по формуле Лагранжа имеем

$$\Delta x_i = x'(c_i)\Delta t_i$$

где $c_i \in (t_{i-1};t_i)$ и $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

Выберем точку $(\xi_i;\eta_i)$ так, чтобы $\xi_i = x(c_i)$ и $\eta_i = y(c_i)$. Тогда преобразованная интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} P(x(c_i);y(c_i))x'(c_i)\Delta t_i$$

является интегральной суммой для функции одной переменной $P(x(t);y(t))x'(t)$ на промежутке $[\alpha;\beta]$. Потому

$$\int_{AB} P(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t);y(t))x'(t)dt \ . \qquad (9)$$

Аналогично получаем

$$\int_{AB} Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t);y(t))y'(t)dt \ . \qquad (10)$$

Складывая равенства (9) и (10), имеем

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)\right]dt \ .$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{AB} xdx + xydy$ по кривой AB:

$$AB = \left\{(x;y)\middle| x^2 + y^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

Решение. Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$$

где $r = 1$ и $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Точке A соответствует значение параметра $t = 0$, а точке B – значение $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Имеем $x'(t) = -\sin t$ и $y'(t) = \cos t$. Подставим в формулу (10)

$$\int\limits_{AB} xdx + xydy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\cos t \cdot \sin t + \cos t \cdot \sin t \cdot \cos t\right]dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t dt = \left.\frac{\cos^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Явное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a;b]$, где функции $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то, принимая x за параметр, имеем параметрические уравнения кривой AB:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \end{cases}$$

где $x \in [a;b]$.

Тогда получим:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_a^b \left[P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x)\right]dx. \quad (11)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} (x^2 + y)dx + xydy$ по кривой AB, где (рис.4)

1) $AB = \left\{(x;y) \middle| y = x, 0 \le x \le 1\right\}$,
2) $AB = \left\{(x;y) \middle| y = x^2, 0 \le x \le 1\right\}$,
3) AB ломаная, проходящая через точки $A(0;0), C(1;0), B(1;1)$.

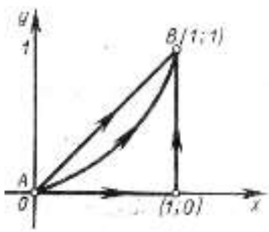


Рис.4.

Решение. По формуле (11) имеем

1. $$\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x, \\ y'=1, \\ 0\le x\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1\left(x^2+x+x\cdot x\cdot 1\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2x^2+x\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}.$$

2. $$\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x^2, \\ y'=2x, \\ 0\le x\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1\left(x^2+x^2+x^2\cdot x\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2x^2+2x^4\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15}.$$

3. $$\int\limits_{AB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=\int\limits_{AC}\left(x^2+y\right)dx+xydy+\int\limits_{CB}\left(x^2+y\right)dx+xydy=$$

$$=\begin{bmatrix} AC: y=0,\ 0\le x\le 1, \\ CB: x=1,\ 0\le y\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1\left(x^2+0\right)dx+\int\limits_0^1(1+y)\cdot 0+1\cdot ydy=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

Теорема 2 (связь между криволинейными интегралами первого и второго рода). *Пусть 1) кусочно-гладкая кривая* AB, *лежит в плоскости* Oxy *и задана уравнениями* $x=x(t)$, $y=y(t)$, *где функции* $x(t)$ *и* $y(t)$ *непрерывны вместе со своими производными* $x'(t)$ *и* $y'(t)$ *на отрезке* $[\alpha;\beta]$, *причем* $A(x(\alpha);y(\alpha))$, $B(x(\beta);y(\beta))$; *2) функции* $P(x;y)$ *и* $Q(x;y)$ *кусочно-непрерывны вдоль кривой* AB; *3) вектор* $\vec{\tau}=(\cos\alpha;\cos\beta)$, *единичный касательный вектор к кривой* AB *в точке* $M(x;y)$, *где* α *и* β *углы, составляемые с осями координат, причем направление вектора* $\vec{\tau}$ *соответствует направлению движения от точки* A *к точке* B. *Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int\limits_{AB}\left(P(x;y)\cos\alpha+Q(x;y)\cos\beta\right)dl. \quad (12)$$

► Обозначим α и β углы, составляемые с осями координат касательной к кривой AB в точке $M(x;y)$ (рис.5).

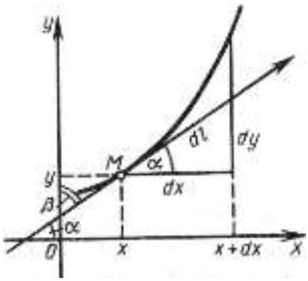


Рис.5. Связь криволинейных интегралов 1-го и 2-го родов

Тогда получим соотношения $dx = \cos\alpha dl$, $dy = \cos\beta dl$. Заменяя в криволинейном интеграле 2-го рода dx и dy их выражениями, получим

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{AB} \left(P(x;y)\cos\alpha + Q(x;y)\cos\beta\right)dl . \blacktriangleleft$$

Замечания. 1. Данная теорема выражает криволинейный интеграл второго рода через криволинейный интеграл первого рода и устанавливает связь между ними. При изменении направления движущейся точки по кривой на противоположное значения $\cos\alpha$, $\cos\beta$, dx и dy меняют знак. Поэтому формула (13) остается в силе.

2. Для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $A(x(\alpha);y(\alpha);z(\alpha))$, $B(x(\beta);y(\beta);z(\beta))$, аналогично вводится интеграл 2-го рода

$$\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz .$$

При этом формула, выражающая связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода имеет вид

$$\int_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$

$$= \int_{AB} \left(P(x;y;z)\cos\alpha + Q(x;y;z)\cos\beta + R(x;y;z)\cos\gamma\right)dl,$$

где $\vec{\tau} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y;z)$, α, β, γ углы, составляемые с осями координат, причем направление вектора $\vec{\tau}$ соответствует направлению движения от точки A к точке B.

4. Приложения криволинейного интеграла второго рода.

1. Работа силы. Пусть материальная точка под действием переменной силы $\vec{F}$ перемещается в плоскости Oxy вдоль некоторой кривой AB от точки A до точки B. Тогда работа силы $\vec{F}$ равна

$$A = \int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy,$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси.

2. Площадь фигуры. Площадь S области G, ограниченной контуром Γ, можно вычислить по одной из следующих формул

$$S = \oint_{\Gamma} xdy, \qquad S = -\oint_{\Gamma} ydx, \qquad S = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} xdy - ydx.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая задача приводит к определению криволинейного интеграла второго рода?

2. Сформулируйте определения: а) интегральных сумм для криволинейного интеграла второго рода; б) криволинейного интеграла второго рода.

3. Перечислите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.

4. Как вычисляется криволинейный интеграл второго рода в случае параметрического задания кривой интегрирования и в случае явного задания?

5. Сформулируйте теорему, выражающую связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.

Тема 3
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
Лекция 1. МЕРА ЖОРДАНА В $\boldsymbol{R}^n$

1. Клетки и клеточные множества в $\boldsymbol{R}^n$.
2. Множества измеримые по Жордану.
3. Критерий измеримости множества в $\boldsymbol{R}^n$.
4. Разбиение измеримых множеств.

1. Клетки и клеточные множества в $\boldsymbol{R}^n$.

Определение 1. ***Клетками*** в $\boldsymbol{R}$ называются промежутки, точки и пустое множество Ø. Если клетка I есть *промежуток*, то ее ***мера*** есть число $m(I)$, равное длине промежутка I. Если клетка I есть *точка* или *пустое множество*, то $m(I)=0$.

Пусть I_1, I_2, ..., I_n — клетки в $\boldsymbol{R}$.

Определение 2. Множество точек $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ называется ***клеткой*** в $\boldsymbol{R}^n$. ***Мерой*** $m(\Pi)$ клетки Π называется произведение мер клеток I_k:

$$m(\Pi) = m(I_1)\cdot m(I_2)\cdot \ldots \cdot m(I_n) = \prod_{k=1}^{n} m(I_k).$$

Здесь «$\times$» обозначает декартово произведение множеств.

Ниже приведены **свойства** клеток.

1. Если хотя бы одна из клеток I_1, I_2, ..., I_n – пустое множество то и клетка $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ есть пустое множество (пустая клетка) и $m(\Pi)=0$. Если хотя бы одна из клеток I_1, I_2, ..., I_n есть точка в $\boldsymbol{R}$, то $m(\Pi)=0$. Если все клетки I_1, I_2, ..., I_n являются точками в $\boldsymbol{R}$, то и Π есть точка в $\boldsymbol{R}^n$ и $m(\Pi)=0$. Если $m(\Pi)>0$, то все клетки I_1, I_2, ..., I_n являются промежутками в $\boldsymbol{R}$ и $m(I_k)>0$, $k=1,2,\ldots,n$.

2. Отрезки, точки и пустое множество являются замкнутыми множествами в $\boldsymbol{R}$ (замкнутыми клетками). Замыкание любой клетки в $\boldsymbol{R}$ есть замкнутая клетка.

3. Интервалы и пустое множество являются открытыми множествами в $\boldsymbol{R}$ (открытыми клетками). Внутренность любой клетки в $\boldsymbol{R}$ есть открытая клетка.

4. Пересечение двух клеток в $\boldsymbol{R}$ есть клетка. Разность двух клеток в $\boldsymbol{R}$ есть объединение не более чем двух непересекающихся клеток.

5. Для любой клетки $I \subset \boldsymbol{R}$ справедливы равенства $m(I) = m(I^\circ) = m(\bar{I})$, где I° – внутренность клетки I, а $\bar{I}$ – замыкание клетки I в $\boldsymbol{R}$.

6. Для любой клетки $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ справедливы соотношения:

$$\Pi^\circ = I_1^\circ \times I_2^\circ \times \ldots \times I_n^\circ,\ \overline{\Pi} = \bar{I}_1 \times \bar{I}_2 \times \ldots \times \bar{I}_n,\ m(\Pi) = m(\Pi^\circ) = m(\overline{\Pi}).$$

7. Если Π и Θ клетки в $\boldsymbol{R}^n$ и $\Pi \subset \Theta$, то $m(\Pi) < m(\Theta)$.

8. Если I_1, J_1, I_2, J_2, ..., I_n, J_n клетки в $\boldsymbol{R}$, $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ и $\Theta = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$, то $\Pi \cap \Theta$ есть клетка в $\boldsymbol{R}^n$, причем

$$\Pi \cap \Theta = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n) |\ x_1 \in I_1 \cap J_1, \ldots, x_n \in I_n \cap J_n\}.$$

9. Если клетка I есть промежуток в $\boldsymbol{R}$ с концами a и b, то граница клетки $\partial I = \{a; b\}$. Если клетка $I \subset \boldsymbol{R}$ есть точка или пустое множество, то $\partial I = I$.

10. Пусть совокупность клеток $\{I_1; I_2; \ldots; I_t\}$ есть разбиение клетки $I \subset \boldsymbol{R}$. Тогда

$$m(I) = m(I_1) + m(I_2) + m(I_t).$$

11. Пусть совокупность клеток $\{I_1; I_2; \ldots; I_t\}$ есть разбиение клетки $I \subset \boldsymbol{R}$, а совокупность клеток $\{J_1; J_2; \ldots; J_p\}$ есть разбиение клетки $J \subset \boldsymbol{R}$. Тогда совокупность клеток $\{\Pi_{ij} = I_i \times J_j\}$, $i = 1,2,\ldots,t$, $j = 1,2,\ldots,p$, есть разбиение клетки $\Pi = I \times J$, причем $m(\Pi) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{p} m(\Pi_{ij})$. Такое разбиение клетки называется ***стандартным***.

12. Если совокупность клеток $\{\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_p\}$ есть разбиение клетки $\Pi \subset \boldsymbol{R}^2$, то $m(\Pi) = \sum_{i=1}^{p} m(\Pi_i)$.

Аналогично строится стандартное разбиение клетки в $\boldsymbol{R}^n$.

Пример. Разбиение клетки Π в пространстве $\boldsymbol{R}^2$ изображено на рисунке 1.

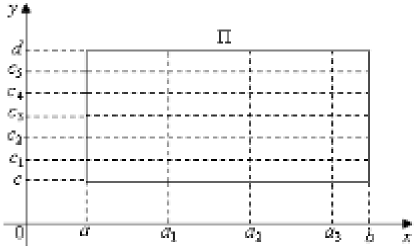


Рис.1.Разбиение клетки

О п р е д е л е н и е 3. Множество $A \subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***клеточным***, если это множество можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся клеток $\{\Pi_1, \Pi_2, ..., \Pi_s\}$. ***Мерой*** множества A называется число

$$m(A) = \sum_{k=1}^{s} m(\Pi_k).$$

Клеточные множества обладают следующими **свойствами**.

1. Мера клеточного множества не зависит от способа разбиения этого множества на клетки.

2. Если клеточные множества A и B не пересекаются, то объединение $A \cup B$ есть клеточное множество и

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B).$$

3. Если A и B являются клеточными множествами в $\boldsymbol{R}$, то $A \times B$ есть клеточное множество в $\boldsymbol{R}^2$.

4. Декартово произведение n клеточных множеств в $\boldsymbol{R}$ является клеточным множеством в $\boldsymbol{R}^n$.

5. Разность двух клеточных множеств в $\boldsymbol{R}^n$ есть клеточное множество.

6. Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.

7. Если A и B – клеточные множества и $A \subset B$, то

$$m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \text{ и } m(B) > m(A).$$

8. Если A_1, A_2, ..., A_p — клеточные множества, то

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{p} m(A_k).$$

2. Множества измеримые по Жордану.

Определение 4. Множество $Q \subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***измеримым по Жордану***, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два клеточных множества A и B такие, что $A \subset Q \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$.

Определение 5. ***Мерой*** измеримого по Жордану множества Q называется такое число $m(Q)$, что для любых двух клеточных множеств A и B, удовлетворяющих условию $A \subset Q \subset B$, выполнено неравенство $m(A) \le m(Q) \le m(B)$.

Лемма 1. *Для любого измеримого по Жордану множества Q существует и единственно число $m(Q)$, причем*

$$m(Q) = \sup_{A \subset Q} m(A) = \inf_{B \supset Q} m(B).$$

Без доказательства.

Определение 6. Будем говорить, что множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$ имеет жорданову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется клеточное множество B такое, что $E \subset B$ и $m(B) < \varepsilon$.

Множества жордановой меры нуль обладают следующими **свойствами.**

1. Множество E меры нуль измеримо по Жордану и $m(E) = 0$.

2. Объединение двух множеств (конечного числа множеств) меры нуль есть множество меры нуль.

3. Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

4. Если связное множество $A \subset \boldsymbol{R}^n$ не содержит ни одной граничной точки множества $B \subset \boldsymbol{R}^n$, то $A \subset B^\circ$ или $A \subset \left(\boldsymbol{R}^n \setminus \overline{B}\right)$.

3. Критерий измеримости множества в $\boldsymbol{R}^n$.

Теорема 1 (критерий измеримости множества в $\boldsymbol{R}^n$). *Для того чтобы множество $Q \subset \boldsymbol{R}^n$ было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным, а его граница ∂Q имела жорданову меру нуль.*

►*Необходимость*. Пусть множество Q измеримо по Жордану. Покажем, что его граница ∂Q имеет жорданову меру нуль.

Из измеримости Q следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные множества A и B такие, что $A \subset Q \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что A есть открытое клеточное множество, а B замкнутое клеточное множество. В самом деле, если $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Pi_k$ и $B = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Pi'_k$, то отбрасывая у всех клеток Π_k их границы, получаем открытое клеточное множество A°, причем $m\left(A^\circ\right) = m(A)$. Присоединяя ко всем Π'_k их границы, получаем замкнутое множество $\overline{B}$, которое будет клеточным как объединение конечного числа клеток, причем $m\left(\overline{B}\right) = m(B)$. Но $A^\circ \subset Q \subset \overline{B}$ и множество A° не имеет общих точек с ∂Q, а множество $\overline{B}$ содержит ∂Q. Поэтому $C = \overline{B} \setminus A^\circ$ есть клеточное множество такое, что

$$\partial Q \subset C,\ m(C) = m\left(\overline{B}\right) - m\left(A^\circ\right) < \varepsilon .$$

В силу произвольности ε множество ∂Q имеет жорданову меру нуль. Так как $Q \subset B$, то Q – ограничено.

Достаточность. Пусть $m(\partial Q) = 0$ и Q – ограниченное множество в $\boldsymbol{R}^n$. Заключим множество Q в клетку Π. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим клеточное множество C такое, что $\partial Q \subset C$ и $m(C) < \varepsilon$. Тогда $\Pi \setminus C$ является клеточным множеством, не содержащим граничных точек множества Q.

Пусть $\Pi \setminus C = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Pi_k$. Так как клетка Π_k не содержит граничных точек множества Q, то в силу свойства 4 либо $\Pi_k \cap Q = \varnothing$, либо $\Pi_k \subset Q$. Занумеруем клетки Π_k в таком порядке, что Π_1, ..., $\Pi_l \subset Q$, а Π_{l+1}, ..., Π_N имеют с Q пустое пересечение.

Обозначим $A = \bigcup\limits_{k=1}^{l} \Pi_k$, $B = A \cup C = \Pi \setminus \left(\bigcup\limits_{k=l+1}^{N} \Pi_k \right)$. Тогда $A \subset Q \subset B$ и $m(B) - m(A) = m(C) < \varepsilon$. Следовательно, множество Q измеримо по Жордану. ◄

Ниже приведены **свойства** меры Жордана.

1 (неотрицательность меры).. Для любого измеримого множества $Q \subset \boldsymbol{R}^n$ всегда $m(Q) \geq 0$.

2. Если множества Q_1 и Q_2 измеримы по Жордану, то $Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 \cap Q_2$, $Q_1 \setminus Q_2$ измеримы по Жордану.

3 (полуаддитивность меры). Если множества Q_1, Q_2, ..., Q_n измеримы по Жордану, то и множество $\bigcup_{k=1}^{n} Q_k$ измеримо по Жордану и $m\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m(Q_k)$.

4 (свойство конечной аддитивности меры Жордана). Если множества Q_1, Q_2, ..., Q_n измеримы по Жордану и попарно не пересекаются, то $m\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(Q_k)$.

4. Разбиение измеримых множеств. Пусть множество G измеримо по Жордану в $\boldsymbol{R}^n$.

О п р е д е л е н и е 7. ***Разбиением*** множества G называется совокупность измеримых по Жордану в $\boldsymbol{R}^n$ и попарно непересекающихся множеств G_1, G_2, ..., G_m таких, что $G = \bigcup_{k=1}^{m} G_k$.

Обозначается: $\tau = \{G_k\}$, $k = 1,2,..., m$.

Пусть $d(G_k)$ есть диаметр множества G_k:

$$d(G_k) = \sup_{x,y \in G_k} \rho(x; y).$$

О п р е д е л е н и е 8. ***Мелкостью разбиения*** τ множества G называется число $\lambda = \max_{1 \leq k \leq N} d(G_k)$.

Если каждое из множеств G_k, $k = 1,2,..., m$, является подмножеством некоторого множества $G_k^{'}$, $k = 1,2,..., m$, то говорят, что ***разбиение*** $\tau = \{G_k\}$ ***вписано в разбиение*** $\tau' = \{G_k^{'}\}$.

Обозначается: $\tau \prec \tau^{'}$ или $\tau^{'} \succ \tau$.

Разбиения обладают следующими **свойствами**.

1 (транзитивность). Если $\tau \prec \tau^{'}$ и $\tau^{'} \prec \tau^{''}$, то $\tau \prec \tau^{''}$.

2 (финальность). Для любых двух разбиений τ' и τ'' множества G существует такое его разбиение τ, что $\tau \succ \tau'$, $\tau \succ \tau''$.

3. Если $\tau = \{G_k\}$ – разбиение множества G, то

$$m(G) = \sum_{k=1}^{m} m(G_k).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие множества называются клетками в $\boldsymbol{R}^n$? Перечислите свойства клеток.

2. Что называется клеточным множеством в $\boldsymbol{R}^n$? Перечислите свойства клеточных множеств.

3. Какие множества называются измеримыми по Жордану?

4. Что такое мера Жордана?

5. Сформулируйте и докажите критерий измеримости множества в $\boldsymbol{R}^n$.

6. Что такое разбиение множества, и какими свойствами оно обладает?

Лекция 2. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Определение и свойства двойного интеграла.

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.

Задача о массе неоднородной пластины. Пусть плоская пластина G заполнена веществом с известной плотностью $\rho = \rho(x; y)$. Требуется найти массу (количество вещества) всей пластины.

Определение 1. Под ***плотностью*** вещества в точке $M(x; y)$ понимается предел средней плотности бесконечно малой части G, содержащей точку $M(x; y)$.

Разобьем область G произвольно на n частичных областей G_1, G_2, ..., G_n, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n (рис.1).

Предположим, что в каждой малой частичной области G_i, $i = 1,2,..., n$, плотность постоянна и равна $\rho(M_i)$, где $M_i(\xi_i; \eta_i)$ – произвольная точка G_i. Тогда масса G_i приблизительно будет равна

$$m_i \approx \rho(M_i) \cdot \Delta S_i = \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i .$$

Для массы всей пластины G получим

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i . \tag{1}$$

Обозначим λ_i, $i = 1,2,..., n$, диаметр (наибольшее расстояние между точками области) частичной области G_i. И пусть λ – наибольший из диаметров λ_i, т.е. $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i$. Сумма (1) тем точнее, чем меньше каждый из диаметров частичных областей G_1, G_2, ..., G_n. Поэтому массой пластины можно считать

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i . \tag{2}$$

Задача об объеме цилиндроида. Тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x; y)$, снизу областью G, лежащей в плоскости Oxy, с боков цилиндрической поверхностью, направляющей которой является граница области G, а образующая параллельна оси Oz, называется ***криволинейным цилиндром*** или ***цилиндроидом***. Необходимо найти объем данного цилиндроида.

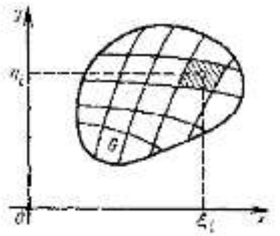


Рис.1. Задача о массе неоднородной пластины

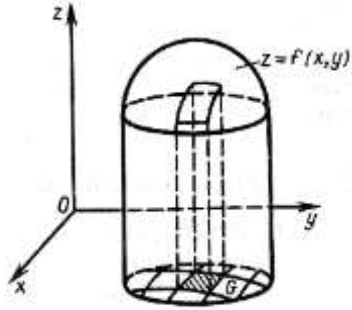


Рис.2. Задача об объеме цилиндроида

Разобьем область G произвольно на n частичных областей G_1, G_2, ..., G_n, не имеющих общих внутренних точек, с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n (рис.2). В каждой из областей G_i выберем точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$ и рассмотрим прямой цилиндрический столбик с основанием G_i и высотой $f(\xi_i;\eta_i)$. Очевидно, что объем этого столбика равен $V_i \approx f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i$. Сумма объемов всех цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего объем криволинейного цилиндра. Поэтому

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i \ . \tag{3}$$

Эта сумма тем точнее выражать искомый объем V, чем меньше каждый из диаметров λ_i, $i = 1,2,...,n$, частичных областей G_1, G_2, ..., G_n. Следовательно,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i \ , \tag{4}$$

где λ – наибольший из диаметров λ_i, т.е. $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i$.

2. Определение двойного интеграла. Пусть $G \subset \boldsymbol{R}^2$ – измеримое по Жордану множество, $z = f(x;y)$ — произвольная функция, определенная и ограниченная на этом множестве. Будем предполагать, что граница множества G состоит из конечного числа кривых, заданных уравнениями вида $y = y(x)$ или $x = x(y)$, где $y(x)$ и $x(y)$ непрерывные функции.

И пусть $\tau = \{G_i\}$, $i = 1,2,...,n$, разбиение множества G, ΔS_i – площадь части G_i, $i = 1,2,...,n$, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(G_i)$ – мелкость разбиения, где $d(G_i)$ диаметр множества G_i. В каждой части G_i, выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Тогда $f(\xi_i;\eta_i)$ – значение функции в этой точке.

Определение 2. Сумма

$$\sigma_n(\tau, C_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta S_i \tag{5}$$

называется ***интегральной суммой Римана*** для функции $z = f(x;y)$ на множестве G, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i(\xi_i;\eta_i)$.

Если функция $z = f(x;y)$, ограничена на G, то для любого разбиения $\tau = \{G_i\}$, $i = 1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i = \inf_{(x;y)\in G_i} f(x;y),\ M_i = \sup_{(x;y)\in G_i} f(x;y).$$

Определение 3. Суммы

$$s(\tau; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta S_i ,$$

$$S(\tau; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta S_i$$

называются ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу***, соответствующими разбиению τ.

Определение 4. ***Двойным интегралом*** от функции $z = f(x;y)$ по множеству G называется предел (если он существует) интегральной суммы (5) при $\lambda \to 0$:

$$I = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i) \cdot \Delta S_i ,$$

не зависящий от разбиения $\tau=\{G_i\}$ и выбора точек $C_i(\xi_i;\eta_i)\in G_i$.

Обозначается:

$$I=\iint\limits_G f(x;y)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i\,, \tag{6}$$

подынтегральная функция $f(x;y)$ называется ***интегрируемой*** на множестве G, множество G – ***областью интегрирования***, x, y – ***переменными интегрирования***, dS – ***элементом площади***.

Учитывая определение предела, можно записать:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot\Delta S_i=I \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon>0\;\;\exists\delta>0:\;\forall\tau=\{G_i\}\;\;\lambda(\tau)<\delta\quad |I-\sigma_n|<\varepsilon\,.$$

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). *Если функция* $z=f(x;y)$ *интегрируема на множестве* G*, то она ограничена на этом множестве.*

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости). *Если функция* $z=f(x;y)$ *непрерывна на замкнутом множестве* G*, то она интегрируема на этом множестве.*

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу). *Для того чтобы ограниченная функция* $z=f(x;y)$ *была интегрируема на измеримом по Жордану множестве* $G\subset\boldsymbol{R}^2$*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *нашлось такое* $\delta>0$*, что для любого разбиения* $\tau=\{G_i\}$ *с мелкостью* $\lambda(\tau)<\delta$ *выполнялось неравенство:*

$$S(\tau;f)-s(\tau;f)<\varepsilon\,.$$

Доказательство теорем 1-3 проводится аналогично соответствующим теоремам для функции одной переменной.

Замечание. Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой на множестве G функции $z=f(x;y)$ предел

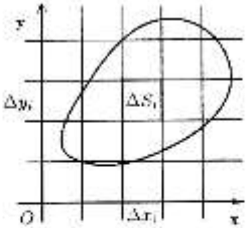


Рис.3. Разбиение области

интегральных сумм существует и не зависит от разбиения множества на части. Поэтому, не ограничивая общности, можно разбивать область интегрирования G на части прямыми, параллельными координатным осям (рис.3). Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Поэтому можно записать

$$\iint\limits_G f(x;y)dS = \iint\limits_G f(x;y)dxdy,$$

где $dS = dxdy$.

Основные **свойства двойного интеграла** аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла.

1. $\iint\limits_G dS = \iint\limits_G dxdy = S$, где S – площадь области G.

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемые на измеримом по Жордану множестве G, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на G и справедливо равенство:

$$\iint\limits_G (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dxdy = \alpha \iint\limits_G f(x;y)dxdy + \beta \iint\limits_G g(x;y)dxdy.$$

3 (аддитивность). Если измеримое по Жордану множество G является объединением измеримых множеств G_1 и G_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на множестве G и справедлива формула:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x;y)dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x;y)dxdy.$$

4. Если на измеримом множестве G имеет место неравенство $f(x;y) \geq 0$, то:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy \geq 0 .$$

5 (монотонность). Если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на множестве G и $f(x;y) \leq g(x;y)$ при $(x;y) \in G$, то $\iint\limits_G f(x;y)dxdy \leq \iint\limits_G g(x;y)dxdy$.

6. Если функция $f(x;y)$ непрерывна на замкнутом измеримом по Жордану множестве G, площадь которого S, то

$$m \cdot S \leq \iint\limits_G f(x;y)dxdy \leq M \cdot S ,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве G.

7 (теорема о среднем). Если функция $f(x;y)$ непрерывна на замкнутом измеримом по Жордану множестве G, площадь которого S, то существует такая точка $P_0(x_0;y_0) \in G$, что выполняется неравенство:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0) \cdot S .$$

8. Произведение интегрируемых на измеримом множестве G функций есть интегрируемая функция.

9. Если функция $f(x;y)$ интегрируема на измеримом множестве G, то функция $|f(x;y)|$ также интегрируема и справедливо неравенство:

$$\left|\iint\limits_G f(x;y)dxdy\right| \leq \iint\limits_G |f(x;y)|dxdy .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачу о массе неоднородной пластины.
2. Сформулируйте задачу об объеме криволинейного цилиндра.
3. Что называется интегральной суммой? Какие суммы называются верхней и нижней суммой Дарбу?
4. Дайте определение двойного интеграла.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции двух переменных.
6. В чем суть критерия интегрируемости?

7. Перечислите свойства двойного интеграла.

Лекция 3. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ ИНТЕГРАЛУ

1. Сведение двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу.
2. Сведение двойного интеграла к повторному интегралу по элементарной области.

1. Сведение двойного интеграла по прямоугольнику к повторному интегралу. Рассмотрим двойной интеграл по прямоугольнику

$$D=\{(x;y)|a\le x\le b,\, c\le y\le d\}$$

со сторонами, параллельными осям координат.

Теорема 1. *Пусть*

1) для функции $f(x;y)$ *в прямоугольнике* D *существует двойной интеграл* $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$*;*

2) для каждого x *из отрезка* $[a;b]$ *существует определенный интеграл* $I(x)=\int\limits_c^d f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx$ *и справедливо равенство:*

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x;y)dy\right)dx. \tag{1}$$

► Разобьем прямоугольник D с помощью точек

$$a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b \text{ и}$$
$$c=y_0<y_1<y_2<...<y_{k-1}<y_k=d$$

на nk частичных прямоугольников (рис.1)

$$D_{ij}=\{(x;y)|x_{i-1}\le x\le x_i,\, y_{j-1}\le y\le y_j\},\; i=1,2,...,n,\; j=1,2,...,k.$$

Положим $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, $\Delta y_j=y_j-y_{j-1}$. Обозначим m_{ij} и M_{ij} наименьшее и наибольшее значения функции $f(x;y)$ в прямоугольнике D_{ij}. Тогда

$$m_{ij}\le f(x;y)\le M_{ij} \tag{2}$$

всюду в этом прямоугольнике.

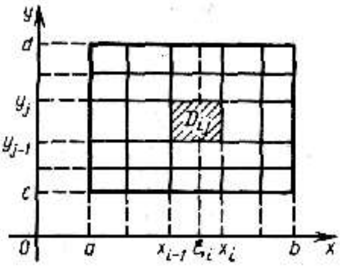


Рис.1. Разбиение прямоугольной области

Положим в этом неравенстве $x=\xi_i$, где произвольная точка ξ_i отрезка $[x_{i-1};x_i]$.

Проинтегрируем (2) по y в пределах от y_{j-1} до y_j:

$$m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i;y)dy \le M_{ij}\Delta y_j \,. \tag{3}$$

Суммируя (3) по всем j от 1 до k, получим

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \underset{j}{\le} \int_c^d f(\xi_i;y)dy \le \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j \quad \text{или}$$

$$\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \le I(\xi_i) \le \sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j \,. \tag{4}$$

Умножая (4) на Δx_i и суммируя по всем i от 1 до n, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \,. \tag{5}$$

Пусть наибольший диаметр частичных прямоугольников D_{ij} стремится к нулю, $\lambda \to 0$. Тогда и наибольшая из длин $\Delta x_i \to 0$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \le \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \le \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \,.$$

Крайние члены в выражении (5), представляющие собой нижнюю и верхнюю суммы Дарбу, стремятся к двойному интегралу $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$. Поэтому существует предел и среднего члена (5), равный тому же самому двойному интегралу. Но этот предел по определению определенного интеграла равен $\int\limits_a^b I(x)dx$.

Поэтому

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x;y)dy \right) dx. \blacktriangleleft$$

Замечания. 1. Повторный интеграл $\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x;y)dy \right) dx$ можно записывать в виде $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;y)dy$.

2. Если в теореме 1 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x;y)dx. \qquad (6)$$

2. Сведение двойного интеграла к повторному интегралу по элементарной области. Пусть $\varphi(x)$ $\psi(x)$ непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции и $\varphi(x) \le \psi(x)$ $\forall x \in [a;b]$.

Определение 1. Область

$$G = \{(x;y) |\, a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

называется ***элементарной*** относительно оси Oy.

Определение 2. Область

$$G = \{(x;y) |\, \alpha(y) \le x \le \beta(y), c \le y \le d\}$$

называется ***элементарной*** относительно оси Ox.

Здесь функции $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ и $\alpha(y) \le \beta(y)$.

Поскольку граница ∂G состоит из графиков непрерывных функций, то G является измеримой по Жордану областью.

Теорема 2. *Пусть*

1) функция $z = f(x;y)$ *определена в области*

$$G = \{(x;y) |\, a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)\},$$

где $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *– непрерывные функции,* $y_1(x) \le y_2(x)$ *для любого* x *из отрезка* $[a;b]$*;*

2) существует двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$*;*

3) для каждого x *из отрезка* $[a;b]$ *существует определенный интеграл* $I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$.

Тогда существует повторный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy$ *и справедливо равенство*

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy. \qquad (7)$$

► Положим $c = \min\limits_{[a;b]} y_1(x)$ и $d = \max\limits_{[a;b]} y_2(x)$. Заключим область G в прямоугольник $D = \{(x;y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$. Рассмотрим функцию

$$F(x;y) = \begin{cases} f(x;y) \text{ в точках области } G, \\ 0 \text{ в остальных точках.} \end{cases}$$

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы 1. В силу аддитивности двойного интеграла, $F(x;y)$ интегрируема по всему прямоугольнику D. При этом

$$\iint\limits_D F(x;y)dxdy = \iint\limits_G F(x;y)dxdy + \iint\limits_{D \setminus G} F(x;y)dxdy.$$

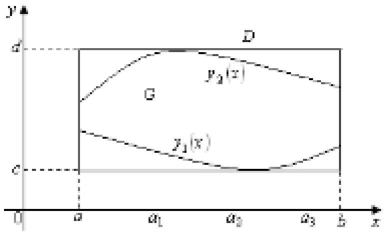


Рис.2.Разбиение произвольной области

Так как $\iint\limits_{D \setminus G} F(x;y)dxdy = 0$ и $\iint\limits_G F(x;y)dxdy = \iint\limits_G f(x;y)dxdy$, то

$$\iint_D F(x;y)dxdy = \iint_G f(x;y)dxdy. \qquad (8)$$

Для каждого x из отрезка $[a;b]$ существует интеграл

$$\int_c^d F(x;y)dy = \int_c^{y_1(x)} F(x;y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x;y)dy + \int_{y_2(x)}^{d} F(x;y)dy.$$

Первый и третий интегралы в выражении справа равны нулю. Поэтому

$$\int_c^d F(x;y)dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x;y)dy. \qquad (9)$$

Функция $F(x;y)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Следовательно, двойной интеграл от этой функции по прямоугольнику D может быть сведен к повторному

$$\iint_D F(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d F(x;y)dy.$$

Отсюда с учетом (8) и (9), получаем

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)dy. \blacktriangleleft$$

Замечания. 1. Если в теореме 2 поменять ролями x и y, то существует повторный интеграл $\int_c^d dy \int_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx$ и справедлива формула

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(x)}^{x_2(x)} f(x;y)dx. \qquad (10)$$

2. Если область интегрирования не удовлетворяет условиям теоремы 2 (прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках), то необходимо данную область разбить на части, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 2, и сводить к повторному каждый из соответствующих интегралов.

Примеры.

1. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, если область G ограничена линиями $y = x^2$, $x = a$, $y = 0$, $a > 0$

Решение. Имеем:

$$\iint\limits_G f(x,y)ds = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^{x_2} f(x,y)dy = \int\limits_0^{a^2} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{a} f(x,y)dx .$$

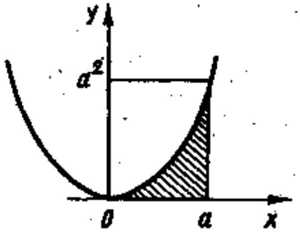


Рис.3.

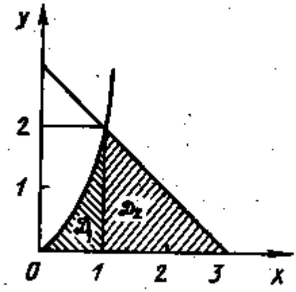


Рис. 4.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G x^2 y dxdy$ по области (G): $y=0$, $y=2x^3$, $x+y=3$

Решение. Рассмотрим различный порядок интегрирования. Сначала вычислим внешний интеграл по переменной x. В этом случае исходный интеграл сводится к вычислению двух интегралов по областям

$$D_1 = \left\{(x;y)\middle| 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x^3\right\},$$

$$D_2 = \left\{(x;y)\middle| 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3-x\right\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_G x^2 y dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2x^3} x^2 y dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{3-x} x^2 y dy$$

Изменив порядок интегрирования, получим область:

$$G = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le y \le 2,\ \sqrt[3]{\frac{1}{2}y} \le x \le 3-y \right\}.$$

Значит,

$$\iint\limits_G x^2 y dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} x^2 y dx = \int\limits_0^2 y dy \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-x} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 y\left((3-y)^3 - \frac{y}{2}\right)dy = \frac{1}{3}\int_0^2 y\left(27 - 27y + 9y^2 - y^3 - \frac{y}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}y^2 - \frac{1}{5}y^5 + \frac{9}{4}y^4 - \frac{275}{30}y^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{154}{45}\ .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении двойного интеграла в случае прямоугольной области.
2. Сформулируйте и докажите теорему о вычислении двойного интеграла в случае произвольной области.
3. Как вычислить двойной интеграл по области, не являющейся элементарной?

Лекция 4. ФОРМУЛА ГРИНА

1. Формула Грина.
2. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

1. Формула Грина. Пусть в плоскости Oxy задана замкнутая элементарная относительно оси Ox или Oy область G, ограниченная замкнутым контуром Γ.

Теорема 1 (формула Грина). *Если функции* $P(x;y)$ *и* $Q(x;y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *в области* G*, то имеет место формула*

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_\Gamma Pdx + Qdy, \tag{1}$$

где контур Γ *обходится в положительном направлении.*

► Рассмотрим область $G = \{(x;y) | a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$.

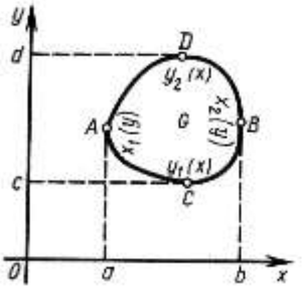


Рис.1.

Преобразуем двойной интеграл $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ к криволинейному интегралу. Имеем

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b \left(P(x;y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} \right) dx =$$

$$= \int_a^b P(x; y_2(x)) dx - \int_a^b P(x; y_1(x)) dx .$$

Каждый из полученных интегралов равен криволинейному интегралу второго рода, взятому по соответствующей кривой:

$$\int_a^b P(x;y_2(x))dx = \int_{ADB} P(x;y)dx = -\int_{BDA} P(x;y)dx,$$

$$\int_a^b P(x;y_1(x))dx = \int_{ACB} P(x;y)dx.$$

Тогда

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\left[\int_{BDA} P(x;y)dx + \int_{ACB} P(x;y)dx\right] = -\oint_\Gamma P(x;y)dx. \quad (2)$$

Аналогично доказывается формула:

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_\Gamma Q(x;y)dy. \quad (3)$$

При этом область G удобно задать в виде:

$$G = \{(x;y) | c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}.$$

Вычитая почленно из равенства (3) равенство (2), получим формулу Грина

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_\Gamma Pdx + Qdy. ◄$$

Следствие. *Площадь S области G, ограниченной контуром Γ, можно вычислить по одной из следующих формул*

$$S = \oint_\Gamma xdy, \qquad S = -\oint_\Gamma ydx, \qquad S = \frac{1}{2}\oint_\Gamma xdy - ydx.$$

► Положим $Q = x$ и $P = 0$. Тогда

$$\oint_\Gamma Pdx + Qdy = \oint_\Gamma 0dx + xdy = \iint_G (1-0)dxdy = S.$$

Аналогично, полагая $P = -y$ и $Q = 0$, получим $S = -\oint_L ydx$.◄

Замечание. 1. Формула Грина справедлива для произвольной области, которую можно разбить на конечное число элементарных областей.

2. Формула Грина связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области.

Пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}(x-y)dx+(x+y)dy$, где $\Gamma=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2=4\right\}$.

Решение. Вычислим интеграл с помощью формулы Грина. Имеем

$$P(x;y)=x-y,\ Q(x;y)=x+y,\ \frac{\partial P}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Тогда

$$\oint\limits_{x^2+y^2=4}(x-y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(1+1)dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}dxdy=2\cdot\pi\cdot 2^2=$$
$$=8\pi.$$

2. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Определение 1. Плоская область G называется ***односвязной***, если каков бы ни был замкнутый контур Γ, лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром часть плоскости целиком принадлежит области G.

Пример. Односвязными являются круг, эллипс, многоугольник и так далее. Кольцо не является односвязной областью, так как любая окружность, лежащая внутри этой области содержит точки, не принадлежащие этой области.

Теорема 2. *Пусть функции* $P(x;y)$ *и* $Q(x;y)$ *определены и непрерывны вместе со своими частными производными* $\frac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *в замкнутой односвязной области* G. *Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

1) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, *расположенной в* G, *верно*

$$\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=0\ ;$$

2) для любых двух точек A *и* B *области* G *значение интеграла* $\int\limits_{AB}Pdx+Qdy$ *не зависит от выбора пути интегрирования* AB, *целиком лежащего в* G *;*

3) выражение $Pdx + Qdy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции, определенной в области G :

$$Pdx + Qdy = dF \ ;$$

4) в области G всюду $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

► Доказательство теоремы проведем по схеме $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$.

Шаг 1. $1 \to 2$. Рассмотрим в области G два произвольных пути, соединяющих точки A и B, которые в сумме составляют замкнутую кривую $\Gamma = ACB + BDA$, расположенную в G.

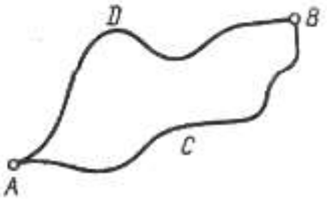


Рис.2.

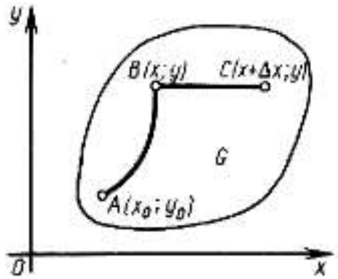


Рис.3

Согласно условию 1 имеем $\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0$.

С другой стороны

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy + \int\limits_{BDA} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{ACB} Pdx + Qdy - \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy.$$

Сравнивая, получаем $\int\limits_{ACB} Pdx + Qdy = \int\limits_{ADB} Pdx + Qdy$.

Шаг 2. $2 \to 3$. Пусть интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от выбора точек A и B. Зафиксируем точку $A = A(x_0; y_0)$.

Тогда интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ является некоторой функцией координат x и y точки $B = B(x; y)$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = F(x;y).$$

Покажем, что $F(x;y)$ дифференцируема в области G.

Рассмотрим частное приращение функции $F(x;y)$ по x в точке $B(x;y)$

$$\Delta_x F = F(x+\Delta x;y) - F(x;y) = \int\limits_{AC} Pdx + Qdy - \int\limits_{AB} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{BC} Pdx + Qdy,$$

где точка $C(x+\Delta x;y)$.

Так как интеграл не зависит от вида кривой, то возьмем путь от $B(x;y)$ до $C(x+\Delta x;y)$ прямолинейный.

$$\Delta_x F = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy = \int\limits_{BC} Pdx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x;y)dx.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, получаем

$$\Delta_x F = P(x+\theta\cdot\Delta x;y)\cdot\Delta x, \quad 0<\theta<1.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x+\theta\cdot\Delta x;y), \quad 0<\theta<1.$$

Учитывая, что функция $P(x;y)$ непрерывна, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\cdot\Delta x;y) = P(x;y).$$

Аналогично доказывается, что $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x;y)$.

Это означает, что функция $F(x;y)$ дифференцируема и справедливо равенство $dF = Pdx + Qdy$.

Шаг 3. $3\to 4$. Пусть в области G определена функция $F(x;y)$ такая, что

$$dF = Pdx + Qdy.$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x;y) \text{ и } \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x;y).$$

По теореме о равенстве смешанных производных, имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Шаг 4. $4\to 1$. Пусть выполнено условие 4) и пусть Γ – кусочно-гладкая кривая, лежащая в области G и ограничивающая некоторую область G^*. Тогда применяя формулу Грина к области G^*, получаем

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy=\iint_{G^*}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

В силу условия 4) интеграл справа равен 0.

Следовательно, $\oint_\Gamma Pdx+Qdy=0$.◄

Замечание. Из эквивалентности условий 1-4 теоремы 2 следует, что условие 4) является необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла 1-го рода $\int_{AB} Pdx+Qdy$ от пути интегрирования.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{(0;0)}^{(1;1)} ydx+xdy$.

Решение. Здесь $P=y$, $Q=x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$. Согласно теореме 3, интеграл не зависит от пути интегрирования. Из выполнения условия 4) следует справедливость условия 3). Так как $d(xy)=xdy+ydx$, то

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} ydx+xdy=xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)}=1-0=1.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие условия должны выполнятся для того. Чтобы была справедлива формула Грина.

2. Перечислите эквивалентные условия, если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области

Лекция 5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

1. Замена переменных в двойном интеграле.
2. Криволинейные координаты. Переход к полярным координатам.

1. Замена переменных в двойном интеграле. Рассмотрим двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$. Замена переменных в двойном интеграле состоит в переходе от переменных x и y к новым переменным по формулам

$$x = x(u;v), \quad y = y(u;v) \tag{1}$$

где $(u;v) \in G^*$.

При этом каждая точка $(x;y) \in G$ соответствует некоторой точке $(u;v) \in G^*$, т.е. когда точка $(u;v)$ «пробегает» область G^*, соответствующая ей точка $(x;y) = (x(u;v); y(u;v))$ «пробегает» область G.

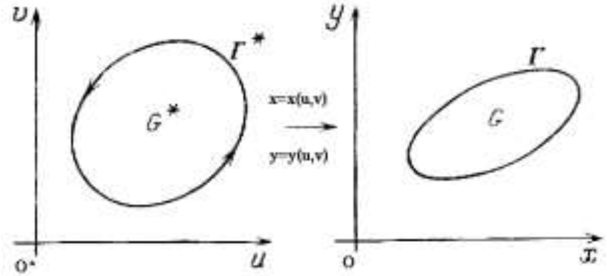


Рис.1. Замена переменных в дойном интегрле

Функции (1) осуществляют отображение области $G^* \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}$ на область $G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$ (рис.1). Область G называется ***образом*** области, а область G^* – ***прообразом*** области G при отображении (1).

Теорема 1. *Пусть 1) отображение $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ переводит замкнутую ограниченную область G^* в замкнутую ограниченную область G и является взаимно однозначным;*

2) функции $x(u;v)$ и $y(u;v)$ имеют в области G^* непрерывные частные производные первого порядка;

3) якобиан отображения $J=\dfrac{D(x;y)}{D(u;v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$ *во всех области G^*;*

4) функция $f(x;y)$ непрерывна в области G.

Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy=\iint\limits_{G^*} f(x(u;v);y(u;v))|J|dudv. \qquad (2)$$

► Интегралы в обеих частях существуют, поскольку являются интегралами от непрерывных на компактах функций.

Пусть

$$\Gamma^*=\{u(t),v(t)|\ a\le t\le b\}$$

– положительно ориентированный контур, ограничивающий область G^*.

И пусть

$$\Gamma=\{x(u(t);v(t));y(u(t);v(t))|\ a\le t\le b\}$$

– ориентированный контур, являющийся границей области G, ориентация которого порождается ориентацией контура Γ^* при помощи отображения $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, $(u;v)\in G^*$.

Положим

$$\varepsilon=\begin{cases}1, & \text{если контур } \Gamma \text{ ориентирован положительно},\\ -1, & \text{если контур } \Gamma \text{ ориентирован отрицательно}.\end{cases}$$

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$P(x;y)=\int\limits_{\varphi(x)}^{y} f(x;t)dt,$$

где $a\le x\le b$, $\varphi(x)\le y\le\psi(x)$.

Очевидно, что $f(x;y)=\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}$, $(x;y)\in\overline{G}$, и функции $P(x;y)$, $\dfrac{\partial P(x;y)}{\partial y}$ непрерывны на $\overline{G}$.

Тогда с учетом формулы Грина, получим:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_G \frac{\partial P(x;y)}{\partial y}dxdy = -\varepsilon\oint\limits_\Gamma Pdx = .$$

$$= -\varepsilon\int\limits_a^b P\cdot x'(t)dt = -\varepsilon\int\limits_a^b P\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt =$$

$$= -\varepsilon\oint\limits_{\Gamma^*} P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}du + P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}dv = \text{[формула Грина]}=$$

$$= -\varepsilon\iint\limits_{G^*}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]dudv =$$

$$= -\varepsilon\iint\limits_{G^*}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} -\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}\right]dudv =$$

$$= \varepsilon\iint\limits_{G^*}\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}dudv = \varepsilon\iint\limits_{G^*} f(x(u;v);y(u;v))J\,dudv.$$

Получили равенство:

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \varepsilon\iint\limits_{G^*} f(x(u;v);y(u;v))J\,dudv,$$

которое верно для любой непрерывной на $\overline{G}$ функции f.

Поскольку $\iint\limits_G dxdy = S$, то для функции $f\equiv 1$ получим $S = \varepsilon\iint\limits_{G^*} J\,dudv$, где S – площадь области G. Левая часть этого равенства положительна, следовательно, и правая положительна. Так как якобиан отображения J сохраняет на G^* постоянный знак, то это возможно, когда $\varepsilon J > 0$. Отсюда следует, что $\varepsilon J = |J|$. Тогда

$$\iint\limits_G f(x;y)dxdy = \iint\limits_{G^*} f(x(u;v);y(u;v))|J|\,dudv. \blacktriangleleft$$

Формула (2) называется ***формулой замены переменных в двойном интеграле*** и является важнейшим способом приведения двойного интеграла к виду, удобному для вычисления.

Замечание. Если условие 1) или условие 3) нарушается на множестве точек площади нуль (в отдельных точках или на отдельных кривых), то формула (2) остается в силе.

Геометрический смысл знака якобиана. Из формулы $\varepsilon J = |J|$ и выбора числа ε следует, что если $J > 0$, то $\varepsilon = 1$, т.е. положительной ориентации контура Γ^* при отображении $x = x(u;v)$, $y = y(u;v)$ соответствует положительная ориентация контура Γ. Если $J < 0$, то $\varepsilon = -1$, т.е. положительной ориентации контура Γ^* соответствует отрицательная положительная ориентация контура Γ.

Таким образом, отображения с положительным якобианом сохраняют ориентации контуров, а отображения с отрицательным якобианом меняют их на противоположные.

2. Криволинейные координаты. Взаимно однозначное отображение

$$u = u(x;y), \quad v = v(x;y), \tag{3}$$

открытого множества $G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$ на множество $G^* \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}$ ставит в соответствие каждой точке $(x;y) \in G$ пару чисел $(u;v) \in G^*$. Поэтому данное отображение можно рассматривать как переход к новым координатам u и v точки $(x;y)$ одной и той же плоскости G. В этом случае множество G^* представляет собой множество пар новых координат точек множества G.

Обратный переход от координат u и v к координатам x и y осуществляется с помощью отображения

$$x = x(u;v), \quad y = y(u;v), \tag{4}$$

обратного отображению (3).

О п р е д е л е н и е 1. Множество точек плоскости $\boldsymbol{R}^2_{xy}$, для которых одна из координат u или v постоянна, называется ***координатной линией***.

При $u = u_0$ имеем координатную линию

$$x = x(u_0;v), \; y = y(u_0;v);$$

при $v = v_0$ имеем координатную линию

$$x = x(u; v_0),\ \ y = y(u; v_0).$$

В двух случаях получаются уравнения, являющиеся параметрическими уравнениями некоторых кривых. Поэтому координаты u и v называются ***криволинейными координатами***.

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_G y^3 dxdy$ по области (рис.2)

$$G = \left\{ (x; y) \middle|\ y \ge x^2, y \le 2x^2, xy \ge 1, xy \le 2 \right\}.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим непрерывно дифференцируемое при $x \ge 0$ отображение вида:

$$u = \frac{y}{x^2},\ v = xy. \tag{5}$$

Образом области $\overline{G}$ является квадрат (рис.2.)

$$G^* = \left\{ (u; v) \middle|\ 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2 \right\}.$$

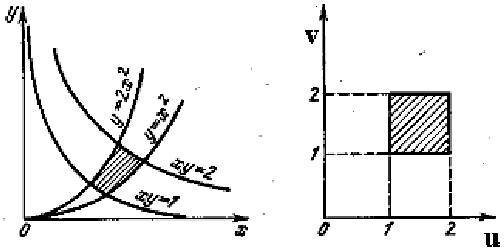


Рис.2.

Данное отображение является взаимно однозначным, поскольку уравнения (5) разрешимы относительно x и y:

$$x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}},\ \ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$

Якобиан отображения

$$J = \frac{D(x; y)}{D(u; v)} == \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

Отсюда $|J| = \dfrac{1}{3|u|}$.

Тогда

$$\iint\limits_{G} y^3 dxdy = \begin{bmatrix} x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, \\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}, y^3 = uv^2 \end{bmatrix} = \iint\limits_{G^*} uv^2 \frac{1}{3|u|} dudv =$$

$$= \frac{1}{3} \iint\limits_{G^*} v^2 dudv = \frac{1}{3} \int\limits_1^2 du \int\limits_1^2 v^2 dv = \frac{1}{3} u\Big|_1^2 \cdot \frac{v^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}(2-1)\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{9}.$$

Переход к полярным координатам. Если область G ограничена дугами окружности, то удобно переходить к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{6}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Якобиан перехода к полярным координатам имеет вид:

$$J = \frac{D(x;y)}{D(\rho;\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Очевидно, что $J > 0$. Поэтому формула замены переменных запишется как

$$\iint\limits_{G} f(x;y) dxdy = \iint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) r\, drd\varphi. \tag{7}$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint\limits_{G} e^{x^2+y^2} dxdy$, где

$$G = \left\{(x;y) \Big| \; x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0 \right\}.$$

Решение. Преобразуем двойной интеграл к полярным координатам по формулам (3).

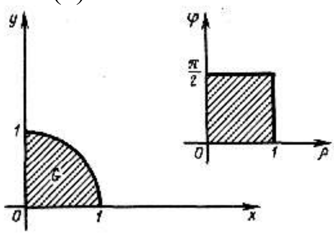


Рис.3.

Из рисунка 3 видно, что область G преобразуется в прямоугольник

$$G^* = \left\{ (r;\varphi) \middle| 0 \le r \le 1;\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

По формуле (7) имеем

$$\iint\limits_G e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{G^*} e^{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi} r\,drd\varphi = \iint\limits_{G^*} e^{r^2} r\,drd\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{r^2} d\left(r^2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} e_0^1 \cdot \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}(e-1).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.
2. В чем состоит геометрический смысл знака якобиана?
3. Какие координаты называются криволинейными?
4. Чему равен якобиан в случае перехода к полярным координатам?

Лекция 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. Физические приложения двойного интеграла.

1. Геометрические приложения двойных интегралов.

Вычисление площадей плоских фигур. Площадь S области G может быть вычислена по формуле

$$S = \iint_G dxdy. \qquad (1)$$

Данная формула применима не только к криволинейным трапециям, но и к фигурам, расположенным произвольно по отношению к координатным осям.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$.

Решение. 1. Найдем координаты точек пересечения данных линий. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x = 4y - y^2, \\ x + y = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y - y^2, \\ 4y - y^2 + y - 6 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4y - y^2, \\ y^2 - 5y + 6 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 3, \\ y_1 = 2, y_2 = 3. \end{cases}$$

Итак, имеем две точки пересечения $A(4;2)$ и $B(3;3)$.

2. Вычисляем площадь фигуры.

Подставляя в формулу (1), получим

$$S = \iint_G dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 \left(x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy =$$

$$= \int_2^3 \left(-y^2 + 5y - 6\right) dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y \right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{6}.$$

Вычисление площади поверхности. Площадь S поверхности, заданной уравнением $z = f(x;y)$, вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dxdy, \qquad (2)$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy.

Пример. Найти площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

Решение. Из уравнения конуса имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Проекцией поверхности на плоскость *Oxy* является круг, ограниченный окружностью $(x-1)^2+y^2=1$ (рис.1).

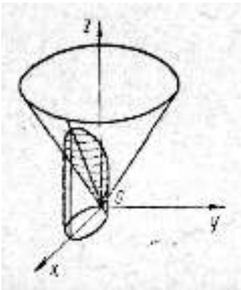


Рис.1

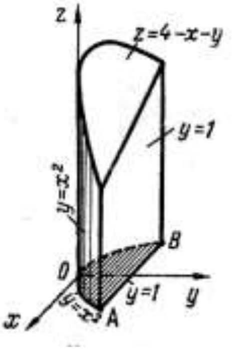


Рис.2.

Тогда

$$S=\iint\limits_G\sqrt{1+\left(f_x^{'}\right)^2+\left(f_y^{'}\right)^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_G\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_G dxdy=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, J=r, \\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}, 0\le r\le 2\cos\varphi \end{array}\right]=\sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}rdr=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=$$

$$= 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = 2\sqrt{2}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{2}\,.$$

Вычисление объема тела. С помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y) > 0$, снизу плоскостью $z = 0$, с боковых сторон цилиндрической поверхностью, у которой образующая параллельна оси Oz, а направляющей служит контур области G, находится по формуле:

$$V = \iint_G f(x; y)dxdy. \qquad (3)$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = x^2\,,\ x + y + z = 4\,,\ y = 1,\ z = 0\,.$$

Решение. Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z = 4 - x - y$, снизу – частью плоскости, заключенной между параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (рис.3).

Тогда по формуле 3 получим,

$$V = \iint_G (4 - x - y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left((4 - y)x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right)dy = 2\int_0^1 (4 - y)\sqrt{y}\, dy =$$

$$= 8\int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy - 2\int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{68}{15}\,.$$

2. Физические приложения двойного интеграла.

Вычисление массы пластины. Масса плоской пластины G с переменной плотностью $\rho = \rho(x; y)$ вычисляется по формуле

$$m = \iint_G \rho(x; y)dxdy.$$

Пример. Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Р е ш е н и е. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через r_1 и r_2, $r_1 < r_2$. Поместим полярный радиус системы координат в центре кольца. Тогда уравнения окружностей примут вид $r = r_1$ и $r = r_2$. Поверхностная плотность в любой точке кольца равна $\rho = \frac{k}{r^2}$.

Масса кольца равна

$$m = \iint\limits_G \rho(x;y)dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, |J| = r, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, r_1 \le r \le r_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{k}{r^2} r\,dr = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = k\int\limits_0^{2\pi} \left(\ln r\Big|_{r_1}^{r_2}\right) d\varphi =$$

$$= k\ln\frac{r_1}{r_2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi k\ln\frac{r_1}{r_2}.$$

Статические моменты и координаты центра тяжести. Статические моменты пластины G относительно осей Ox и Oy могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \iint\limits_G y\cdot\rho(x;y)dxdy, \qquad S_y = \iint\limits_G x\cdot\rho(x;y)dxdy,$$

а координаты центра масс пластины – по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m}, \qquad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

М о м е н т ы   и н е р ц и и   п л а с т и н ы. Момент инерции материальной точки массы m относительно оси относительно некоторой оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния точки до оси.

Моменты инерции пластины G относительно осей Ox и Oy находятся по формулам

$$I_x = \iint\limits_G y^2\rho(x;y)dxdy, \qquad I_y = \iint\limits_G x^2\rho(x;y)dxdy.$$

Момент инерции пластины G относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)\rho(x;y)dxdy.$$

Пример. Найти центр масс равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы. Найти момент инерции данного треугольника относительного его гипотенузы.

Решение. Пусть в прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC гипотенуза AB (рис.3).

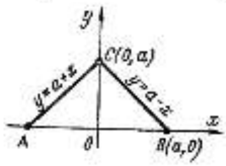


Рис. 3.

Тогда относительно системы координат Oxy уравнения катетов AC и BC будут $y = x + a$ и $y = a - x$. Согласно условию задачи в точке $(x; y)$ треугольника ABC плотность имеет вид $\rho(x; y) = ky$.

1. Вычислим величины массу и координаты центра масс для данного треугольника.

Для массы получим:

$$m = \iint\limits_{ABC} ky\,dx\,dy = k\int\limits_0^a y\,dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = k\int\limits_0^a y\left(x\Big|_{y-a}^{a-y}\right)dy =$$

$$= k\int\limits_0^a y(a - y - y + a)dy = 2k\int\limits_0^a \left(ay - y^2\right)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^3}{3}.$$

Статические моменты:

$$S_x = \iint\limits_{ABC} y \cdot ky\,dx\,dy = k\int\limits_0^a y^2 dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^2(a - y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^4}{6}.$$

$$S_y = \iint\limits_{ABC} x \cdot ky\,dx\,dy = k\int\limits_0^a y\,dy \int\limits_{y-a}^{a-y} x\,dx = 0.$$

Тогда координаты

$$x_c = \frac{S_y}{m} = 0\,,\ \ y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{a}{2}\,.$$

2. Момент инерции относительно гипотенузы AB представляет собой I_x. Поэтому

$$I_x = \iint\limits_{ABC} y^2\,ky\,dxdy = k\int_0^a y^3 dy \int_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int_0^a y^3 (a-y) dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^5}{10}\ .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие геометрические приложения имеет двойной интеграл?

2. Перечислите, при вычислении каких физических величин используется двойной интеграл.

Лекция 7. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача о массе пространственного тела.
2. Определение и свойства тройного интеграла.
3. Вычисление тройного интеграла.

1. Задача о массе пространственного тела. Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ имеется ограниченное тело Q с переменной плотностью $\rho(x;y;z)$. Требуется найти массу этого тела.

Для решения этой задачи, разобьем тело на части Q_1, Q_2, ..., Q_n объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. Предположим, что в каждой малой части Q_i, $i=1,2,...,n$, плотность постоянна и равна $\rho(C_i)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ – произвольная точка Q_i. Тогда масса части Q_i приблизительно будет равна

$$m_i \approx \rho(C_i)\cdot\Delta V_i = \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i .$$

Для массы всего тела Q получим

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i . \qquad (1)$$

Обозначим λ_i, $i=1,2,...,n$, диаметр (наибольшее расстояние между точками области) части Q_i тела Q. И пусть λ – наибольший из диаметров λ_i, т.е. $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i$. Сумма (1) тем точнее, чем меньше каждый из диаметров частей Q_1, Q_2, ..., Q_n. Поэтому массой всего тела можно считать

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i . \qquad (2)$$

2. Определение тройного интеграла. Пусть Q измеримое по Жордану множество пространства $\boldsymbol{R}^3$, на котором задана непрерывная функция $u=f(x;y;z)$. И пусть $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,...,n$, разбиение множества Q на частичные области Q_1, Q_2, ..., Q_n объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. В каждой малой части Q_i, $i=1,2,...,n$, выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$. При этом мелкость разбиения есть $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(Q_i)$, где $d(Q_i)$, $i = 1,2,...,n$, – диаметр частичной области Q_i.

Определение 1. Сумма

$$\sigma_n(\tau, C_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta V_i \qquad (3)$$

называется ***интегральной суммой*** Римана для функции $f(x;y;z)$ на множестве Q, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i \in Q_i$, $i = 1,2,...,n$.

Если функция $z = f(x;y;z)$, ограничена на Q, то для любого разбиения $\tau = \{Q_i\}$, $i = 1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i = \inf_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z),\ M_i = \sup_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z).$$

Определение 2. Суммы

$$s(\tau; f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta V_i,$$

$$S(\tau; f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta V_i$$

называются ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу***, соответствующими разбиению $\tau = \{Q_i\}$ множества Q.

Определение 3. ***Тройным интегралом*** от функции $f(x;y;z)$ по множеству Q называется предел (если он существует) интегральной суммы (3) при $\lambda \to 0$, не зависящий от разбиения $\tau = \{Q_i\}$ и выбора точек $C_i \in Q_i$, $i = 1,2,...,n$.

Обозначается:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dv = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i, \qquad (4)$$

подынтегральная функция $f(x;y;z)$ называется ***интегрируемой*** по измеримому множеству Q, множество Q – ***областью*** интегрирования, x, y, z – ***переменными*** интегрирования, dv – ***элементом*** объема.

Учитывая определение предела, можно записать:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta V_i = I \iff$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \forall\tau=\{Q_i\}\ \ \lambda(\tau)<\delta\quad \left|I-\sigma_n\right|<\varepsilon .$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $dv=dxdydz$. Поэтому можно записать:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz=\iiint\limits_V f(x;y;z)dv .$$

Для тройного интеграла справедливы теоремы существования и критерий интегрируемости Дарбу, как и для двойного интеграла.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). *Если функция $u=f(x;y;z)$ интегрируема на измеримом по Жордану множестве Q , то она ограничена на этом множестве.*

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости). *Если функция $u=f(x;y;z)$ непрерывна на замкнутом измеримом множестве Q то она интегрируема на этом множестве.*

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу). *Для того чтобы ограниченная функция $u=f(x;y;z)$ была интегрируема на измеримом по Жордану множестве $Q\subset\boldsymbol{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое $\delta>0$, что для любого разбиения $\tau=\{Q_i\}$ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ выполнялось неравенство:*

$$S(\tau;f)-s(\tau;f)<\varepsilon .$$

Основные **свойства тройного интеграла** аналогичны соответствующим свойствам двойного интеграла.

1. $\iiint\limits_Q dv=V$, где V – объем области V .

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы на измеримом множестве Q , то функция $\alpha\cdot f(x;y;z)+\beta\cdot g(x;y;z)$ тоже интегрируема на Q и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_Q(\alpha f(x;y;z)+\beta g(x;y;z))dv=$$

$$=\alpha\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv+\beta\iiint\limits_Q g(x;y;z)dv .$$

3 (аддитивность). Если измеримое по Жордану множество Q является объединением измеримых множеств Q_1 и Q_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y;z)$ интегрируема, то функция $f(x;y;z)$ также интегрируема на множестве Q и справедлива формула:

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv = \iiint_{Q_1} f(x;y;z)dv + \iiint_{Q_2} f(x;y;z)dv.$$

4 (монотонность). Если на измеримом множестве Q имеет место неравенство $f(x;y;z) \geq 0$, то

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv \geq 0;$$

если на измеримом множестве Q выполняется неравенство:

$$f(x;y;z) \leq g(x;y;z),$$

то

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv \leq \iiint_Q g(x;y;z)dv.$$

5. Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна на замкнутом измеримом по Жордану множестве Q, объем которого V, то

$$m \cdot V \leq \iiint_Q f(x;y;z)dv \leq M \cdot V,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве Q.

6 (теорема о среднем). Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна на замкнутом измеримом по Жордану множестве Q, объем которого V, то в этой области существует такая точка $P_0(x_0;y_0z_0)$, что

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv = f(x_0;y_0;z_0) \cdot V. \qquad (5)$$

3. Вычисление тройного интеграла. В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных.

Пусть функция $u = f(x;y;z)$ определена на измеримом множестве

$$Q = \{(x;y;z) | (x;y) \in G \subset Oxy,\ z_1(x;y) \leq z \leq z_2(x;y)\},$$

где $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ – непрерывные функции на измеримом множестве G. И пусть каждая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области Q не более чем в двух точках (рис.1), т.е. пространственная область Q является элементарной относительно оси Oz .

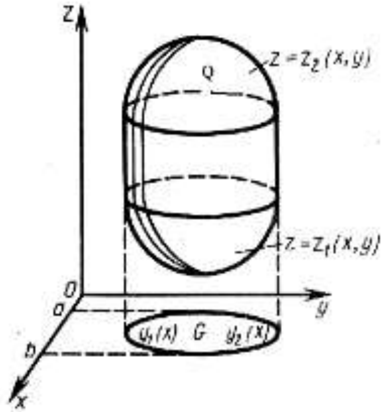


Рис.1.

Теорема 4. *Пусть*

1) существует тройной интеграл

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz;$$

2) $\forall(x;y)\in G$ *существует определенный интеграл*

$$I(x;y)=\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

(при постоянных x *и* y *).*

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint\limits_G I(x;y)dxdy=\iint\limits_G dxdy\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz=\iint\limits_G dxdy\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz. \qquad (6)$$

Без доказательства.

Данная формула позволяет свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области G.

Выражение

$$I(x;y)=\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz \qquad (7)$$

представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и области $G=\{(x;y)|a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_1(x)\}$, по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы о сведении двойного интеграла к повторному, то, переходя от двойного интеграла $\iint\limits_G I(x;y)dxdy$ к повторному интегралу, получаем

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_1(x)} dy\int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz. \qquad (8)$$

Данная формула сводит вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Замечания. 1. Если пространственная область Q более сложная, чем рассматриваемая, то ее необходимо разбить на конечное число таких областей, к которым можно применить формулу (8).

2. Порядок интегрирования в формуле при определенных условиях может быть иным, т.е. переменные x, y, z можно менять местами.

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz$, область Q ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-1=0$.

Решение. Область V проектируется на плоскость Oxy в треугольник (рис.2)

$G=\{(x;y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$.

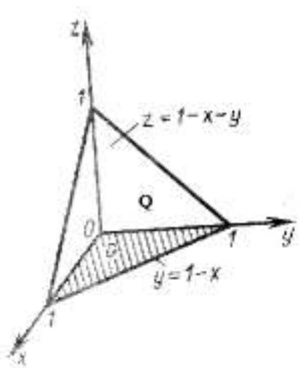


Рис.2.

По формуле (8) имеем

$$\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^1 \left(2 - 3x + x^3\right)dx = \frac{1}{6}\left(2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычислить массу пространственного тела?
2. Дайте определение интегральной суммы.
3. Что называется тройным интегралом.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $u = f(x; y; z)$.
5. Перечислите свойства тройного интеграла.
6. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному, в котором внутренний интеграл является определенным.

Лекция 8. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

1. Формула замены переменных в тройном интеграле.
2. Цилиндрические координаты.
3. Сферические координаты.
4. Приложения тройного интеграла.

1. Формула замены переменных в тройном интеграле. Аналогично случаю двойного интеграла замена переменных в тройном интеграле $\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz$ состоит в переходе от координат x, y, z к новым криволинейным координатам u, v, w по формулам

$$\begin{cases} x = x(u;v;w), \\ y = y(u;v;w), \\ z = z(u;v;w), \end{cases} \tag{1}$$

где $(u;v;w) \in Q^* \subset \boldsymbol{R}^3_{uvw}$. При этом каждая точка $(x;y;z) \in Q \subset \boldsymbol{R}^3_{xyz}$ соответствует по формулам (1) некоторой точке $(u;v;w) \in Q^*$, а каждая точка $(u;v;w) \in V^*$ переходит в некоторую точку $(x;y;z) \in Q$. Другими словами, функции (1) осуществляют отображение области $Q^* \subset \boldsymbol{R}^3_{uvw}$ на область $V \subset \boldsymbol{R}^3_{xyz}$, причем Q и Q^* измеримые по Жордану множества.

Теорема 1. *Пусть 1) Q и Q^* замкнутые ограниченные измеримые по Жордану множества в пространствах $\boldsymbol{R}^3_{xyz}$ и $\boldsymbol{R}^3_{uvw}$;*
2) функция $f(x;y;z)$ ограничена и непрерывна на Q;
3) отображение (1) удовлетворяет условиям:
а) оно взаимно однозначно,
б) функции $x(u;v;w)$, $y(u;v;w)$, $z(u;v;w)$ имеют в области Q^* непрерывные частные производные первого порядка,

в) якобиан $J=\dfrac{D(x;y;z)}{D(u;v;w)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w}\\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0$ *в области* Q^*.

Тогда справедливо равенство

$$\iiint\limits_{Q} f(x;y;z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{Q^*} f\left(x(u;v;w);y(u;v;w);z(u;v;w)\right)|J|dudvdw. \quad (2)$$

Без доказательства.

Формула (2) называется ***формулой замены переменных в тройном интеграле***.

2. Цилиндрические координаты. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно определяется тройкой чисел $(r;\varphi;z)$, где $(r;\varphi)$ – полярные координаты точки M', z – аппликата точки M (рис.1).

Определение 1. Тройка чисел $(r;\varphi;z)$ называется ***цилиндрическими координатами*** точки M.

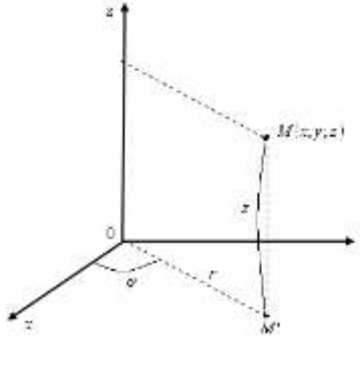


Рис.1. Цилиндрические координаты

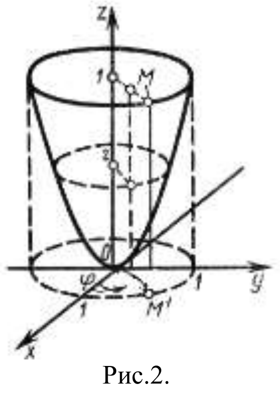


Рис.2.

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к цилиндрическим координатам $(r;\varphi;z)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \tag{3}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Иногда в качестве промежутка изменения φ берётся промежуток $-\pi < \varphi \le \pi$ (рис.1).

Якобиан отображения есть

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(p,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\,.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_Q \left(x^2 + y^2\right) dxdydz\,,$$

где область Q ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$ (рис.2).

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к цилиндрическим координатам. Область Q проектируется в круг $x^2 + y^2 \le 1$ (рис.2).

Поэтому $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le r \le 1$. Постоянному значению r в пространстве $Oxyz$ соответствует цилиндр $x^2 + y^2 = r^2$. Рассматривая пересечение этого цилиндра с областью Q, получаем изменение координаты z от точек, лежащих на параболоиде, до значений тех точек, лежащих на плоскости $z = 1$, т.е. $r^2 \le z \le 1$.

Применяя формулу (2), имеем

$$\iiint\limits_Q \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{\rho^2}^1 r^2 \cdot r dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(r^3 z\right)\Big|_{\rho^2}^1 dr = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{6}\,.$$

3. Сферические координаты. Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно задается тройкой чисел $(r;\theta;\varphi)$, где r – расстояние точки M до точки O (начала координат), θ – угол между лучами OM и Oz, φ – полярный угол точки M' на плоскости Oxy (рис.3).

О п р е д е л е н и е 2. Тройка чисел $(r;\theta;\varphi)$ называется ***сферическими координатами*** точки M.

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к сферическим координатам $(r;\theta;\varphi)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{4}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

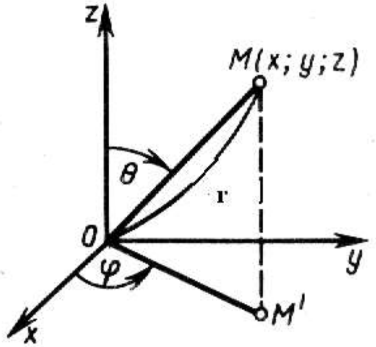


Рис.3. Сферические координаты

Якобиан отображения есть

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta .$$

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область Q есть шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к сферическим координатам. Из вида области Q следует, что $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. В этом случае подынтегральная функция примет вид

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta =$$
$$= r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2 .$$

Тогда $\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \int\limits_0^R dr\int\limits_0^\pi d\theta\int\limits_0^{2\pi} r^2r^2\sin\theta\, d\varphi =$

$$= \int\limits_0^R r^4dr\int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\int\limits_0^R r^4dr\int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta =$$

$$= 4\pi\int\limits_0^R r^4dr = 4\pi\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5} .$$

4. Приложения тройного интеграла. Пусть Q материальное тело с плотностью $\rho(x;y;z)$. Тогда справедливы следующие формулы для вычисления соответствующих величин.

1. Объем тела: $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

2. Масса тела: $m = \iiint\limits_V \rho(x;y;z)dxdydz$

3. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_V y\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x;y;z)dxdydz.$$

4. Координаты центра тяжести тела:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \qquad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}.$$

5. Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy:

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_V y^2\rho(x;y;z)dxdydz,$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x;y;z)dxdydz.$$

6. Моменты инерции тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz:

$$I_x = I_{zx} + I_{xy}, \qquad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{yz} + I_{zx}.$$

7. Момент инерции тела относительно начала координат:

$$I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\rho(x;y;z)dxdydz = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.

2. Какие координаты называются цилиндрическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим?

3. Какие координаты называются сферическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к сферическим?

4. Напишите формулы, используемые в приложениях тройного интеграла.

Лекция 9. n-КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Определение n-кратного интеграла Римана.
2. Классы интегрируемых функций.
3. Сведение n-кратных интегралов к повторным.
4. Формула замены переменной в кратном интеграле.

1. Определение n-кратного интеграла Римана. Пусть множество G измеримо по Жордану в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R}^n$.

Пусть функция $f(x)$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$ определена на измеримом по Жордану множестве G, а τ есть разбиение множества G: $\tau=\{G_i\}$, $i=1,2,...,m$. Возьмем в каждом из множеств G_i по точке $C_i(\xi_1;\xi_2;...;\xi_n)$, $i=1,2,...,m$.

Определение 1. Выражение

$$\sigma_m(\tau,C_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot m(G_i) \qquad (1)$$

называется ***интегральной суммой Римана*** для функции $f(x)$ на множестве G, соответствующей разбиению τ и выборке точек $C_i\in G_i$, $C_i(\xi_1;\xi_2;...;\xi_n)$, $i=1,2,...,m$. Здесь $m(G_i)$ – мера множества G_i.

Если функция $f(x)$, ограничена на G, то для любого разбиения $\tau=\{G_i\}$, $i=1,2,...,n$, определены числа

$$m_i=\inf_{x\in G_i} f(x),\ M_i=\sup_{x\in G_i} f(x).$$

Числа $s(\tau;f)=\sum_{i=1}^{m} m_i\cdot m(G_i)$ и $S(\tau;f)=\sum_{i=1}^{m} M_i\cdot m(G_i)$ называются ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу***, соответствующими разбиению τ.

Определение 2. Число I называется ***пределом интегральной суммы*** σ_m при мелкости разбиения $\lambda(\tau)\to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что для любого разбиения τ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ и для любой выборки точек $C_i(\xi_1;\xi_2;...;\xi_n)$, $i=1,2,...,m$, выполняется неравенство:

$$|I-\delta_m|<\varepsilon .$$

Обозначается: $I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{m} f(\xi_i)\cdot m(G_i)$.

Число I называется n ***-кратным интегралом Римана*** от функции $f(x)$ по множеству G, функция $f(x)$ – ***интегрируемой*** на множестве G.

Обозначается: $\iint\limits_{G}\ldots\int f(x_1;x_2;\ldots;x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$.

В случае $n=2$ получаем двойной интеграл, в случае $n=3$ – тройной.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***существенно неограниченной*** на измеримом по Жордану множестве $G\in\boldsymbol{R}^n$, если она неограничена на любом подмножестве $G^{'}\subset G$, таком, что $m\left(G\setminus G^{'}\right)=0$.

Теорема 1 (критерий интегрируемости). *Для того чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на измеримом по Жордану множестве $G\in\boldsymbol{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось $\delta>0$ такое, что для любого разбиения τ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ разность верхней и нижней сумм Дарбу выполняется неравенство:*

$$S(\tau;f)-s(\tau;f)<\varepsilon .$$

Доказательство теоремы 1 аналогично соответствующему доказательству для определенного интеграла.

2. Классы интегрируемых функций.

Напоминание: Компакт в $\boldsymbol{R}^n$ – это ограниченное и замкнутое множество. Функция $f(x)$, непрерывная на компакте, равномерно непрерывной на этом компакте (теорема Кантора).

Теорема 2. *Непрерывная на измеримом по Жордану компакте функция $f(x)$ интегрируема на этом компакте*.

Доказательство теоремы 2 ничем не отличается от соответствующего доказательства теоремы об интегрируемости функции одной переменной, непрерывной на отрезке.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ ограничена на измеримом компакте $G\in\boldsymbol{R}^n$ и множество ее точек разрыва имеет жорданову меру нуль. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на G*.

► Пусть E есть множество точек разрыва функции $f(x)$ и $m(E)=0$. По определению множества жордановой меры нуль для любого $\varepsilon>0$ найдется такое открытое клеточное множество A, что $A\subset E$ и $m(A)<\dfrac{\varepsilon}{4M}$, где $M=\sup\limits_{x\in G} f(x)$.

На замкнутом ограниченном множестве $G\setminus A$ функция $f(x)$ непрерывна, а поэтому интегрируема (теорема 2).

Для любого $\varepsilon>0$ найдется разбиение $\tau^{'}=\{G_2;G_3;...;G_N\}$ множества $G\setminus A$ такое, что

$$S(\tau^{'};f)-s(\tau^{'};f)=\sum_{k=2}^{N}(M_k-m_k)m(G_k)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $G_1=A\bigcap G$. Тогда множества $\{G_1;G_2;G_3;...;G_N\}$ образует разбиение τ множества G, причем

$$m(G_1)\le m(A)<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

Тогда

$$S(\tau;f)-s(\tau;f)=(M_1-m_1)m(G_1)+\sum_{k=2}^{N}(M_k-m_k)m(G_k)<$$

$$<2M\frac{\varepsilon}{4M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Так как ε произвольное положительное число, то в силу теоремы 1 функция $f(x)$ интегрируема на множестве G. ◄

Все перечисленные **свойства** доказываются так же, как и соответствующие свойства определенного интеграла.

1. Если $f(x)\equiv 1$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, то справедливо равенство

$$\iint\limits_G\ldots\int 1dx_1dx_2...dx_n=m(G).$$

2. Если $f(x)\ge 0$ и $f(x)$ – интегрируемая на измеримом по Жордану множестве G функция, то

$$\iint\limits_G\ldots\int f(x_1;x_2;...;x_n)dx_1dx_2...dx_n\ge 0.$$

3 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x)$ и $g(x)$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, интегрируемы на измеримом по Жордану множестве G, то функция $\alpha \cdot f(x;y;z)+\beta \cdot g(x;y;z)$ тоже интегрируема в G и справедливо равенство

$$\iint\limits_G \ldots \int (\alpha \cdot f + \beta \cdot g) dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \alpha \iint\limits_G \ldots \int f\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n + \beta \iint\limits_G \ldots \int g\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \ .$$

4 (монотонность). Если $f(x)$ и $g(x)$, $x=(x_1;x_2;...;x_n)$, интегрируемые на множестве G и $f(x) \le g(x)$, то

$$\iint\limits_G \ldots \int f\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \le \iint\limits_G \ldots \int g\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \ .$$

5 (о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на измеримом связном компакте $G \in \boldsymbol{R}^n$, то найдется точка $\xi = (\xi_1;\xi_2;...;\xi_n) \in G$ такая, что

$$\iint\limits_G \ldots \int f\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = f(\xi) m(G) .$$

6 (аддитивность). Если $\{G_k\}$, $k=1,2,...,m$, есть разбиение множества G, то функция $f(x)$ интегрируема на множестве G в том и только в том случае, когда она интегрируема на каждом из множеств G_k причем

$$\iint\limits_G \ldots \int f\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \sum_{k=1}^{m} \iint\limits_{G_k} \ldots \int f\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \ .$$

7. Произведение интегрируемых на измеримом множестве G функций есть интегрируемая на множестве G функция,

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на измеримом множестве G, то функция $|f(x)|$ также интегрируема и

$$\left| \iint\limits_G \ldots \int f\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \right| = \iint\limits_G \ldots \int |f| dx_1 dx_2 \ldots dx_n \ .$$

3. Сведение n-кратных интегралов к повторным.

Определение 4. Область $\Omega \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ называется ***элементарной относительно оси*** x_{n+1}, если

$$\Omega = \left\{ x = \left(x_1; x_2; ...; x_n\right) \in G \,\middle|\, \varphi_1\left(x_1; x_2; ...; x_n\right) \le x_{n+1} \le \varphi_2\left(x_1; x_2; ...; x_n\right) \right\},$$

где G – замкнутая ограниченная область в $\boldsymbol{R}^n$ и φ_1 и φ_2 – непрерывные на G функции.

Теорема 4. *Если $\Omega \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ – область, элементарная относительно оси x_{n+1} а $f\left(x_1; x_2; ...; x_{n+1}\right)$ – непрерывная функция на Ω, то справедлива следующая формула:*

$$\iint\limits_{\Omega} ... \int f\left(x_1; x_2; ...; x_{n+1}\right) dx_1 dx_2 ... dx_{n+1} =$$

$$= \iint\limits_{G} dx_1 dx_2 ... dx_n \int\limits_{\varphi_1\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)}^{\varphi_2\left(x_1; x_2; ...; x_n\right)} f\left(x_1; x_2; ...; x_{n+1}\right) dx_{n+1}.$$

Без доказательства.

4. Формула замены переменной в кратном интеграле. Пусть G – ограниченная область $\boldsymbol{R}^n$, отображение $F : G \to \boldsymbol{R}^n$ есть взаимно однозначное и непрерывно дифференцируемое отображение.

Аналитически отображение $F : G \to \boldsymbol{R}^n$ задается с помощью непрерывно дифференцируемых функций:

$$x_1 = \varphi_1\left(u_1; u_2; ...; u_n\right),$$

.... ,

$$x_n = \varphi_n\left(u_1; u_2; ...; u_n\right).$$

Теорема 5. *Пусть взаимно однозначное отображение $F : G \to \boldsymbol{R}^n$ удовлетворяет условиям*

а) производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, 2, ..., n$, ограничены в области G,

б) производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}$, $i, j = 1, 2, ..., n$, равномерно непрерывны в G,

в) якобиан отображения

$$J=\frac{D(\varphi_1;\varphi_2;...;\varphi_m)}{D(u_1;u_2;...;u_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & ... & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & ... & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_m} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_2} & ... & \frac{\partial\varphi_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}>0 .$$

И пусть области G *и* $G^{'}=F(G)$ *измеримы и функция* $f(x)$ *непрерывна в замкнутой области* $G^{'}$. *Тогда справедлива формула замены переменной в кратном интеграле:*

$$\iint\limits_{G^{'}}...\int f(x_1;x_2;...;x_n)dx_1dx_2...dx_n=$$

$$=\iint\limits_{G}...\int f(\varphi_1(u);\varphi_2(u);...;\varphi_n(u))\left|J\right|du_1du_2...du_n ,$$

где $u=(u_1;u_2;...;u_n)$.

Без доказательства.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение интегральной суммы Римана.
2. Что называется n-кратным интегралом Римана?
3. Сформулируйте достаточное условие интегрируемости функций.
4. Перечислите свойства кратного интеграла.
5. Сформулируйте теорему о сведение n-кратных интегралов к повторным.
6. Сформулируйте теорему о формуле замены переменной в кратном интеграле.

Тема 4
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Понятие поверхности.
2. Особые точки поверхности.
3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

1. Понятие поверхности. Пусть функция $f(x;y)$ непрерывно дифференцируема на замкнутом множестве $G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$, т.е. она определена и имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ на множестве $\overline{G}$.

Определение 1. Непрерывное отображение $f:\overline{G} \to \boldsymbol{R}^3$ замыкания $\overline{G}$ плоской области $G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$ в пространство $\boldsymbol{R}^3$ называется ***поверхностью***.

Обозначается: $\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \; z = f(x;y), (x;y) \in \boldsymbol{R}^2_{xy} \right\}$.

Образ множества $\overline{G}$ при отображении f называется носителем поверхности Ω.

Поверхности в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ можно задавать следующими **способами**.

Явное задание поверхности. В этом случае поверхность Ω задается одним из уравнений $z = f(x;y)$, $y = g(x;z)$, $x = h(y;z)$ и является графиком функции.

Обозначается: $\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \; (x;y) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy},\; z = f(x;y) \right\}$

Пример. Поверхность $z = x^2 + y^2$ представляет собой параболоид вращения.

Неявное задание поверхности. В этом случае уравнение поверхности Ω имеет вид $F(x;y;z) = 0$.

Обозначается:

$$\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \; (x;y) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{xy},\; F(x;y;z) = 0 \right\}$$

Пример. Уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

П а р а м е т р и ч е с к о е з а д а н и е п о в е р х н о с т и . В этом случае поверхность Ω задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(u;v), \\ y = y(u;v), \\ z = z(u;v), \end{cases} \tag{1}$$

где $(u;v) \in G$ – ***криволинейные координаты*** или ***параметры*** поверхности.

Обозначается: $\Omega = \left\{ x(u;v), y(u;v), z(u;v) \middle| \ (u;v) \in G \subset \boldsymbol{R}_{uv}^2 \right\}$

Пример. Параметрические уравнения сферы радиуса R с центром в начале координат имеют вид

$$\begin{cases} x = R\cos u \sin v, \\ y = R\sin u \sin v, \\ z = R\cos v, \end{cases}$$

где $0 \le u < 2\pi$, $0 \le v \le \pi$.

В е к т о р н ы й с п о с о б з а д а н и я п о в е р х н о с т и . Пусть поверхность Ω задана параметрическими уравнениями (1). Обозначим $r = \overrightarrow{OM}$ – радиус-вектор точки $M(x;y;z)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$, разложение которого по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеет вид

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} .$$

Подставляя вместо x, y, z выражения (1), получим векторное уравнение поверхности

$$\vec{r}(u;v) = x(u;v) \cdot \vec{i} + y(u;v) \cdot \vec{j} + z(u;v) \cdot \vec{k} . \tag{2}$$

Обозначается: $\Omega = \left\{ \vec{r}(u;v) \middle| \ (u;v) \in G^* \subset \boldsymbol{R}_{uv}^2 \right\}$

Зафиксируем точку v_0. Множество точек поверхности Ω

$$\begin{cases} x = x(u;v_0), \\ y = y(u;v_0), \\ z = z(u;v_0) \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \vec{r} = \vec{r}(u;v_0)$$

называется ***координатными линиями*** на этой поверхности.

Аналогично при фиксированной переменной $u = u_0$ множество линий $\vec{r} = \vec{r}(u_0;v)$ является координатными линиями поверхности Ω.

О п р е д е л е н и е 2. Поверхность Ω называется ***простой***, если через каждую ее точку проходит ровно по одной координатной линии из каждого семейства, т.е. отображение $f:\overline{G}\to \boldsymbol{R}^3$ является взаимно однозначным. Поверхность Ω называется ***замкнутой***, если через каждую ее точку проходит более одной координатной линии из каждого семейства

Пример. Сфера не является простой поверхностью, полусфера является простой поверхностью.

Любая поверхность, заданная явно, является простой.

Для простых поверхностей различным внутренним точкам $(u;v)$ области G соответствуют различные точки $(x;y;z)$ поверхности Ω.

О п р е д е л е н и е 3. Множество точек поверхности Ω соответствующих граничным точкам области G, образуют ***границу*** (***край***) поверхности. Точки поверхности Ω, не принадлежащие краю, называются ее ***внутренними*** точками. Замкнутые поверхности – это те поверхности, которые не имеют края.

О п р е д е л е н и е 4. Говорят, что поверхность Ω является ***непрерывно дифференцируемой***, если функции $x=x(u;v)$, $y=y(u;v)$, $z=z(u;v)$ непрерывно дифференцируемы.

2. Особые точки поверхности. Пусть задана непрерывно дифференцируемая поверхность Ω векторным уравнением (2). И пусть $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ – частные производные вектор функций $\vec{r}=\vec{r}(u;v_0)$ и $\vec{r}=\vec{r}(u_0;v)$, т.е. $\vec{r}_u$ – касательный вектор к координатной линии $\vec{r}=\vec{r}(u;v_0)$, $\vec{r}_v$ – касательный вектор к координатной линии $\vec{r}=\vec{r}(u_0;v)$.

Под ***кривыми на поверхности*** Ω понимаются кривые, задаваемые в виде

$$\vec{r}=\vec{r}(u(t);v(t)), \tag{3}$$

где $t\in[a;b]$, функции $u(t)$ и $v(t)$ непрерывно дифференцируемые функции. Тогда согласно правилу дифференцирования сложной функции двух переменных, имеем

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{r}_u\frac{du}{dt}+\vec{r}_v\frac{dv}{dt}.$$

Отсюда следует, что касательная к любой кривой на поверхности Ω лежит в плоскости векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$.

О п р е д е л е н и е 5. Точка $M_0 = \vec{r}(u_0; v_0)$ поверхности Ω называется ***особой***, если в ней векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ коллинеарны. Точка $M_0 = \vec{r}(u_0; v_0)$ поверхности Ω называется ***неособой***, если в ней векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ неколлинеарны.

В случае коллинеарности векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ векторное произведение равно 0, т.е. $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = 0$. В случае неколлинеаности – $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$.

Пример. Вершина конуса – особая точка. Сфера не имеет особых точек.

О п р е д е л е н и е 6. Поверхность Ω называется ***гладкой***, если она непрерывно дифференцируема и не имеет особых точек. Поверхность называется ***кусочно-гладкой***, если ее можно разбить на конечное число простых гладких частей.

3. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Пусть поверхность задана векторным уравнением (2). В силу неколлинеарности векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в неособой точке $M_0(u_0; v_0)$, в ней однозначно определена плоскость, содержащая эти векторы. Эта плоскость содержит также касательные ко всем непрерывно дифференцируемым кривым на поверхности в $M_0(u_0; v_0)$.

О п р е д е л е н и е 7. Плоскость, проходящая через неособую точку $M_0(u_0; v_0)$ поверхности Ω, параллельно векторам $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$ называется ***касательной плоскостью*** к поверхности Ω в этой точке.

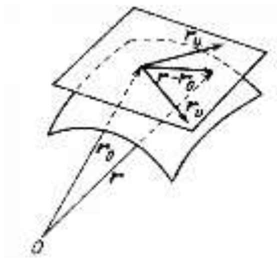


Рис.1.

Пусть $\vec{r}_u^{\,0} = \vec{r}_u(u_0; v_0)$, $\vec{r}_v^{\,0} = \vec{r}_v(u_0; v_0)$, $\vec{r}_0$ – радиус-вектор произвольной точки $M_0(u_0; v_0)$ касательной плоскости к поверхности Ω в точке M_0 (рис.1). Уравнение касательной плоскости в векторной форме находится из равенства нулю смешанного произведения векторов, лежащих в этой плоскости:

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\vec{r}_u\vec{r}_v = 0.$$

Переходя к декартовым координатам x, y, z по формулам (1), имеем:

$$\vec{r} = (x;y;z),\ \vec{r}_0 = (x_0;y_0;z_0),\ \vec{r}_u^{\,0} = (x_u^0;y_u^0;z_u^0),\ \vec{r}_v^{\,0} = (x_v^0;y_v^0;z_v^0).$$

Тогда уравнение касательной плоскости в координатной форме запишется в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0.$$

Если поверхность Ω задана явно уравнением $z = f(x;y)$, то, принимая переменные x и y за координаты поверхности, получим

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$z - z_0 = f_x'(x-x_0) + f_y'(y-y_0),$$

где $z_0 = f(x_0;y_0)$, $f_x' = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0;y_0)}$, $f_y' = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0;y_0)}$.

Ранее было получено такое же уравнение касательной плоскости, основываясь на локальном приближении дифференцируемой функции линейной функцией.

Определение 8. ***Вектором нормали*** к гладкой поверхности Ω в точке M_0 называется вектор $\vec{N}$, перпендикулярный касательной плоскости в точке M_0. Прямая, проходящая через точку M_0 в направлении нормали, называется ***нормальной прямой***.

Определение 9. Единичной нормалью к поверхности Ω называется вектор $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$.

Пусть поверхность задана векторным уравнением

$$\vec{r}(u;v)=x(u;v)\cdot\vec{i}+y(u;v)\cdot\vec{j}+z(u;v)\cdot\vec{k}.$$

Если $M_0(u_0;v_0)$ неособая точка поверхности, то нормальный вектор $\vec{N}$ есть векторное произведение векторов $\vec{r}_u(M_0)$ и $\vec{r}_v(M_0)$:

$$\vec{N}=\vec{r}_u(M_0)\times\vec{r}_v(M_0).$$

Согласно определению векторного произведения в координатной форме имеем

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}.$$

Отсюда вектор нормали имеет вид

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x'_u & z'_u\\ x'_v & z'_v\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}\vec{k}.$$

Тогда каноническое уравнение любой прямой, перпендикулярной поверхности Ω в точке M_0 есть

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{-\begin{vmatrix}x'_u & z'_u\\ x'_v & z'_v\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}}. \tag{4}$$

Обозначим $A=\begin{vmatrix}y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix}$, $B=-\begin{vmatrix}x'_u & z'_u\\ x'_v & z'_v\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix}x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix}$.

Тогда разложение нормального вектора $\vec{N}$ по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ запишется в виде

$$\vec{N}=A\cdot\vec{i}+B\cdot\vec{j}+C\cdot\vec{k}.$$

Единичный вектор нормали $\vec{n}$ запишется как

$$\vec{n}=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\vec{i}+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\vec{j}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\cdot\vec{k}.$$

Пусть поверхность Ω задана уравнением $z=f(x;y)$, где $(x;y)\in G\subset\boldsymbol{R}^2$. Тогда параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x;y). \end{cases}$$

Вектор нормали примет вид

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} y'_x & f'_x \\ y'_y & f'_y \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x'_x & f'_x \\ x'_y & f'_y \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x'_x & y'_x \\ x'_y & y'_y \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & f'_x \\ 0 & f'_y \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} .$$

Отсюда

$$\vec{N} = -f'_x \cdot \vec{i} - f'_y \cdot \vec{j} + \vec{k} .$$

Для единичного нормального вектора $\vec{n}$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеем

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \left(\frac{-f_x'}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}}; \frac{-f_y'}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}} \right).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется поверхностью?

2. Назовите способы задания поверхности. Для каждого способа задания приведите пример.

3. Какие поверхности называются простыми? Что называется границе поверхности, внутренней точкой поверхности?

4. Какие поверхности называются замкнутыми? Приведите пример замкнутой поверхности.

6. Дайте определение особых и неособых точек поверхности. Приведите примеры. Какая поверхность называется гладкой, кусочно-гладкой?

7. Дайте определение нормального вектора к поверхности. Какие координаты имеет нормальный вектор при векторном задании поверхности, при явном задании поверхности?

8. Какая плоскость называется касательной к поверхности? Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности.

9. Какая прямая называется нормалью к поверхностью? Запишите уравнение нормали.

Лекция 2. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

1. Первая квадратичная форма поверхности.
2. Длина кривых на поверхности.
3. Площадь поверхности.

1. Первая квадратичная форма поверхности. Пусть на непрерывно дифференцируемой простой поверхности $\Omega=\left\{\vec{r}(u;v)\middle|\ (u;v)\in G\subset \boldsymbol{R}^2_{uv}\right\}$ задана кривая в векторной форме $\Gamma=\left\{\vec{r}(u(t);v(t))\middle|\ a\le t\le b\right\}$. В точке $M(u;v)$ кривой Γ рассмотрим вектор

$$d\vec{r}=\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv,$$

являющийся касательным вектором к рассматриваемой кривой. Данный вектор лежит в касательной плоскости к поверхности Ω в этой точке. Здесь $du=u'(t)dt$, $dv=v'(t)dt$.

Найдем квадрат длины вектора $d\vec{r}$.

$$(d\vec{r})^2=(\vec{r}_u du+\vec{r}_v dv)^2=\vec{r}_u^{\,2}\,du^2+2\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\,dudv+\vec{r}_v^{\,2}\,dv^2.$$

Обозначим $a_{11}=\vec{r}_u^{\,2}$, $a_{12}=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$, $a_{22}=\vec{r}_v^{\,2}$.

Тогда

$$(d\vec{r})^2=a_{11}du^2+2a_{12}dudv+a_{22}dv^2. \qquad (1)$$

О п р е д е л е н и е 1. Квадратичная форма (1) называется ***первой квадратичной формой поверхности***.

Лемма 1. *Первая квадратичная форма простой поверхности является квазиопределенной, а во всякой неособой точке является положительно определенной.*

► Квазиопределенность формы (1) очевидна, так как $(d\vec{r})^2\ge 0$. Докажем ее положительную определенность в неособой точке.

Поскольку в неособой точке $\vec{r}_u\ne 0$,то $a_{11}=\vec{r}_u^{\,2}\ge 0$.

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right),\ \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right).$$

Возводя эти равенства в квадрат, и сложив, получим тождество Лагранжа:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2\cdot\left|\vec{b}\right|^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2.$$

Подставляя в это равенство $\vec{a}=\vec{r}_u$ и $\vec{b}=\vec{r}_v$, получим:

$$\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|^2=\left|\vec{r}_u\right|^2\cdot\left|\vec{r}_v\right|^2-\left(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\right)^2=a_{11}a_{22}-\left(a_{12}\right)^2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

В неособой точке поверхности векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ неколлинеарны. Следовательно, $\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|^2\neq 0$. Поэтому $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}>0$.

Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма (1) положительно определенная. ◄

Пример. Пусть непрерывно дифференцируемая поверхность имеет явное представление $\Omega=\left\{z=z(x;y)\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y)\in\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}_{xy}\right\}$. Тогда в векторной форме $\vec{r}=\left(x;y;z(x;y)\right)$, $\vec{r}_x=\left(1;0;f_x(x;y)\right)$, $\vec{r}_y=\left(0;1;z_y(x;y)\right)$.

Найдем коэффициенты квадратичной формы:

$$a_{11}=\vec{r}_x^{\,2}=1+z_x^2,\ a_{12}=\vec{r}_x^{\,2}\cdot\vec{r}_y^{\,2}=z_xz_y,\ a_{22}=\vec{r}_y^{\,2}=1+z_y^{2'}.$$

Тогда первая квадратичная форма примет вид:

$$d\vec{r}^{\,2}=\left(1+z_x^2\right)^2dx^2+2z_xz_ydxdy+\left(1+z_y^2\right)^2dy^2.$$

2. Длина кривых на поверхности. Пусть на непрерывно дифференцируемой поверхности $\Omega=\left\{\vec{r}(u;v) \,\middle|\, (u;v)\in G\subset\boldsymbol{R}^2_{uv}\right\}$ задана непрерывно дифференцируемая кривая

$$\Gamma=\left\{\vec{r}(t)=\vec{r}\left(u(t);v(t)\right) \,\middle|\, a\le t\le b\right\}.$$

И пусть $l=l(t)$ – переменная длина дуги этой кривой. Известно, что $\left|\frac{d\vec{r}}{dl}\right|=1$. Поэтому $\left|d\vec{r}\right|=\left|dl\right|$. Тогда

$$\left(dl\right)^2=\left(d\vec{r}\right)^2=a_{11}du^2+2a_{12}dudv+a_{22}dv^2.$$

где $du=u'(t)dt$, $dv=v'(t)dt$.

Таким образом, первая квадратичная форма поверхности равна квадрату дифференциала длины кривой на поверхности.

Дифференциалы дуг координатных кривых, проходящих через точку $M(u;v)$ поверхности, имеем

$$dl_1 = \sqrt{a_{11}} \cdot |du|\,,\; dl_2 = \sqrt{a_{22}} \cdot |dv|\,.$$

Если длина дуги dl отсчитывается от начала рассматриваемой кривой, т.е. $\dfrac{dl}{dt} > 0$, то

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{a_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + a_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,.$$

Отсюда длина L_Γ кривой Γ вычисляется по формуле:

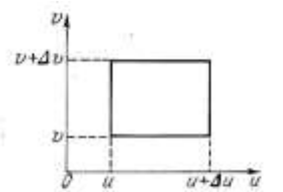
$$L_\Gamma = \int_a^b \frac{dl}{dt}dt = \int_a^b \sqrt{a_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2a_{12}\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + a_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt\,.$$

3. Площадь поверхности. Пусть задана простая поверхность

$$\Omega = \left\{\vec{r}(u;v) \middle|\; (u;v) \in G \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}\right\}.$$

Рассмотрим на поверхности Ω криволинейный параллелограмм, ограниченный координатными линиями u, $u + \Delta u$, v, $v + \Delta v$. Векторы $\vec{r}_u \Delta u$ и $\vec{r}_v \Delta v$ являются касательными к координатным линиям, проходящим через точку $M(u;v)$ поверхности (рис.1). Длины этих векторов отличаются от длин сторон криволинейного параллелограмма на $o(\Delta u)$ и $o(\Delta v)$ соответственно при $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$. Поэтому можно считать, что площадь криволинейного параллелограмма приближенно равна площади dS параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}_u \Delta u$ и $\vec{r}_v \Delta v$ при $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$:

$$dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \cdot \Delta u \Delta v = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\,dudv\,.$$



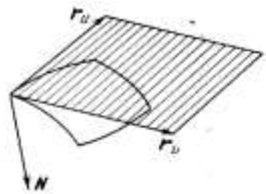


Рис.1.

О п р е д е л е н и е 2. ***Элементом поверхности*** Ω называется выражение вида $dS = \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\,dudv\,.$

Формально будем считать, что площадь простой поверхности Ω равна двойному интегралу

$$S = \iint_G dS = \iint_G \sqrt{a_{11}a_{22} - (a_{12})^2}\,dudv,$$

где область G – измерима по Жордану.

Ниже приведены **свойства** площади поверхности.

1. Если поверхность Ω есть плоская измеримая по Жордану область G, заданная уравнениями $x = u$, $y = v$, $z = 0$, $(u;v) \in G$, то ее площадь S совпадает с плоской мерой Жордана области G: $S = \iint_G dS = \iint_G dudv = m(G)$.

2 (аддитивность). Если область G гладкой перегородкой разбита на области G_1 и G_2 то и поверхность Ω разобьется на простые поверхности Ω_1 и Ω_2, при этом площадь

$$S = S_1 + S_2.$$

3. Для поверхности, являющейся графиком непрерывно дифференцируемой функции на замкнутой измеримой по Жордану области G, т.е. $\Omega = \left\{ z = z(x;y) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}_{xy} \right\}$, то площадь поверхности Ω вычисляется по формуле: $S = \iint_G \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$.

При этом элемент поверхности есть $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$.

4. Ориентация поверхности. Пусть каждой точке $M(x;y;z) \in G \subset \mathbf{R}^3$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r}(M) = (x(M); y(M); z(M))$, где $x(M)$, $y(M)$, $z(M)$ – координаты вектора. В этом случае говорят, что на множестве G задано ***векторное поле***.

Определение 3. Векторное поле $\vec{r}(M) = (x(M); y(M); z(M))$ называется ***непрерывным*** в области G, если его координаты $x(M)$, $y(M)$, $z(M)$ – непрерывные функции в области G.

Пусть гладкая поверхность Ω является границей некоторой области $Q \subset \mathbf{R}^3$.

Определение 4. Единичная нормаль $\vec{n}$, направленная наружу от поверхности Ω, называется ***внешней*** нормалью поверхности Ω, а противоположная ей нормаль $(-\vec{n})$, направленная внутрь поверхности Ω, называется ***внутренней нормалью***.

Определение 5. Поверхность Ω называется ***двухсторонней***, если на ней можно задать непрерывное векторное поле нормалей. Поверхность, на которой не существует непрерывного векторного поля нормалей, называется ***односторонней***.

Основное свойство двусторонних поверхностей: для любой точки $M(x;y;z)\in\Omega$ и для любого замкнутого контура, проходящего по поверхности Ω и не пересекающегося с границей поверхности, выбранное в точке M направление нормали, непрерывно меняясь при движении точки по контуру, не изменит своего направления при возвращении в исходную точку M.

Для **односторонней** поверхности существует такой контур, при обходе которого направление нормали изменится на противоположное.

Пример. Двусторонней поверхностью является сфера, параболоид вращения. Односторонней поверхностью является лист Мёбиуса.

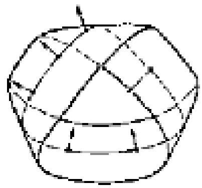


Рис.2. Лист Мёбиуса

На каждой двусторонней поверхности можно задать два непрерывных поля нормалей, противоположных по направлению: $\vec{n}(M)$ и $-\vec{n}(M)$. Значит, двусторонняя поверхность имеет две стороны.

Определение 5. Двусторонняя поверхность Ω называется ***ориентированной***, если для нее определены внешняя $\vec{n}(M)$ и внутренняя $-\vec{n}(M)$ нормали. Выбор определенной стороны называется ***ориентацией поверхности***.

Пример. Пусть гладкая поверхность Ω задана явно

$$\Omega=\left\{(x;y;z)\in\boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y)\in G\subset\boldsymbol{R}^2_{xy},\ z=z(x;y)\right\},$$

где функция $z=f(x;y)$ непрерывно дифференцируема $\forall\ x,y\in G\subset Oxy$.

В этом случае

$$\vec{r} = (x; y; z(x; y)),\ \vec{r}_x = (1; 0; z_x(x; y)),\ \vec{r}_y = (0; 1; z_y(x; y)).$$

Вектор единичной нормали $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{\left|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\right|}$ является ориентацией поверхности Ω.

Поскольку

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = -z_x \cdot \vec{i} - z_y \cdot \vec{j} + \vec{k},$$

то координаты вектора $\vec{n}$ есть:

$$\vec{n} = \left(-\frac{z_x'}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; -\frac{z_y'}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}; \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \right)$$

При этом

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} > 0.$$

Это значит, что ориентация $\vec{n}$ образует острый угол с осью z. Поэтому поверхность Ω, ориентированная единичной нормалью $\vec{n}$, называется ***верхней стороной*** поверхности Ω, а ориентированная противоположной нормалью $(-\vec{n})$ (направленной вниз) – ее ***нижней стороной***.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое выражение называется первой квадратичной формы поверхности?
2. Как определяется площадь поверхности через двойной интеграл?
3. Дайте определение внешней и внутренней нормалей к поверхности, односторонней и двусторонней поверхности. Приведите примеры двусторонних и односторонних поверхностей.
4. Какой угол образует вектор единичной нормали с внешней стороной поверхности?

Лекция 3. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

1. Задача о массе изогнутой пластины.
2. Определение и свойства поверхностного интеграла первого рода.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.
4. Приложения поверхностных интегралов первого рода.

1. Задача о массе изогнутой пластины. Пусть на поверхности Ω непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(x;y;z)$. Требуется определить массу материальной поверхности Ω.

Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. Наибольший из диаметров обозначим $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(\Omega_i)$. Предположим, что в каждой части Ω_i, $i = 1,2,...,n$ плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, где точка $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \in \Omega_i$. Тогда масса i-ой части Ω_i поверхности Ω приблизительно равна

$$m_i \approx \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot \Delta S_i \,.$$

Для массы всей поверхности имеем

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot \Delta S_i \,.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим точное значение массы

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot \Delta S_i \,. \qquad (1)$$

2. Определение поверхностного интеграла первого рода. Пусть в точках некоторой поверхности $\Omega \in \boldsymbol{R}^3$, гладкой или кусочно-гладкой, с площадью S определена непрерывная ограниченная функция $f(x;y;z)$. Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ...,

d_n. В каждой частичной поверхности Ω_i, $i=1,2,...,n$, возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ (рис.1).

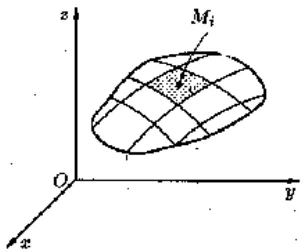


Рис.1.

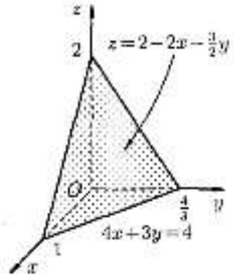


Рис.2.

О п р е д е л е н и е 1. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i \tag{2}$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x;y;z)$ по поверхности Ω.

О п р е д е л е н и е 2. ***Поверхностным интегралом первого рода*** от функции $f(x;y;z)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (2) при $\lambda\to 0$.

Обозначается:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i\ , \tag{3}$$

функция $f(x;y;z)$ называется ***интегрируемой по поверхности*** Ω, поверхность Ω – ***поверхностью интегрирования***, dS – ***элемент поверхности***.

Основными **свойствами** поверхностного интеграла первого рода являются следующие.

1. $\iint\limits_{\Omega} dS = \mathbf{S}$, где $\mathbf{S}$ – площадь поверхности Ω.

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы на поверхности Ω, то функция $\alpha\cdot f(x;y;z)+\beta\cdot g(x;y;z)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega}(\alpha f(x;y;z)+\beta g(x;y;z))dS=\alpha\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dS+\beta\iint\limits_{\Omega} g(x;y;z)dS$$

.

3 (аддитивность). Если поверхность Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $f(x;y;z)$ интегрируема на Ω_1 и Ω_2, то функция $f(x;y;z)$ также интегрируем на поверхности Ω и справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dS=\iint\limits_{\Omega_1} f(x;y;z)dS+\iint\limits_{\Omega_2} f(x;y;z)dS .$$

4 (монотонность). Если на поверхности Ω выполнено неравенство $f(x;y;z)\le g(x;y;z)$, то

$$\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dS\le\iint\limits_{\Omega} g(x;y;z)dS .$$

5 (оценка интеграла). $\left|\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dS\right|\le\iint\limits_{\Omega}|f(x;y;z)|dS$.

6 (теорема о среднем). Если $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, то на этой поверхности существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что

$$\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dS=f(x_0;y_0;z_0)\cdot S ,$$

где S – площадь поверхности Ω.

3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода. Вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла по области G – проекции поверхности Ω на плоскость Oxy .

В е к т о р н о е   з а д а н и е   п о в е р х н о с т и Ω. Пусть $\Omega=\left\{\vec{r}(u;v)\,\middle|\,(u;v)\in G\subset \boldsymbol{R}^2_{uv}\right\}$ – поверхность, G – квадратируемая область, $\vec{r}(x(u;v),y(u;v);z(u;v))$ – непрерывная на замыкании $\overline{G}$ векторная функция, функция $f(x(u;v);y(u;v);z(u;v))=F(u;v)$ задана на поверхности Ω. Согласно определению элемента поверхности Ω (лекция 13, определение 2), имеем

$$\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dS=\iint\limits_{\Omega} F(u;v)\sqrt{a_{11}a_{22}-(a_{12})^2}\,dudv ,$$

где $a_{11}=\vec{r}_u^{\,2}$, $a_{12}=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$, $a_{22}=\vec{r}_v^{\,2}$ – коэффициенты первой квадратичной формы.

Явное задание поверхности Ω. Пусть

$$\Omega=\left\{z=z(x;y)\in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y)\in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}_{xy}\right\}$$

– поверхность, заданная уравнением $z=z(x;y)$. Здесь функция $z(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z_x и z_y в замкнутой области G. И пусть функция $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, и, следовательно, интегрируема на ней. Учитывая, что элемент поверхности есть $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$, имеем

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS=\iint_{G} f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Omega}(x-3y+2z)ds$, где $S=\{(x;y;z)|4x+3y+2z-4=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$ (рис.1).

Решение. Запишем уравнение плоскости в виде $z=2-2x-\frac{3}{2}y$. Тогда $z'_x=-2$, $z'_y=-\frac{3}{2}$.

Подставляя в формулу, имеем

$$\iint_{\Omega}(x-3y+2z)dS=$$

$$=\iint_{G}\left(x-3y+2\left(2-2x-\frac{3}{2}y\right)\right)\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}\,dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\iint_{G}(4-3x-6y)dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1 dx\int_0^{\frac{4}{3}(1-x)}(4-3x-6y)dy=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(4y-3xy-3y^2\right)\Big|_0^{\frac{4}{3}(1-x)}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_0^1\left(\frac{16}{3}(1-x)-4x(1-x)-\frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\left(-\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}-2x^2+4\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

4. Приложения поверхностных интегралов первого рода.

1. Площадь поверхности. Пусть поверхность Ω задана уравнением $z=z(x;y)$, где $z(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z_x и z_y в замкнутой области G. Тогда площадь $\mathbf{S}$ данной поверхности вычисляется по формуле

$$\iint_{\Omega} dS=\mathbf{S}.$$

2. Масса материальной поверхности. Пусть на поверхности Ω непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(x;y;z)$. Тогда масса m материальной поверхности Ω равна

$$m=\iint_{\Omega}\rho(x;y;z)dS.$$

3. Статические моменты материальной поверхности и координаты центра тяжести. Статические моменты материальной поверхности Ω относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам:

$$S_{xy}=\iint_{\Omega} z\cdot\rho(x;y;z)dS,\ S_{yz}=\iint_{\Omega} x\cdot\rho(x;y;z)dS,$$

$$S_{zx}=\iint_{\Omega} y\cdot\rho(x;y;z)dS.$$

Координаты центра тяжести материальной поверхности Ω находятся по формулам:

$$x_c=\frac{S_{yz}}{m},\quad y_c=\frac{S_{zx}}{m},\quad z_c=\frac{S_{xy}}{m}.$$

4. Моменты инерции материальной поверхности. Моменты инерции материальной поверхности Ω относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$M_x=\iint_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\cdot\rho(x;y;z)dS.\ M_y=\iint_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\cdot\rho(x;y;z)dS,$$

$$M_z=\iint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\cdot\rho(x;y;z)dS,$$

относительно начала координат

$$M_0 = \iint\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \cdot \rho(x; y; z) dS \ .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая задача приводит к понятию поверхностного интеграла первого рода?

2. Дайте определение интегральной суммы и поверхностного интеграла первого рода.

3. Перечислите свойства поверхностного интеграла первого рода.

4. Как вычисляется поверхностный интеграл первого рода?

5. Запишите формулы, которые используются в приложениях поверхностного интеграла первого рода.

Лекция 4. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

1. Задача о потоке жидкости.
2. Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода.
3. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.
4. Связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода.

1. Задача о потоке жидкости. Пусть пространство $Oxyz$ заполнено движущейся однородной жидкостью, скорость которой в каждой точке $M(x;y;z)$ задана вектором

$$\vec{V} = P(x;y;z)\cdot\vec{i} + Q(x;y;z)\cdot\vec{j} + R(x;y;z)\cdot\vec{k},$$

где непрерывные функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ – проекции вектора $\vec{V}$ на координатные оси Ox, Oy, Oz соответственно. Требуется найти количество жидкости Π, протекающей за единицу времени t через некоторую ориентированную поверхность Ω.

Будем предполагать, что 1) поверхность Ω не препятствует движению и ограничена контуром Γ, 2) плотность жидкости есть $\rho(x;y;z)=1$.

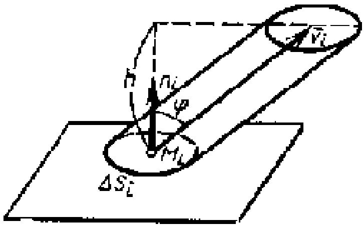
Пусть $\vec{n} = \cos\alpha\cdot\vec{i} + \cos\beta\cdot\vec{j} + \cos\gamma\cdot\vec{k}$ – единичный нормальный вектор поверхности Ω в текущей точке $M(x;y;z)$, $|\vec{n}|=1$, и его направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ являются непрерывными функциями координат x, y, z точек данной поверхности.

Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. Наибольший из диаметров обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$. В каждой части Ω_i выберем точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$. Приближенно можно считать, что при достаточно мелком разбиении поверхности Ω скорость $\vec{V}$ во всех точках элементарной части Ω_i постоянна и равна $\vec{V}_i = \vec{V}(M_i) = \vec{V}(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, а частичные поверхности Ω_i – плоские.

Тогда количество жидкости $\Delta\Pi_i$, протекающей через частичную поверхность Ω_i за единицу времени в направлении вектора $\vec{V}_i = \vec{V}(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, приблизительно равна объему цилиндра с основанием ΔS_i и высотой h_i

$$\Delta\Pi_i \approx \Delta S_i \cdot h_i,$$

где h_i – проекция вектора $\vec{V}_i$ на $\vec{n}_i$.



Г

Рис.1. Задача о потоке жидкости

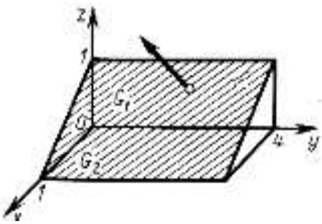


Рис. 2. Пример п.3.

о свойству проекции имеем $h_i = \left|\vec{V}_i\right| \cdot \cos\varphi_i$. Здесь φ_i – угол между $\vec{V}_i$ и $\vec{n}_i$. Тогда

$$h_i = \left|\vec{V}_i\right| \cdot \cos\varphi_i = \left|\vec{V}_i\right| \cdot 1 \cdot \cos\varphi_i = \vec{V}_i \cdot \vec{n}.$$

где $\vec{V}_i \cdot \vec{n}$ – скалярное произведение векторов $\vec{V}_i$ и $\vec{n}_i$.

Поэтому $\Delta\Pi_i \approx \Delta S_i \cdot \left(\vec{V}_i \cdot \vec{n}\right)$.

Количество жидкости через всю поверхность Ω равно

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta\Pi_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cdot \left(\vec{V}_i \cdot \vec{n}_i\right).$$

В координатной форме поток жидкости Π равен

$$\Pi \approx \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \cdot \cos\alpha_i + Q_i \cdot \cos\beta_i + R_i \cdot \cos\gamma_i\right) \cdot \Delta S_i, \qquad (1)$$

где $P_i = P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, $Q_i = Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, $R_i = R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$.

Точное значение потока получим, переходя в выражении (1) к пределу при $\lambda \to 0$:

$$\Pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(P_i \cdot \cos\alpha_i + Q_i \cdot \cos\beta_i + R_i \cdot \cos\gamma_i\right) \cdot \Delta S_i.$$

Поскольку площадь проекции равна произведению площади поверхности на косинус угла между проекцией и поверхностью:

$$\left(\Delta\Omega_i\right)_{yz} = \Delta S_i \cdot \cos\alpha_i,$$

$$\left(\Delta\Omega_i\right)_{zx} = \Delta S_i \cdot \cos\beta_i,$$

$$\left(\Delta\Omega_i\right)_{xy} = \Delta S_i \cdot \cos\gamma_i,$$

то поток можно записать в виде

$$\Pi = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \left(\Delta\Omega_i\right)_{yz} + Q_i \cdot \left(\Delta\Omega_i\right)_{zx} + R_i \cdot \left(\Delta\Omega_i\right)_{xy} .$$

2. Определение и свойства поверхностного интеграла 2-го рода. Пусть задана двусторонняя поверхность

$$\Omega = \left\{ (x;y;z) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, z = z(x;y), (x;y) \in \boldsymbol{R}^2_{xy} \right\}$$

с выбранным направлением единичного вектора нормали $\vec{n}$. Здесь функции $z(x;y)$, z_x, z_y – непрерывно дифференцируемые в некоторой области $G \subset Oxy$. В точках поверхности Ω определена непрерывная функция $R(x;y;z)$. Выбранную сторону поверхности Ω разобьем на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n. Обозначим σ_1, σ_2, ..., σ_n проекции этих частей на плоскость Oxy. При этом площадь проекции $\Delta\sigma_i$, $\Delta\sigma_i = \left(\Omega_i\right)_{xy}$, берется со знаком «$+$», если выбрана внешняя сторона Ω^+ поверхности (нормаль $\vec{n}$ к выбранной стороне составляет с осью Oz острый угол), со знаком «-», если выбрана внутренняя сторона Ω^- поверхности.

Определение 1. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i \qquad (2)$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности.

Обозначим через λ наибольший из диаметров разбиения: $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Omega_i)$.

Определение 2. ***Поверхностным интегралом второго рода*** от функции $R(x;y;z)$ по выбранной стороне поверхности называется предел (если он существует) интегральной суммы (2) при $\lambda \to 0$ и обозначается

$$\iint_{\Omega} R(x;y;z)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot \Delta\sigma_i \,. \tag{3}$$

В этом случае функция $R(x;y;z)$ называется ***интегрируемой по поверхности*** Ω по переменным x и y.

Аналогично определяются поверхностные интегралы второго рода по выбранной стороне поверхности Ω по переменным y и z, z и x от непрерывных функций $P(x;y;z)$ и $Q(x;y;z)$, определенных в точках двухсторонней поверхности Ω, соответственно:

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)dydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot (\Omega_i)_{yz} \,, \tag{4}$$

$$\iint_{\Omega} Q(x;y;z)dzdx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i;\zeta_i) \cdot (\Omega_i)_{zx} \,. \tag{5}$$

Определение 3. ***Общим поверхностным интегралом второго рода*** называется интеграл вида

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz \,. \tag{6}$$

Замечание. Если Ω – замкнутая двусторонняя поверхность, то поверхностный интеграл второго рода по внешней стороне ее обозначается $\oiint\limits_{\Omega^+}$, по внутренней – $\oiint\limits_{\Omega^-}$.

Поверхностный интеграл второго рода обладает следующими **свойствами**.

1. Для общего поверхностного интеграла второго рода справедливо равенство

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz =$$

$$= \iint_{\Omega} P(x;y;z)dydz + \iint_{\Omega} Q(x;y;z)dzdx + \iint_{\Omega} R(x;y;z)dxdy \,.$$

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y;z)$ и $P_2(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне поверхности Ω, то функция

$\alpha \cdot P_1(x;y;z) \pm \beta \cdot P_2(x;y;z)$ также интегрируема по выбранной стороне поверхности Ω и справедливо равенство

$$\iint\limits_{\Omega} (\alpha P_1(x;y;z) \pm \beta P_2(x;y;z))dydz = \alpha \iint\limits_{\Omega} P_1(x;y;z)dydz \pm \beta \iint\limits_{\Omega} P_2(x;y;z)dydz$$

.

3 (аддитивность). Если поверхность Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $P(x;y;z)$ интегрируема по выбранным сторонам Ω_1 и Ω_2, то функция $P(x;y;z)$ также интегрируем по выбранной стороне поверхности Ω и справедлива формула

$$\iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz = \iint\limits_{\Omega_1} P(x;y;z)dydz + \iint\limits_{\Omega_2} P(x;y;z)dydz .$$

4 (оценка интеграла). Если функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ интегрируемы по выбранной стороне двусторонней поверхности Ω и $\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \le M$ во всех точках поверхности, то

$$\left| \iint\limits_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz \right| \le M \cdot \mathbf{S} ,$$

где $\mathbf{S}$ – площадь поверхности.

5 (ориентированность). Если Ω^- противоположная сторона к стороне Ω^+ поверхности Ω, то

$$\iint\limits_{\Omega^+} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz =$$
$$= -\iint\limits_{\Omega^-} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz .$$

3. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода. Вычисление поверхностного интеграла второго рода сводится к вычислению двойного интеграла.

Пусть функция $R(x;y;z)$ непрерывна во всех точках поверхности $\Omega = \left\{ z = z(x;y) \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, (x;y) \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}_{xy} \right\}$, где функция $z(x;y)$ – непрерывно дифференцируема в некоторой области G_{xy} – проекции поверхности Ω на плоскость Oxy. Выберем внешнюю сторону поверхности, т.е. где ее внешняя нормаль образует с осью Oz острый угол. Тогда (из п. 2) площадь проекции частичной области $\Delta\sigma_i = (\Omega_i)_{xy} > 0$, $i = 1,2,...,n$. Так как $\forall(x_i; y_i) \in \Delta\sigma_i$ имеем $z_i = z(x_i; y_i)$, то интегральная сумма (3) для функции $R(x; y; z)$ может быть записана в виде

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;z(\xi_i;\eta_i))\cdot\Delta\sigma_i . \qquad (7)$$

В правой части данного равенства стоит интегральная сумма двойного интеграла от непрерывной в области G_{xy} функции $R(x; y; z(x; y))$. Переходя к пределу в равенстве (7) при $\lambda \to 0$, получим

$$\iint_{\Omega^+} R(x; y; z)dxdy = \iint_{G_{xy}} R(x; y; z(x; y))dxdy . \qquad (8)$$

Данная формула выражает поверхностный интеграл второго рода по переменным x и y через двойной интеграл. Если выбрать нижнюю сторону поверхности, то полученный интеграл берется со знаком «-». Поэтому

$$\iint_{S} R(x; y; z)dxdy = \pm\iint_{G_{xy}} R(x; y; z(x; y))dxdy . \qquad (9)$$

Аналогично, если поверхность Ω задана уравнениями $y = y(x; z)$ или $x = x(y; z)$, то для поверхностных интегралов второго рода по переменным y и z, z и x от непрерывных функций $P(x; y; z)$ и $Q(x; y; z)$, определенных в точках двухсторонней поверхности S соответственно имеем:

$$\iint_{\Omega} Q(x; y; z)dzdx = \pm\iint_{G_{zx}} Q(x; y(x; z); z)dzdx, \qquad (10)$$

$$\iint_{\Omega} P(x; y; z)dydz = \pm\iint_{G_{yz}} P(x(y; z); y; z)dydz. \qquad (11)$$

При вычислении общего поверхностного интеграла второго рода используются формулы (9), (10), (11), проектируя поверхность Ω на все три координатные плоскости:

$$\iint_{\Omega} P(x; y; z)dydz + Q(x; y; z)dzdx + R(x; y; z)dxdz =$$

$$= \pm \iint_{G_{yz}} P(x(y;z);y;z)dydz \pm \iint_{G_{zx}} Q(x;y(x;z);z)dzdx \pm \iint_{G_{xy}} R(x;y;z(x;y))dxdy$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy$ по верхней стороне плоскости $x + z - 1 = 0$, отсеченная плоскостями $y = 0$ и $y = 4$ и лежащая в первом октанте (рис.2).

Решение. По определению

$$\iint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = \pm \iint_{G_{yz}} xdydz \pm \iint_{G_{zx}} ydzdx \pm \iint_{G_{xy}} zdxdy .$$

Найдем значения направляющих косинусов

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 , \ \cos\beta = \frac{0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = 0 ,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 .$$

Интеграл $\iint_{G_{zx}} ydzdx = 0$, так как плоскость S параллельна оси Oy (нормаль и ось Oy перпендикулярны), первый и третий интегралы нужно взять со знаком «+».

По формулам (9) и (11) соответственно находим

$$\iint_{\Omega^+} zdxdy = \iint_{G_{xy}} (1 - x)dxdy = \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - x)dx = 2 ,$$

$$\iint_{\Omega^+} xdydz = \iint_{G_{yz}} (1 - z)dydz = \int_0^4 dy \int_0^1 (1 - z)dz = 2 .$$

Следовательно, $\iint_{\Omega} xdydz + ydzdx + zdxdy = 4$.

4. Связь между поверхностными интегралами первого и второго рода. Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали $\vec{n}$ ориентированной поверхности в произвольной ее точке. Так как площадь проекции равна произведению площади поверхности на косинус угла между проекцией и поверхностью, то интегральную сумму (3) можно преобразовать к виду:

$$\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\cos\gamma_i\cdot\Delta S_i \ .$$

Тогда поверхностный интеграл второго рода можно записать так

$$\iint_{\Omega} R(x;y;z)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\cos\gamma_i\cdot\Delta S_i =$$

$$= \iint_{\Omega} R(x;y;z)\cos\gamma\, dS \ .$$

Аналогично

$$\iint_{\Omega} Q(x;y;z)dzdx = \iint_{\Omega} Q(x;y;z)\cos\beta\, dS \ ,$$

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)dxdy = \iint_{\Omega} P(x;y;z)\cos\alpha\, dS \ .$$

Общий поверхностный интеграл второго рода и поверхностный интеграл первого рода связаны соотношением

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(P(x;y;z)\cos\alpha + Q(x;y;z)\cos\beta + R(x;y;z)\cos\gamma\right)dS \ . \tag{12}$$

Замечание. Если рассматривать функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$ и $R(x;y;z)$ как проекции некоторой векторной функции $\vec{a}(x;y;z)$ на координатные оси:

$$\vec{a}(x;y;z) = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;'y;z)\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k} \ ,$$

то выражение (12) можно записать в виде

$$\iint_{\Omega} P(x;y;z)dydz + Q(x;y;z)dzdx + R(x;y;z)dxdz = \iint_{\Omega} \vec{a}\cdot\vec{n}\, dS \ , \tag{13}$$

где $\vec{a}\cdot\vec{n}$ – скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$ в каждой точке поверхности Ω.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте задачу, которая приводит к понятию поверхностного интеграла второго рода.

2. Дайте определение поверхностного интеграла второго рода и перечислите свойства поверхностного интеграла второго рода.

3. Как вычисляется поверхностный интеграл второго рода?

4. Какой формулой выражается связь между поверхностными интегралами первого и второго рода?

Лекция 5. ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА И СТОКСА

1. Формула Остроградского-Гаусса.
2. Формула Стокса.

1. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностными интегралами второго рода по замкнутой поверхности и тройными интегралами по пространственной области, ограниченной этой поверхностью. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

1) Q - элементарная относительно оси Oz замкнутая область, ограниченная поверхностью Ω;

2) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области Q.

Тогда справедлива формула Остроградского-Гаусса

$$\iint\limits_{\Omega} Pdydz + Qdzdx + Rdxdz = \iiint\limits_{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz \qquad (1)$$

► Пусть Q ограничена снизу поверхностью Ω_1, уравнение которой $z = z_1(x;y)$, сверху – поверхностью Ω_2, уравнение которой $z = z_2(x;y)$, сбоку цилиндрической поверхностью Ω_3, образующие которой параллельны оси Oz (рис.1).

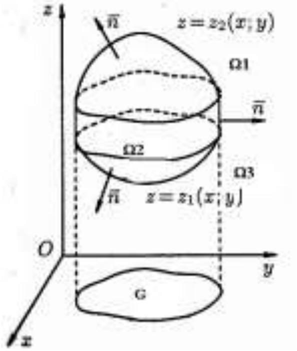


Рис.1.

Функции $z = z_1(x;y)$, $z = z_2(x;y)$ непрерывны в замкнутой области G_{xy} – проекции V на плоскость Oxy, причем $z_1(x;y) \le z_2(x;y)$.

Преобразуем тройной интеграл $\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz$ в поверхностный. Для этого сведем его к повторному интегралу и по формуле Ньютона-Лейбница выполним интегрирование по z.

Получим

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint\limits_{G_{xy}} R(x;y;z_2(x;y))dxdy - \iint\limits_{G_{xy}} R(x;y;z_1(x;y))dxdy.$$

Двойные интегралы заменим равными им поверхностными интегралами, взятыми по внешней стороне поверхностей Ω_1 и Ω_2 соответственно

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_2} R(x;y;z)dxdy - \iint\limits_{\Omega_1} R(x;y;z)dxdy.$$

Меняя в интеграле по Ω_1 сторону поверхности, получаем

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{\Omega_2} R(x;y;z)dxdy + \iint\limits_{\Omega_1} R(x;y;z)dxdy.$$

Интеграл по цилиндрической поверхности Ω_3 равен нулю, т.е. $\iint\limits_{\Omega_3} R(x;y;z)dxdy = 0$. Добавляя его в предыдущее равенство, получим

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{\Omega_2} R(x;y;z)dxdy + \iint\limits_{\Omega_1} R(x;y;z)dxdy + \iint\limits_{\Omega_3} R(x;y;z)dxdy.$$

Отсюда

$$\iiint\limits_Q \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Omega} R(x;y;z)dxdy, \qquad (2)$$

где Ω – поверхность, ограничивающая область Q.

Аналогично доказываются формулы

$$\iiint_Q \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \oiint_\Omega Q(x;y;z)dzdx\,, \qquad (3)$$

$$\iiint_Q \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \oiint_\Omega P(x;y;z)dydz\,. \qquad (4)$$

Складывая почленно равенства (2), (3), (4), получаем формулу Остроградского-Гаусса (1). ◄

Замечания. 1. Формула Остроградского-Гаусса (1) справедлива для любой области Q, которую можно разбить на конечное число элементарных областей.

2. Формулу Остроградского-Гаусса можно использовать для вычисления поверхностных интегралов второго рода по замкнутым поверхностям.

Пример. Вычислить интеграл $\oiint_\Omega xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Ω – внешняя сторона пирамиды, ограниченной плоскостями $x+y+z-1=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (рис.2).

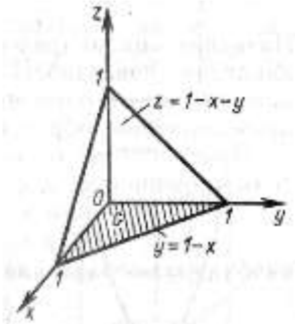


Рис.2.

Решение. Используя формулу Остроградского-Гаусса, имеем

$$\oiint_\Omega xdydz + ydzdx + zdxdy = \iiint_V (1+1+1)dxdydz = 3\iiint_V dxdydz =$$

$$= 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = 3\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(z\Big|_0^{1-x-y} \right) dy = 3\int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} \right) dx =$$

$$3\int_0^1\left(1-x-x(1-x)-\frac{(1-x)^2}{2}\right)dx=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

2. Формула Стокса. Формула Стокса устанавливает связь между поверхностными интегралами и криволинейными интегралами. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть 1)* Ω *– элементарная относительно оси* Oz *поверхность, заданная уравнением* $z=z(x;y)$, *где функции* $z(x;y)$, z_x, z_y *– непрерывны в замкнутой области* G, *проекции* Ω *на* Oxy *;*

2) Γ *– контур, ограничивающий область* Ω, Γ_1 *– его проекция на плоскость* Oxy *, являющаяся контуром, ограничивающим область* G *;*

3) функции $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$ *непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка на выбранной стороне поверхности* Ω.

Тогда имеет место формула Стокса

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_{\Omega^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx.$$

► Преобразуем криволинейный интеграл вида $\oint_\Gamma P(x;y;z)dx$ в интеграл по поверхности согласно схеме $\oint_\Gamma \to \oint_{\Gamma_1} \to \iint_G \to \iint_{\Omega^+}$.

Шаг 1: $\oint_\Gamma \to \oint_{\Gamma_1}$. Так как контур Γ лежит на поверхности Ω, то координаты его точек удовлетворяют уравнению $z=z(x;y)$. Поэтому значения функции $P(x;y;z)$ в точках контура Γ, равны значениям функции $P(x;y;z(x;y))$ в соответствующих точках контура Γ_1, являющегося проекцией Γ. Проекции же соответствующих участков разбиения контуров Γ и Γ_1 на ось Ox совпадают.

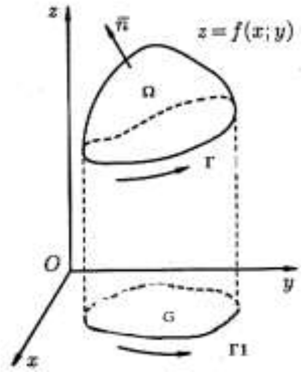


Рис.3.

Значит, совпадают также интегральные суммы для криволинейных интегралов второго рода от функции P по контурам Г и Γ_1. Следовательно, равны и интегралы

$$\oint_{\Gamma} P(x; y; z)dx = \oint_{\Gamma_1} P(x; y; z(x; y))dx .$$

Шаг 2: $\oint\limits_{\Gamma_1} \to \iint\limits_{G}$. Применяя формулу Грина, перейдем к двойному интегралу по области G. Так как подынтегральная функция равна частной производной y от сложной функции, получающейся из $P(x; y; z)$ после подстановки $z(x; y)$ вместо z, то получаем

$$\oint_{\Gamma_1} P(x; y; z(x; y))dx = -\iint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot z_y^{'} \right) dxdy .$$

Шаг 3: $\iint\limits_{G} \to \iint\limits_{\Omega}$. Поскольку Ω^{+} – верхняя сторона поверхности, т. е. $\cos\gamma > 0$ (γ — острый угол между нормалью и осью Oz), то вектор нормали имеет координаты $\vec{N} = (-z_x; -z_y; 1)$. Так как направляющие косинусы нормали пропорциональны соответствующим проекциям:

$$\cos\alpha = -\frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},\ \cos\beta = -\frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}},$$

то $\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \dfrac{-z_y'}{1} = -z_y'$.

Поэтому

$$-\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot z_y'\right)dxdy = -\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy.$$

Учитывая, что $dxdy = \cos\gamma\, dS$, получим

$$-\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dxdy = -\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)dS.$$

Поскольку $\cos\gamma\, dS = dxdy$ и $\cos\beta\, dS = dzdx$, то

$$-\iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)dS = -\iint_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial y}dxdz - \frac{\partial P}{\partial z}dzdx =$$

$$= \iint_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

или

$$\oint_\Gamma P(x;y;z)dx = \iint_{\Omega^+} \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy.$$

Аналогично доказываются при соответствующих условиях равенства

$$\oint_\Gamma Q(x;y;z)dy = \iint_{\Omega^+} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz,$$

$$\oint_\Gamma R(x;y;z)dz = \iint_{\Omega^+} \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx.$$

Складывая почленно три последних равенства, получаем формулу Стокса. ◄

Следствие. *Если* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, *то*

1) $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

2) подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(z; y; z)$, *для которой:*

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU.$$

Без доказательства.

Замечания. 1. Формула Стокса справедлива для любой области, которую можно разбить на конечное число простых областей указанного вида.

2. Формулу Стокса можно записать в виде

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{\Omega^+} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta \right] dS$$

и легко запомнить, используя для подынтегрального выражения определитель

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

а также $\cos\gamma\, ds = dxdy$, $\cos\beta\, ds = dzdx$ и $\cos\alpha\, ds = dydz$.

Пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + zdz$, используя формулу Стокса, где

$$\Gamma = \left\{ (x; y; z) \middle| \, x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0 \right\},$$

взяв в качестве поверхности полусферу

$$\Omega = \left\{ (x; y; z) \middle| \, z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Решение.

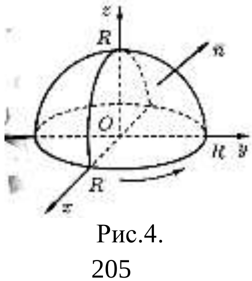


Рис.4.

Так как

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-3x^2y^2,\ \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0,\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=0,$$

по формуле Стокса, получаем

$$\oint\limits_{\Gamma^+} x^2y^3dx+dy+zdz=-3\iint\limits_{\Omega^+} x^2y^2dxdy=-3\iint\limits_{G} x^2y^2dxdy=$$

$$=\begin{bmatrix} x=r\cos\varphi, \\ y=r\sin\varphi, \\ 0\le r\le R, 0\le\varphi\le 2\pi, \\ |J|=r. \end{bmatrix}=-3\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^5\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,dr=$$

$$=-3\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^R r^5dr=-\frac{R^6}{2}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=-\frac{R^6}{8}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos 4\varphi\right)d\varphi=-\frac{R^6}{16}\varphi\Big|_0^{2\pi}+0=-\frac{\pi R^6}{8}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Напишите формулу Остроградского-Гаусса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.

2. Напишите формулу Стокса и сформулируйте условия, при которых эта формула верна.

Тема 5
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Лекция 1. СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ

1. Понятие о задачах векторного анализа и теории поля.
2. Определение скалярного поля.
3. Производная по направлению и градиент.

1. Понятие о задачах векторного анализа и теории поля. При изучении многих процессов и явлений рассматриваются величины, значения которых определяются выбранной точкой пространства и моментом времени. Если такая величина принимает числовые значения, то, с математической точки зрения, задана скалярная функция точки и времени, если векторные – векторная функция точки и времени

$$U = U(P,t),\ \vec{a} = \vec{a}(P,t),\ P \in Q \subset \boldsymbol{R}^3,\ t \in [t_0;t_1]. \qquad (1)$$

Раздел математики, в котором изучаются функции вида (1), называют *векторным анализом*. В физике, электротехнике, теориях тепло- и массопереноса, упругости и пластичности методы векторного анализа используются для изучения ***скалярных*** и ***векторных полей***, которые рассматриваются в качестве математических моделей конкретных процессов и явлений. Если процесс не зависит от времени (***стационарный***), то характеризующая его функция (1) не зависит от параметра t. В данной лекции рассматриваются только стационарные процессы.

2. Определение скалярного поля.

О п р е д е л е н и е 1. ***Стационарным скалярным полем*** называется пространство $\boldsymbol{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке P которого определена скалярная функция

$$U = U(P) = U(x_1, x_2, ..., x_n) = U(\vec{r}), \qquad (2)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. Эта функция, независимо от ее физического смысла, называется ***потенциалом*** скалярного поля.

Пример. Скалярными полями являются поле давлений, поле освещенности, поле температур, поле плотностей зарядов.

Основными характеристиками скалярного поля являются: поверхности (линии) уровня, производная по направлению и градиент.

О п р е д е л е н и е 2. ***Поверхностью уровня*** скалярного поля $U = U(P)$ называется множество точек, в каждой из которых его потенциал $U(P)$ сохраняет постоянное значение.

Уравнение поверхности уровня в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ записывается в виде

$$U(x, y, z) = C. \tag{3}$$

Постоянная величина C принимает такие значения, при которых равенство (3) имеет геометрический смысл.

Если скалярное поле плоское ($\boldsymbol{R}^2$), то рассматривают ***линии уровня***, уравнения которых имеют вид

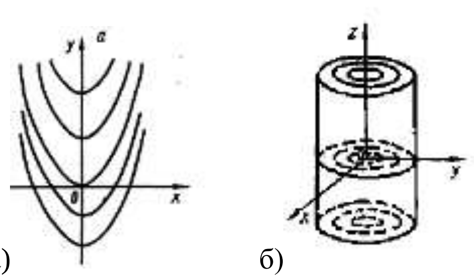
$$U(x, y) = C. \tag{4}$$

Исследование скалярного поля с помощью введенных геометрических характеристик в некоторых случаях дает достаточно наглядное описание соответствующего поля.

Пример. Если потенциал поля задает уровень точек земной поверхности по отношению к уровню моря, то линии (4) – *горизонтали* топографической карты: они соединяют точки с одинаковыми высотами земной поверхности и наглядно описывают рельеф местности. На синоптических картах линии, соединяющие точки с одинаковым давлением, называются *изобарами*, линии равных температур – *изотермами*.

Пример. Найти линии и поверхности уровня следующих полей 1) $U(x, y) = x^2 - 2y$; 2) $U(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Р е ш е н и е . 1. Функция, задающая потенциал поля, зависит от двух переменных. Следовательно, уравнения линий уровня поля (4) имеют вид $x^2 - 2y = C$. С геометрической точки зрения, это множество парабол (рис.1,а), определенное на всей плоскости Oxy .



а) б)

Рис.1.

2. Заданный потенциал определяет скалярное поле во всем пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Согласно соотношению (3), уравнения эквипотенциальных поверхностей имеют вид $x^2+y^2=C$, $C>0$. С геометрической точки зрения, это множество круговых цилиндров (рис.1,б).

3. Производная по направлению и градиент. Пусть в области Q задано скалярное поле $U=U(P)$. Рассмотрим точку $P_0 \in Q$ и какое-либо фиксированное направление, определяемое единичным вектором $\vec{\tau}^{\,0}$. Через точку P_0 проведем прямую l, параллельную вектору $\vec{\tau}^{\,0}$, и выберем на ней точку P (рис.2).

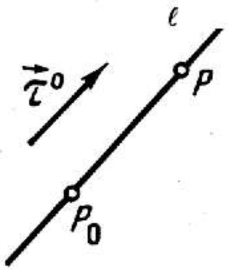


Рис.2.

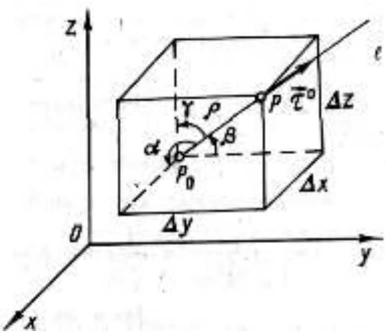


Рис.3.

Средняя скорость изменения потенциала $U(P)$ в направлении $\vec{\tau}^{\,0}$ может быть представлена как отношение приращения потенциала к соответствующей величине перемещения $\Delta l=|P_0P|$:

$$\frac{\Delta U}{\Delta l}=\frac{U(P)-U(P_0)}{\Delta l}.$$

О п р е д е л е н и е 3. ***Производной*** функции $U=U(P)$ в точке P_0 ***по направлению вектора*** $\vec{\tau}^{\,0}$ называется предел (если он существует) отношения приращения функции ΔU к величине перемещения Δl, когда последнее стремится к нулю.

Если перемещение в направлении $\vec{\tau}^{\,0}$ происходит по прямой l, то производная по направлению обозначается $\dfrac{\partial U}{\partial l}$ и

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta l}. \qquad (5)$$

Величина $\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}$ характеризует скорость изменения скалярного поля $U(P)$ в точке P_0 по выбранному направлению. Если $\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}>0$, то скалярное поле в точке P_0 возрастает, в противном случае – убывает.

Пусть скалярное поле $U=U(P)$ в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ задано дифференцируемой функцией $U=U(x;y;z)$. Условие дифференцируемости функции в точке $P_0(x_0;y_0;z_0)$ записывается в виде

$$\Delta U=\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\Delta z+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\right).$$

Разделим данное равенство на Δl. Учитывая, что $\frac{\Delta x}{\Delta l}=\cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta l}=\cos\beta$ и $\frac{\Delta z}{\Delta l}=\cos\gamma$ (рис.2), при $\Delta l\to 0$ получим

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}=\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (6)$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы (рис.3) вектора $\vec{\tau}^{\,0}$.

В случае плоского скалярного поля ($U=U(x,y)$) имеем

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}=\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\sin\alpha. \qquad (7)$$

Замечание. Частные производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ от потенциала поля $U=U(P)$ являются производными функциями $U=U(x,y,z)$ по направлению координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Пример. Найти производную скалярного поля $U=xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, если точка $P_1(2;3;1)$.

***Решение*.** Найдем направляющие косинусы вектора

$\overrightarrow{P_0P_1}=(1;4;0)$, длина которого $\Delta l=\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|=\sqrt{17}$. Имеем

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}\,,\ \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}\,,\ \cos\gamma=0\,.$$

Вычислим значения частных производных функции $U=xyz$ в точке $P_0(1;-1;1)$:

$$\left.\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\right|_{P_0}=\left.yz\right|_{P_0}=-1,\ \left.\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\right|_{P_0}=\left.xz\right|_{P_0}=1,$$

$$\left.\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\right|_{P_0}=\left.xy\right|_{P_0}=-1.$$

По формуле (6) получаем

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial l}=-\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}-1\cdot 0=\frac{3}{\sqrt{17}}\,.$$

О п р е д е л е н и е 4. ***Градиентом*** скалярного поля $U(P)$, $P\in\boldsymbol{R}^3$, в точке P_0 называется вектор $\mathrm{grad}U(P_0)$, проекциями которого на оси декартовой прямоугольной системы координат являются частные производные функции $U(P)$ по соответствующим переменным:

$$\mathrm{grad}U(P_0)=\frac{\partial U(P_0)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U(P_0)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U(P_0)}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (8)$$

Поскольку

$$\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma=$$

$$=\begin{bmatrix}\mathrm{grad}U=\dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}, \\ \vec{\tau}^{\,0}=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}\end{bmatrix}= \qquad (9)$$

$$=\left(\mathrm{grad}U,\vec{\tau}^{\,0}\right)=\left|\mathrm{grad}U\right|\cdot\left|\vec{\tau}^{\,0}\right|\cos\left(\mathrm{grad}U\,\widehat{,}\,\vec{\tau}^{\,0}\right)=$$

$$=\left|\mathrm{grad}U\right|\cos\left(\mathrm{grad}U\,\widehat{,}\,\vec{\tau}^{\,0}\right)=\text{пр}_{\vec{\tau}^{\,0}}\mathrm{grad}U=\text{пр}_l\mathrm{grad}U\ ,$$

то производная по направлению равна проекции вектора $\operatorname{grad} U$ на это направление.

Из соотношения (9) следует, что $\dfrac{\partial U}{\partial l}$ достигает наибольшего значения когда $\cos\left(\operatorname{grad}U \,\hat{,}\, \vec{\tau}^{\,0}\right)$, т.е. когда векторы $\vec{\tau}^{\,0}$ и $\operatorname{grad} U$ одинаково направлены. Следовательно, *направление градиента является направлением наибыстрейшего возрастания скалярного поля в данной точке*. При этом модуль градиента равен наибольшей скорости возрастания потенциала скалярного поля $U(P)$ в данной точке:

$$\max \frac{\partial U}{\partial l} = \left|\operatorname{grad}U\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} . \qquad (10)$$

Определение 4. ***Градиентом*** скалярного поля называется вектор, имеющий направление наибольшего возрастания потенциала поля в данной точке и модуль, равный значению производной от потенциала поля по этому направлению.

Пример. Найти градиент поля $U = x^2 + xyz$ в точке $P_0(1;-1;2)$ и наибольшую скорость изменения потенциала в этой точке.

***Решение*.** Воспользуемся формулами (8) и (10), определив предварительно значения частных производных функции $U = x^2 + xyz$ в заданной точке:

$$\frac{\partial U(P_0)}{\partial x} = (2x + yz)\big|_{P_0} = 0\,, \quad \frac{\partial U(P_0)}{\partial y} = xz\big|_{P_0} = 2\,, \quad \frac{\partial U(P_0)}{\partial z} = xy\big|_{P_0} = -1\,.$$

Тогда

$$\operatorname{grad}U(P_0) = 2j - k\,, \ \max \frac{\partial U}{\partial l} = \sqrt{5}\,.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие поля называются скалярными?
2. Что называется поверхностью и линией уровня скалярного поля?
3. Как определяется производная по направлению скалярного поля?
4. Что называется градиент скалярного поля?

Лекция 2. ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

1. Определение векторного поля.
2. Векторные линии.
3. Поток векторного поля.
4. Дивергенция векторного поля.

1. Определение векторного поля.

Определение 1. ***Стационарным векторным полем*** называется пространство $\boldsymbol{R}^n$ (или его часть – область Q), в каждой точке M которого определен вектор

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=\vec{a}(\vec{r}),$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $M(x_1;x_2;...;x_n)$.

Функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$, с помощью которой задается векторное поле, называется векторной функцией.

Пример. Векторными полями являются поле скоростей движущейся жидкости, гравитационное поле, электростатическое поле, поле градиентов некоторого скалярного поля, магнитное поле и др.

В пространстве $\boldsymbol{R}^3$ векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M(x;y;z)$, определяется тремя скалярными функциями – проекциями вектора $\vec{a}(M)$ на оси координат:

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}$$

или

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=X(x;y;z)\vec{i}+Y(x;y;z)\vec{j}+Z(x;y;z)\vec{k}. \tag{1}$$

Будем считать, что $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$ являются непрерывными функциями от переменных x, y, z, имеющими непрерывные частные производные первого порядка. Тогда векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$ называется ***непрерывно дифференцируемой в области*** Q.

Основными характеристиками векторного поля являются: векторные линии, поток и дивергенция, циркуляция и ротор.

2. Векторные линии.

Определение 2. ***Векторной (силовой) линией*** векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ называется линия Γ, для которой в каждой ее точке M вектор $\vec{a}(M)$ направлен по касательной к данной линии.

Пример. Векторными линиями могут служить линии тока движущейся жидкости. В электростатическом поле векторными линиями являются его силовые линии, в магнитном поле – линии, соединяющие северный и южный полюсы, в поле $\operatorname{grad} U$ – линии, ортогональные к эквипотенциальным поверхностям скалярного поля $U = U(M)$, и т.д.

Если $\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$ – уравнение векторной линии Γ векторного поля $\vec{a}(M)$, то вектор

$$d\,\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$$

в каждой точке направлен по касательной к Γ и потому коллинеарен вектору $\vec{a}(M)$. Значит, их проекции пропорциональны:

$$\frac{dx}{X(x;y;z)} = \frac{dx}{Y(x,y,z)} = \frac{dx}{Z(x,y,z)}\,. \tag{2}$$

Система дифференциальных уравнений (2) определяет векторные линии поля $\vec{a}(M)$. Общий интеграл системы имеет вид

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = c_1, \\ \varphi_2(x,y,z) = c_2. \end{cases} \tag{3}$$

С *геометрической* точки зрения, это два семейства поверхностей, которые в совокупности определяют искомые векторные линии. Если в некоторой области Q для системы уравнений (2) выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши, то через каждую точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ проходит единственная векторная линия

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = \varphi_1(x_0,y_0,z_0), \\ \varphi_2(x,y,z) = \varphi_2(x_0,y_0,z_0). \end{cases}$$

Пример. Найти векторные линии магнитного поля бесконечного проводника, по которому проходит ток силой I.

Решение. Выберем направление оси Oz, совпадающее с направлением тока I. В этом случае вектор напряженности магнитного поля $\vec{\mathrm{H}} = \dfrac{2}{\rho^2}\vec{I}\times\vec{r}$, где $\vec{I} = I\cdot\vec{k}$ – вектор тока; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки $P(x;y;z)$; ρ – расстояние от оси проводника до точки M. Найдем

$$\vec{I}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{j}} & \vec{\mathrm{k}}\\ 0 & 0 & I\\ x & y & z\end{vmatrix}=-yI\cdot\vec{\mathrm{i}}+xI\cdot\vec{\mathrm{j}},$$

$$\vec{\mathrm{H}}=-\frac{2I}{\rho^2}y\cdot\vec{\mathrm{i}}+\frac{2I}{\rho^2}x\cdot\vec{\mathrm{j}}.$$

Система дифференциальных уравнений векторных линий (2) имеет вид

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{0}.$$

Отсюда

$$\begin{cases}xdx+ydy=0,\\ dz=0,\end{cases} \text{ и } \begin{cases}x^2+y^2=c_1,\\ z=c_1,\end{cases}$$

где $c_1\geq 0$. Таким образом, векторными линиями магнитного поля бесконечного проводника являются окружности с центрами на оси Oz.

3. Поток векторного поля. Пусть вектор $\vec{a}(M)$ в некоторой области Q определяет поле линейных скоростей стационарно движущейся несжимаемой жидкости и $\Omega\subset Q\subseteq \boldsymbol{R}^3$ – двусторонняя гладкая незамкнутая ориентированная поверхность. Ранее (тема 4, лекция 4) было показано, что количество жидкости Π, протекающей за единицу времени через поверхность Ω в направлении вектора $\vec{a}(M)$ определяется поверхностным интегралом второго рода от векторной функции $\vec{a}=\vec{a}(M)$ по выбранной стороне поверхности, описывающей поле линейных скоростей движущейся жидкости:

$$\Pi=\iint\limits_{\Omega}(\vec{a},\vec{n})dS,$$

где $\vec{n}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ – вектор единичной нормали к выбранной стороне поверхности.

Определение 3. ***Потоком*** Π векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность Ω называется число, равное значению поверхностного интеграла второго рода:

$$\Pi = \iint\limits_{\Omega} (\vec{a}, \vec{n}) dS .$$

Термин «поток» для введенной скалярной характеристики векторного поля употребляется независимо от физического смысла $\vec{a}(M)$. Поток вектора зависит от выбора стороны поверхности (направления вектора $\vec{n}$); ему присущи и другие свойства, которыми обладает поверхностный интеграл второго рода.

Физический смысл потока. Выберем внешнюю сторону замкнутой поверхности Ω (рис.1), помещенной в поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ линейных скоростей движущейся несжимаемой жидкости. Будем считать, что Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, через которые жидкость соответственно втекает и вытекает из объема, ограниченного поверхностью Ω.

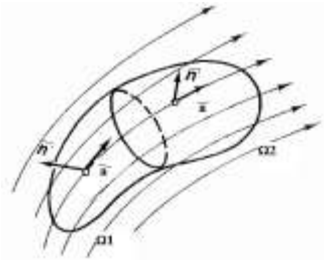


Рис.1.

Поток Π вектора $\vec{a}(M)$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности Ω равен сумме двух сумме двух потоков:

$$\Pi = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Omega} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint\limits_{\Omega_1} (\vec{a}, \vec{n}) dS + \iint\limits_{\Omega_2} (\vec{a}, \vec{n}) dS = \Pi_1 + \Pi_2 .$$

Поток $\Pi_1 < 0$, так как угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$ на поверхности Ω_1 – тупой. Поток $\Omega_2 > 0$, так как указанный угол на поверхности Ω_2 – острый.

Поток Π_1 выражает количество жидкости, поступающей в часть пространства, ограниченную замкнутой поверхностью Ω, за единицу времени, Π_2 – соответственно количество вытекающей из него жидкости. Суммарный поток $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ выражает алгебраическую сумму количеств поступающей и вытекающей жидкости. Если $\Pi > 0$, то жидкости вытекает больше, чем поступает, следовательно, внутри поверхности Ω имеются *источники*. Если $\prod < 0$, то внутри поверхности Ω имеются *стоки*, ибо вытекает меньше жидкости, чем поступает.

Пример. Вычислить поток вектора $\vec{a} = y^2\vec{j} + z\cdot\vec{k}$ через часть поверхности $z = x^2 + y^2$, отсеченную плоскостью $z = 2$ в направлении внешней нормали (рис.2).

Решение. В данном случае любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает данную поверхность Ω в единственной точке (кроме осей Ox и Oy). Значит, поверхность Ω элементарная относительно оси Oz. Уравнение поверхности есть

$$U = U(x, y, z) = z - x^2 - y^2 .$$

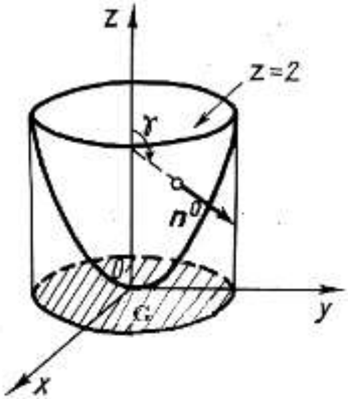


Рис. 2.

Единичный нормальный вектор равен

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}; \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}; \frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \right).$$

(Знак «–» взят потому, что $\frac{\pi}{2} \le \gamma \le \pi$, и, следовательно, $\cos\gamma < 0$.)

Имеем:

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}, \ dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy,$$

$$(\vec{a},\vec{n}) = \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

Тогда искомый поток равен

$$\Pi = \iint_{\Omega} (\vec{a},\vec{n})dS = \iint_{\Omega} \frac{2y^3 - z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dxdy$$

$$= \iint_{G_{xy}} \left(2y^3 - \left(x^2+y^2\right)\right)dxdy = \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, J = r, \\ 0 \le r \le \sqrt{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array}\right] =$$

$$= \iint_{G} \left(2r^3\sin^3\gamma - r^2\right)rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \left(2r^4\sin^3\varphi - r^3\right)dr = -2\pi .$$

4. Дивергенция векторного поля. Пусть в области $Q \subseteq \boldsymbol{R}^3$ задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Рассмотрим частичную область $\Delta Q \subset Q$ объема ΔV, границей которой служит замкнутая поверхность $\Delta\Omega \subset \Omega$. И пусть $M \in Q$. Отношение

$$\frac{\oiint\limits_{\Delta\Omega} (\vec{a},\vec{n})dS}{\Delta V}, \qquad (5)$$

называется ***средним расходом*** жидкости через поверхность $\Delta\Omega$. Если ΔV стремиться к нулю (при этом поверхность $\Delta\Omega$ стягивается в точку M), то средний расход жидкости характеризует расход жидкости в точке $M \in Q$ в единицу времени.

Определение 4. ***Дивергенцией*** (***расходимостью***) $\text{div}\vec{a}(M)$ векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в точке M называется скалярная величина, равная пределу отношения потока векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ через замкнутую поверхность $\Delta\Omega$ к величине ΔV объема, ограниченного этой поверхностью, при $\Delta V \to 0$:

$$\text{div}\,\vec{a}(M) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oiint\limits_{\Delta\Omega} (\vec{a},\vec{n})dS}{\Delta V}, \qquad (6)$$

С учетом *физического* смысла потока векторного поля, дивергенция характеризует отнесенную к единице объема мощность потока, «исходящего» из точки M , т.е. мощность находящегося в точке M источника при $\operatorname{div}\vec{a}(M)>0$ или стока при $\operatorname{div}\vec{a}(M)<0$. Если $\operatorname{div}\vec{a}(M)=0$, то в точке P нет ни источника, ни стока.

Пусть векторное поле есть

$$\vec{a}(M)=X(x,y,z)\vec{i}+Y(x,y,z)\vec{j}+Z(x,y,z)\vec{k}\,.$$

Тогда дивергенция определяется формулой

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial X(M)}{\partial x}+\frac{\partial Y(M)}{\partial y}+\frac{\partial Z(M)}{\partial z}. \qquad (7)$$

Пример. Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{a}=\vec{a}(x,y,z)=y^2\cdot\vec{i}-\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{j}++z\left(3y^2+x\right)\cdot\vec{k}$$

в точках $M_1(-2;1;-2)$, $M_2(7;0;1)$, $M_3(0;0;0)$.

Решение. Заданное поле определено на всем пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Для решения задачи воспользуемся формулой (7). Найдем частные производные от функций, являющихся координатами вектора $\vec{a}(M)$, и их значения в точках M_1, M_2 и M_3:

$$X(x,y,z)=y^2,\,Y(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right),\ Z(x,y,z)=z\left(3y^2+x\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\equiv 0\,,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=-2y\,,\ \frac{\partial Y(M_1)}{\partial y}=-2\,,\ \frac{\partial Y(M_2)}{\partial y}=0\,,\ \frac{\partial Y(M_3)}{\partial y}=0\,,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z}=3y^2+x\,,\ \frac{\partial Z(M_1)}{\partial z}=1,\ \frac{\partial Z(M_2)}{\partial z}=7\,,\ \frac{\partial Z(M_3)}{\partial z}=0\,.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_1)=0-2+1=-1,$$
$$\operatorname{div}\vec{a}(M_2)=0+0+7=7,$$
$$\operatorname{div}\vec{a}(M_3)=0+0+0=0\,.$$

Таким образом, данное поле в точке M_1 имеет сток, в точке M_2 – источник, а в точке M_3 нет ни источника, ни стока.

Теорема 1 (Остроградского–Гаусса). *Если векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(M)$ непрерывно дифференцируема в области Q, ограниченной замкнутой поверхностью Ω, то поток векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ через поверхность Ω в направлении внешней нормали равен тройному интегралу по области Q от дивергенции этого векторного поля*

$$\oiint\limits_{\Omega}(\vec{a},\vec{n})dS=\iiint\limits_{Q}\operatorname{div}\vec{a}\,dxdydz\,. \qquad (8)$$

Данная теорема является аналитическим выражением *теоремы Остроградского-Гаусса в векторной форме*. Для практических приложений удобно ее скалярное представление

$$\oiint\limits_{\Omega}(\vec{a},\vec{n})dS=\iiint\limits_{Q}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dxdydz\,.$$

Пример. Используя теорему Остроградского – Гаусса, вычислить поток векторного поля

$$\vec{a}=\left(\frac{x^2y}{1+y^2}+6yz\right)\cdot\vec{i}+2x\cdot\operatorname{arctg}y\cdot\vec{j}-\frac{2xz(1+y)+1+y^2}{1+y^2}\cdot\vec{k}$$

через внешнюю сторону поверхности $z=1-x^2-y^2$, расположенную над плоскостью $Oxyz$.

Решение. Для того чтобы можно было применить теорему Остроградского–Гаусса, «замкнем» снизу данную поверхность частью плоскости Oxy , ограниченной окружностью $x^2+y^2=1$.

Пусть Q – пространственная область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой поверхностью Ω, состоящей из параболоида вращения $\Omega_1=\left\{(x;y;z)\middle| z=1-x^2-y^2\right\}$ и круга Ω_2 на плоскости Oxy (рис.3).

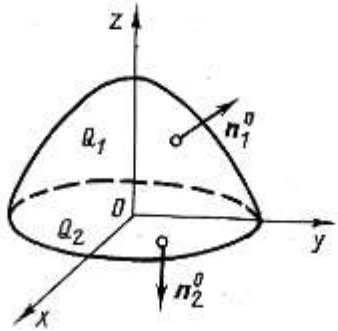


Рис.3.

Найдем $\operatorname{div}\vec{a}(M)$:

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\frac{2xy}{1+y^2}+\frac{2x}{1+y^2}-\frac{2x(1+y)}{1+y^2}\equiv 0\,.$$

На основании формулы Остроградского Гаусса поток Π через замкнутую поверхность Ω равен нулю.

С другой стороны, обозначим через Π_1 и Π_2 потоки через поверхности параболоида и круга соответственно. Тогда по свойству аддитивности

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \iint\limits_{\Omega_1} (\vec{a}, \vec{n}_1) dS + \iint\limits_{\Omega_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) dS = 0.$$

Следовательно, искомый поток равен

$$\Pi_1 = \iint\limits_{\Omega_1} (\vec{a}, \vec{n}_1) dS = -\iint\limits_{\Omega_2} (\vec{a}, \vec{n}_2) dS.$$

На поверхности Ω_2:

$$\vec{a} = \frac{x^2 y}{1 + y^2} \cdot \vec{i} + 2x \cdot \operatorname{arctg} y \cdot \vec{j} - \vec{k}.$$

Поскольку $\vec{n}_2 = -\vec{k}$, то $(\vec{a}, \vec{n}_2) = 1$.

Таким образом, $\Pi_1 = -\iint\limits_{\Omega_2} dS = -\pi \cdot 1^2 = -\pi$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое поле называется стационарным векторным поле?
2. Дайте определение векторных линий.
3. Что называется потоком векторного поля? В чем состоит физический смысл потока?
4. Что называется дивергенцией векторного поля? В чем состоит физический смысл дивергенции?
5. Сформулируйте теорему Остроградского-Гаусса в векторной форме.

Лекция 3. ЦИРКУЛЯЦИЯ И РОТОР ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

1. Циркуляция векторного поля.
2. Ротор векторного поля.
3. Теорема Стокса.

1. Циркуляция векторного. Рассмотрим область $Q \subset \boldsymbol{R}^3$, ориентированную линию Γ, заданную уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, и векторную функцию $\vec{a} = \vec{a}(M)$, определенную на Γ. И пусть $\vec{\tau}$ – единичный вектор касательной к дуге Γ.

О п р е д е л е н и е 1. ***Циркуляцией*** C векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вдоль замкнутой ориентированной кривой Γ называется число, равное значению интеграла:

$$C = \oint\limits_{\Gamma} (a \cdot \vec{\tau}) dl . \qquad (1)$$

Учитывая, что

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = X(x, y, z) \cdot \vec{i} + Y(x, y, z) \cdot \vec{j} + Z(x, y, z) \cdot \vec{k} ;$$

и $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, имеем

$$C = \oint\limits_{\Gamma} (a, \vec{\tau}) dl = \oint\limits_{\Gamma} \text{пр}_{\vec{\tau}} \vec{a}\, dl = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\Gamma} X dx + Y dy + Z dz .$$

Ф и з и ч е с к и й с м ы с л ц и р к у л я ц и и. Рассмотрим векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ как поле $\vec{V} = \vec{V}(M)$ линейных скоростей движущейся жидкости.

Поместим в поток круглую пластинку с лопастями, расположенными по ее ободу – окружности Γ (рис.1).

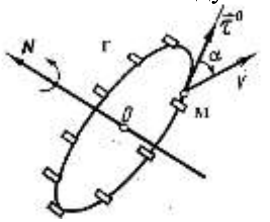


Рис.1

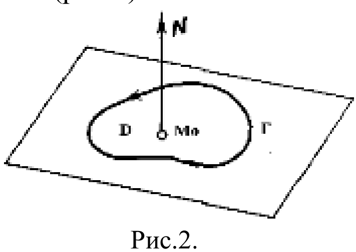


Рис.2.

Частицы жидкости, действуя на лопасти, создают вращательные моменты, суммарное действие которых приводит пластинку во вращение вокруг оси N. Ось N перпендикулярна к плоскости, в которой она расположена, и проходит через центр пластинки. Вращательный момент поля в каждой точке M характеризуется проекцией вектора $\vec{V}(M)$ на вектор $\vec{\tau}(M)$ касательной к окружности Γ, т.е. скалярным произведением $(\vec{V},\vec{\tau})=\text{пр}_{\vec{\tau}}\vec{V}$.

Суммирование вращательных моментов по всему контуру пластинки есть циркуляция вектора $\vec{V}(M)=\vec{a}(M)$. Абсолютная величина циркуляции определяет угловую скорость вращения пластинки вокруг оси N, проходящей через центр окружности Γ. Знак циркуляции показывает, в какую сторону осуществляется вращение относительно ориентации линии Γ. Так как под знаком интеграла (1) стоит скалярное произведение, то C зависит не только от модулей вектора $\vec{a}(M)$, но и от углов α (рис.1) между векторным полем и касательными к кривой Γ: чем меньше углы, тем больше циркуляция. Если во всех точках замкнутого контура Γ вектор $\vec{a}(M)$ ортогонален к Γ, то циркуляция равна нулю и вращательного движения вокруг этого контура не будет. Циркуляция может обращаться в нуль и за счет того, что на одной части контура Γ значение линейного интеграла (1) положительно, а на другой – отрицательно, и эти величины равны по модулю.

Если замкнутый контур Γ есть векторная линия поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$, то $\text{пр}_{\vec{\tau}}\vec{a}=|\vec{a}|$ и

$$C=\oint_{\Gamma}\text{пр}_{\vec{\tau}}\vec{a}\,dl=\oint_{\Gamma}|\vec{a}|\,dl\neq 0$$

при $\vec{a}\neq 0$.

Значит, *циркуляция поля* $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, *равная нулю по любому замкнутому контуру* $\Gamma\subset Q$, *является достаточным условием отсутствия в поле замкнутых векторных линий*.

Итак, дивергенция является локальной скалярной характеристикой векторного поля, устанавливающей наличие и характеризующей интенсивность источников (стоков) в данной точке.

Пример. Найти циркуляцию векторного поля

$$\vec{a}(M)=\vec{a}(x,y,z)=xy\cdot\vec{i}+yz\cdot\vec{j}+xz\cdot\vec{k}$$

вдоль линии $\Gamma=\left\{(x;y;z)\middle|x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\right\}$.

Решение. Согласно формуле (1), имеем

$$C=\oint_{\Gamma}(\vec{a},d\vec{r})=\oint_{\Gamma}Xdx+Ydy+Zdz=\oint_{\Gamma}xydx+yzdy+xzdz\,.$$

Линия Γ – эллипс, полученный в результате пересечения цилиндра $x^2+y^2=1$ и плоскости $x+y+z=1$. Все точки Γ проектируются на плоскость Oxy в окружность $x^2+y^2=1$, параметрические уравнения которой

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases}$$

где $t\in[0;2\pi]$. При этом , те же точки линии Γ лежат на плоскости $z=1-x-y$.

Поэтому параметрические уравнения Γ имеют вид:

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \\ z=1-\sin t-\cos t, \end{cases}$$

где $t\in[0;2\pi]$.

Тогда $dx=-\sin tdt$, $dy=\cos tdt$, $dz=(-\cos t+\sin t)dt$.

Имеем

$$C=\int_0^{2\pi}(-\sin^2 t\cos t+\sin t\cos t(1-\cos t-\sin t)+$$
$$+\cos t(1-\cos t-\sin t)(\sin t-\cos t))dt=-\pi\,.$$

2. Ротор векторного поля. Локальной векторной характеристикой векторного поля, связанной с его вращательной способностью, является ротор (вихрь).

П л о с к и й с л у ч а й. Рассмотрим вначале плоское векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q\subset \boldsymbol{R}^2$, и произвольный контур $\Gamma\subset Q$, окружающий выбранную точку M_0. Площадь плоской площадки, заключенной внутри Γ, обозначим ΔS. Отношение $\frac{1}{\Delta S}\oint_{\Gamma}(\vec{a},d\vec{r})$ представляет собой ***среднюю циркуляцию векторного поля*** $\vec{a}=\vec{a}(M)$ на выбранной площадке. Циркуляция в точке M_0 характеризуется пределом этого отношения при условии, что контур Γ стягивается в точку M_0 и $\Delta S\to 0$

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}). \tag{2}$$

В силовом поле циркуляция выражает работу силового поля при перемещении материальной точки вдоль пути Γ.

П р о с т р а н с т в е н н ы й с л у ч а й. Рассмотрим пространственного векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$, $M \in Q \subset \boldsymbol{R}^3$ Рассмотрим вращательную способность векторного поля в выбранной точке M_0 и заданном направлении $\vec{N}$. Для этого проведем через точку M_0 плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{N}$, и рассмотрим на ней произвольный положительно-ориентированный контур Γ, охватывающий точку M_0. Значение предела (2) характеризует вращательную способность поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в точке M_0 в направлении $\vec{N}$.

О п р е д е л е н и е 2. ***Ротором (вихрем)*** векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ в точке M_0 называется вектор $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0)$, проекция которого на любое направление $\vec{N}$ равна

$$\text{пр}_{\vec{N}} \operatorname{rot} \vec{a}(P_0) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}). \tag{3}$$

Пусть контур Γ, уравнение которого $\vec{r} = \vec{r}(t)$, положительно ориентирован, лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{N}$, и ограничивает область, площадь которой ΔS. В правую часть равенства (3) входят величины, инвариантные относительно выбора системы координат (циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура и площадь плоской области). Поэтому данная формула дает инвариантное определение проекции $\operatorname{rot} \vec{a}(M_0)$ в точке M_0 на направление, определяемое заданным вектором $\vec{N}$.

Теорема 1. *Если векторное поле*

$$\vec{a}(M) = X(x, y, z)\vec{i} + +Y(x, y, z)\vec{j} + Z(x, y, z)\vec{k}$$

непрерывно дифференцируемо в области Q *, то в каждой точке* $M \in Q$ *существует* $\operatorname{rot} \vec{a}(M)$*, определяемый по формуле*

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}. \tag{4}$$

►Существование вектора $\operatorname{rot}\vec{a}(M)$ в области Q следует из непрерывной дифференцируемости векторной функции $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M \in Q$. Зафиксируем точку $M \in Q$ и в качестве направления $\vec{N}$ выберем ось Oz. Через точку M проведем плоскость, перпендикулярную к оси Oz. На этой плоскости рассмотрим произвольную положительно-ориентированную кривую Γ, окружающую точку M. Область, заключенную внутри Γ, обозначим через G, ее площадь – через ΔS (рис.3). Согласно формуле (3), имеем

$$\text{пр}_z \operatorname{rot}\vec{a}(M)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oint_\Gamma(\vec{a},d\vec{r}). \tag{5}$$

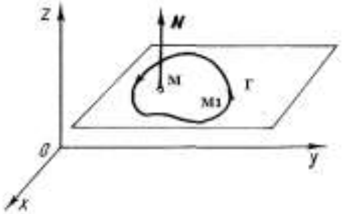


Рис.3.

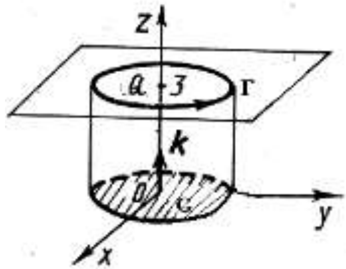


Рис.4.

Интеграл, стоящий в правой части формулы (5), в скалярной форме имеет вид

$$\oint_\Gamma(\vec{a},d\vec{r})=\oint_\Gamma Xdx+Ydy$$

(в рассматриваемой плоскости $dz=0$).

Применяя последовательно формулу Грина и теорему о среднем значении, получим

$$\oint_\Gamma Xdx+Ydy=\iint_G\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)dS=\left(\frac{\partial Y(P_1)}{\partial x}-\frac{\partial X(P_1)}{\partial y}\right)\Delta S\ ,$$

где M_1 – некоторая точка, принадлежащая области G.

Подставляя найденное выражение в формулу (5), имеем

$$\text{пр}_z \operatorname{rot}\vec{a}(M)=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{1}{\Delta S}\left(\frac{\partial Y(M_1)}{\partial x}-\frac{\partial X(M_1)}{\partial y}\right)\Delta S=\frac{\partial Y(M)}{\partial x}-\frac{\partial X(M)}{\partial y}\ .$$

Аналогично определяются проекции $\operatorname{rot}\vec{a}(P)$ на оси Ox и Oy:

$$\text{пр}_x \text{rot}\vec{a}(M) = \frac{\partial Z(M)}{\partial y} - \frac{\partial Y(M)}{\partial z},$$

$$\text{пр}_y \text{rot}\vec{a}(M) = \frac{\partial X(M)}{\partial z} - \frac{\partial Z(M)}{\partial x}. \blacktriangleleft$$

Замечание. Символическая форма записи $\text{rot}\,\vec{a}$ имеет вид

$$\text{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Пример. Найти ротор вектора

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z) = \left(x^2 + y^2\right)\vec{i} + \left(y^2 + z^2\right)\vec{j} + +\left(z^2 + x^2\right)\vec{k}$$

в произвольной точке поля.

Решение. Заданная векторная функция непрерывно дифференцируема на всем пространстве $\boldsymbol{R}^3$. Так как

$$X = x^2 + y^2,\ Y = y^2 + z^2,\ Z = z^2 + x^2,$$

то

$$\text{rot}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & y^2 + z^2 & x^2 + z^2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2z \cdot \vec{i} - 2x \cdot \vec{j} - 2y \cdot \vec{k} = -2\left(z \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j} + y \cdot \vec{k}\right).$$

3. Теорема Стокса.

Теорема 2 (Стокса). *Циркуляция C непрерывно дифференцируемого векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(M)$ по замкнутому положительно-ориентированному контуру Γ равна потоку ротора этого поля через любую гладкую поверхность Ω, опирающуюся на контур Γ:*

$$C = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, d\vec{r}) = \iint_{\Omega} (\text{rot}\vec{a}, \vec{n})\, dS. \tag{7}$$

Замечания. 1. Формулу Стокса можно записать в скалярной форме относительно декартовой прямоугольной системы координат:

$$C = \oint_{\Gamma} Xdx + Ydy + Zdz = \iint_{G} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \cos\alpha dS +$$

$$+ \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \cos\beta dS + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \cos\gamma dS \, .$$

2. Из теоремы Стокса следует, что если в поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$ на контур Γ опираются две поверхности Ω_1 и Ω_2, то потоки $\mathrm{rot}\vec{a}$ через эти поверхности равны.

3. В случае если $\vec{a} = \vec{a}(M)$ – плоское поле, формула Стокса обращается в формулу Грина (в качестве поверхности Ω может быть взята плоская область G, ограниченная Γ). В связи с этим формула Грина имеет следующее векторное толкование: *циркуляция плоского векторного поля равна потоку его ротора через область, лежащую внутри контура*.

Пример. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$a = y \cdot \vec{i} + x^2 \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

по контуру Γ: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 3$ непосредственно и с помощью формулы Стокса.

Решение. Линия Γ – окружность радиусом 2 с центром в точке $(0;0;3)$, лежащая в плоскости (рис.4). Ориентацию на Γ выберем в соответствии с рис.1.

яПараметрические уравнения линии Γ имеют вид

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = 3, \end{cases}$$

где $t \in [0;2\pi]$.

Для вычисления циркуляции по формуле Стокса выберем какую-нибудь поверхность Ω, «натянутую» на Γ. Возьмем в качестве Ω круг, границей которого является окружность Γ. Согласно выбранной ориентации контура, в качестве нормали $\vec{n}$ к кругу Ω возьмем вектор $\vec{k}$. По формуле Стокса ротор заданного вектора $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x^2 & -z \end{vmatrix} = (2x-1)\cdot\vec{k} = \vec{a}_1 .$$

С другой стороны

$$C = \oint_{\Gamma} (\vec{a}_1, d\vec{r}) = \iint_{\Omega} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}) dS = \iint_{\Omega} (2x-1)\cos\gamma\, dS = \iint_{G_{xy}} (2x-1) dxdy =$$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, J = r, \\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(2r\cos\varphi - 1) dr = -4\pi .$$

Вопросы для самоконтроля

1.Что называется циркуляцией векторного поля?

2. В чем состоит физический смысл циркуляции?

3. Что называется ротором векторного поля?

4. Сформулируйте теорему о выражении ротора через координатные функции векторного поля.

5. Сформулируйте теорему Стокса.

Лекция 4. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

1. Потенциальное векторное поле.
2. Соленоидальное векторное поле.
3. Гармоническое поле.
4. Операторы Гамильтона и Лапласа.

1. Потенциальное векторное поле.

Определение 1. Векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, называется ***потенциальным (безвихревым)***, если существует такая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)$ такая, что

$$\vec{a}=\mathrm{grad}U(M),\ \forall M\in Q. \qquad (1)$$

Функция $U(M)$ называется в этом случае ***потенциалом*** векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$.

Пример. Потенциальными полями являются магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, поле притяжения данной массы к неподвижному центру (гравитационное поле), электрическое поле напряженности точечного заряда и др.

Потенциальное поле является наиболее простым среди векторных полей, ибо оно определяется одной скалярной функцией $U=U(M)$ независимо от размерности пространства, в котором задано векторное поле. Например, в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ в случае произвольного векторного поля

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=X(x,y,z)\cdot\vec{i}+Y(x,y,z)\cdot\vec{j}+Z(x,y,z)\cdot\vec{k},$$

в случае потенциального векторного поля

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=\mathrm{grad}U(M)=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}. \qquad (2)$$

Ниже приведены **свойства** потенциальных векторных полей.

1. *Если векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, потенциально, то его потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

►Допустим, что для поля $\vec{a}=\vec{a}(M)$ существует два потенциала $U_1(M)$ и $U_2(M)$, т.е. $\vec{a}(M)=\mathrm{grad}U_1(M)$ и $\vec{a}(M)=\mathrm{grad}U_2(M)$.

Тогда

$$\operatorname{grad}(U_1-U_2)=\frac{\partial(U_1-U_2)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial(U_1-U_2)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial(U_1-U_2)}{\partial z}\vec{k}\equiv 0\,.$$

Так как вектор $\operatorname{grad}(U_1-U_2)$ тождественно равен нулю, то все его проекции тоже равны нулю. Следовательно, функция U_1-U_2 не зависит ни от одной из переменных, т.е. $U_1-U_2=\mathrm{const}$, откуда и $U_1=U_2+\mathrm{const}$. ◄

2. *Если векторное поле* $\vec{a}=\vec{a}(M)$ *задано в односвязной области* Q*, то необходимым и достаточным условием его потенциальности является обращение в нуль ротора поля в любой точке* $M\in Q$:

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0\,,\ \forall M\in Q\,. \qquad (3)$$

► *Необходимость*. Если $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, – потенциальное векторное поле, то по определению существует непрерывно дифференцируемая скалярная функция $U(M)=U(x,y,z)$ такая, что

$$\vec{a}(M)=\operatorname{grad}U(M)=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\,.$$

Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=\operatorname{rot}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial z}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial y}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 U}{\partial z\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}\right)\vec{k}\equiv 0.$$

Достаточность. Если для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(M)=\vec{a}(X,Y,Z)$ выполнено условие (3), то, на основании формулы Стокса, имеем

$$\oint_{\Gamma}\vec{a}\cdot d\vec{r}=\oint_{\Gamma}Xdx+Ydy+Zdz=0$$

для любой замкнутой кривой $\Gamma\subset Q$.

Согласно теореме о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, существует скалярная функция

$U=U(x,y,z)$, полный дифференциал которой стоит под знаком интеграла, т.е.

$$X(x,y,z)dx+Y(x,y,z)dy+Z(x,y,z)dz=dU(x,y,z)=$$
$$=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\,.$$

Следовательно,

$$X(x,y,z)=\frac{\partial U}{\partial x}\,,\ Y(x,y,z)=\frac{\partial U}{\partial y}\,,\ Z(x,y,z)=\frac{\partial U}{\partial z}\,, \text{ т.е.}$$

$$\vec{a}=\vec{a}(M)=X\cdot\vec{i}+Y\cdot\vec{j}+Z\cdot\vec{k}=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=\mathrm{grad}U(M).$$

По определению поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ является потенциальным. ◄

Пример. Установить потенциальность векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(P)=2xyz\cdot\vec{i}++x^2z\cdot\vec{j}+x^2y\cdot\vec{k}$.

Р е ш е н и е . Имеем

$$\mathrm{rot}\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz & x^2z & x^2y\end{vmatrix}=$$

$$=\left(x^2-x^2\right)\vec{i}+(2xy-2xy)\vec{j}+(2xz-2xz)\vec{k}\equiv 0\,.$$

Значит, заданное поле потенциально.

2. Соленоидальное векторное поле.

О п р е д е л е н и е 2. Векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, называется ***соленоидальным (трубчатым)***, если

$$\mathrm{div}\vec{a}(\mathrm{M})=0\quad \forall M\in Q\,. \qquad (4)$$

Пример. Соленоидальными полями являются магнитное поле, создаваемое прямолинейным проводником, вдоль которого проходит электрический ток, поле линейных скоростей вращающегося твердого тела, поле линейных скоростей стационарного потока несжимаемой жидкости, не имеющее источников и стоков, и др.

Согласно определению, соленоидальные поля не содержат ни источников, ни стоков.

Ниже приведены **свойства** соленоидальных полей.

1. Из формулы Остроградского – Гаусса следует, что если векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$ соленоидальное, то поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую замкнутую поверхность Ω равен нулю.

2 (***принцип сохранения интенсивности векторной трубки***). Потоки соленоидального векторного поля через различные сечения векторной трубки равны между собой.

3. В соленоидальном векторном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни оканчиваться внутри поля. Они либо замкнуты, либо начинаются и оканчиваются на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

4. В односвязной области в случае соленоидального векторного поля поток вектора $\vec{a}(M)$ через любую поверхность Ω, опирающуюся на замкнутый контур Γ, зависит не от вида этой поверхности, а только от самого контура Γ.

Пример. Установить, являются ли соленоидальными следующие поля:

1) $\vec{a}_1(P)=x\left(z^2-y^2\right)\cdot\vec{i}+y\left(x^2-z^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(y^2-x^2\right)\cdot\vec{k}$;

2) $\vec{a}_2(P)=y^2\cdot\vec{i}-\left(x^2+y^2\right)\cdot\vec{j}+z\left(3y^2+1\right)\cdot\vec{k}$.

Р е ш е н и е . 1. Имеем

$$\operatorname{div}\vec{a}_1(M)=z^2-y^2+x^2-z^2+y^2-x^2\equiv 0,$$

Следовательно, поле $\vec{a}_1(M)$ соленоидально.

2. Имеем $\operatorname{div}\vec{a}_2(M)=-2y+3y^2+1\not\equiv 0$. Значит, поле $\vec{a}_2(M)$ не является соленоидальным.

3. Гармоническое поле.

О п р е д е л е н и е 3. Векторное поле $\vec{a}=\vec{a}(M)$, $M\in Q$, называется ***гармоническим (лапласовым)***, если оно является как потенциальным, так и соленоидальным, т.е.

$$\operatorname{rot}\vec{a}(M)=0,\ \operatorname{div}\vec{a}(M)=0. \qquad (5)$$

Если вектор $\vec{a}(M)$ удовлетворяет первому из условий, то существует скалярная функция $U=U(M)$, такая, что $\vec{a}(M)=\operatorname{grad}U(M)$, и тогда второе из условий приводит к уравнению Лапласа

$$\operatorname{div}\vec{a}(M)=\operatorname{div}\operatorname{grad}U(M)=0$$

или

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0\,. \qquad (6)$$

Таким образом, гармоническое векторное поле описывается скалярной функцией $U=U(M)$, которая является в области Q решением уравнения Лапласа и называется ***гармонической функцией***.

Пример. Гармоническими функциями являются

1) $U(x,y,z)=Ax+By+C$ (задана в любой конечной области);

2) $U(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (задана в любой области, не содержащей начала координат).

4. Операторы Гамильтона и Лапласа.

Определение 4. ***Оператором Гамильтона*** или оператором «набла» называется символический вектор

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,, \qquad (7)$$

проекции которого на оси прямоугольной декартовой системы координат представляют собой символы частного дифференцирования по соответствующим переменным:

$$\nabla_x=\frac{\partial}{\partial x},\ \nabla_y=\frac{\partial}{\partial y},\ \nabla_z=\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Оператор ∇ не является вектором в классическом понимании этого слова, но с его помощью могут быть наглядно представлены основные операции векторного анализа: градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля. Для этого определяется «произведение» оператора ∇ и скалярной функции $U(x,y,z)$ как сумму произведений соответствующих его проекций ∇_x, ∇_y, ∇_z и этой функции.

Под ***«произведениями»*** $\nabla_x U$, $\nabla_y U$, $\nabla_z U$ понимают нахождение соответствующих частных производных от функции $U(x,y,z)$, т.е.

$$\nabla_x U=\frac{\partial U}{\partial x},\ \nabla_y U=\frac{\partial U}{\partial y},\ \nabla_z U=\frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

В этом случае произведение ∇U определяет вектор

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \mathrm{grad}U .$$

Скалярное произведение символического вектора (оператора ∇) и вектора $\vec{a}(M) = X(x,y,z)\cdot\vec{i} + Y(x,y,z)\cdot\vec{j} + Z(x,y,z)\cdot\vec{k}$ задается формулой

$$\nabla\cdot\vec{a} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right), \left(X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} + Z\cdot\vec{k}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \mathrm{div}\,\vec{a} .$$

Векторное произведение символического вектора ∇ и вектора $\vec{a}(M)$ определяется как

$$\nabla\times a = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\vec{k} = \mathrm{rot}\,\vec{a} .$$

Таким образом, с помощью оператора Гамильтона основные понятия векторного анализа, получаемые с помощью операции дифференцирования, можно выразить в виде операций, применяемых в векторной алгебре.

Отметим, что при использовании оператора ∇ надо учитывать следующие его свойства.

– Линейность оператора ∇ .

– Действие оператора ∇ на произведение двух функций (векторных или скалярных) осуществляется аналогично правилу дифференцирования произведения двух сомножителей.

– Оператор ∇ действует на все функции, стоящие после него, и не действует на функции, записанные перед ним.

Свойства операций векторного анализа, полученные с помощью оператора ∇ следующие.

Пусть $U_1(x,y,z)$, $U_2(x,y,z)$ – скалярные функции, $\vec{a}(M)$, $\vec{b}(M)$ – векторные функции, α , β – постоянные.

1. $\nabla(\alpha U_1 \pm \beta U_2) = \alpha\nabla U_1 \pm \beta\nabla U_2$, или

$\mathrm{grad}(\alpha U_2 \pm \beta U_2) = \alpha\cdot\mathrm{grad}U_1 \pm \beta\cdot\mathrm{grad}U_2$.

2. $\nabla \cdot \left(\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}\right) = \left(\alpha\nabla\vec{a}\right) \pm \left(\beta\nabla\vec{b}\right) = \alpha\left(\nabla\vec{a}\right) \pm \beta\left(\nabla\vec{b}\right)$, или $\operatorname{div}\left(\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}\right) = \alpha \cdot \operatorname{div}\vec{a} \pm \beta \cdot \operatorname{div}\vec{b}$.

3. $\nabla \times \left(\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}\right) = \alpha \cdot \nabla \times \vec{a} \pm \beta \cdot \nabla \times \vec{b} = \alpha\left(\nabla \times \vec{a}\right) \pm \beta\left(\nabla \times \vec{b}\right)$, или $\operatorname{rot}\left(\alpha\vec{a} \pm \beta\vec{b}\right) = \alpha\operatorname{rot}\vec{a} \pm \beta\operatorname{rot}\vec{b}$.

4. $\nabla\left(U_1 \cdot U_2\right) = U_1 \cdot \nabla U_2 + U_2 \cdot \nabla U_1$, или $\operatorname{grad}\left(U_1 \cdot U_2\right) = U_1 \cdot \operatorname{grad}U_2 + U_2 \cdot \operatorname{grad}U_1$.

5. $\nabla \cdot \left(U \cdot \vec{a}\right) = U \cdot \left(\nabla \cdot \vec{a}\right) + \nabla U \cdot \vec{a}$, или $\operatorname{div}\left(U\vec{a}\right) = U\operatorname{div}\vec{a} + \left(\vec{a}, \operatorname{grad}U\right)$.

6. $\nabla \times \left(U\vec{a}\right) = U\left(\nabla \times \vec{a}\right) + \nabla U \times \vec{a}$, или $\operatorname{rot}\left(U\vec{a}\right) = U\operatorname{rot}\vec{a} + \operatorname{grad}U \times \vec{a}$.

7. $\left(\nabla \cdot \vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a}\right) - \left(\vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}\right)$, или $\operatorname{div}\vec{a} \times \vec{b} = \left(\vec{b} \cdot \operatorname{rot}\vec{a}\right) - \left(\vec{a} \cdot \operatorname{rot}\vec{b}\right)$.

Операции grad, div, rot называются ***дифференциальными операциями первого порядка***. В приложениях векторного анализа используются также ***дифференциальные операции второго порядка***. Так, $\operatorname{grad} U$, $\operatorname{rot}\vec{a}$ – векторные величины, поэтому к ним можно применить операции div и rot, а к числовой величине $\operatorname{div}\vec{a}$ – операцию grad и т.д. Существует пять дифференциальных операций второго порядка:

1) $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}U\right) = \nabla \cdot \nabla\vec{a}$;
2) $\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad}U\right) = \nabla \cdot \nabla U$;
3) $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right) = \nabla \cdot \nabla \times \vec{a}$;
4) $\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{a}\right)$;
5) $\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{a}\right) = \nabla\left(\nabla, \vec{a}\right)$.

Результаты второй и третьей из приведенных выше операций тождественно равны нулю (как векторное произведение коллинеарных векторов и смешанное произведение, содержащее в качестве сомножителей два равных вектора).

Наиболее широкое применение имеет первая из дифференциальных операций второго порядка: скалярный квадрат символического вектора ∇, т.е. выражение

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (8)$$

Оператор (8) называется ***оператором Лапласа*** (или ***лапласи-***

аном) и обозначают Δ. Уравнение Лапласа (8) с помощью оператора Лапласа запишется в виде

$$\Delta U = 0. \tag{9}$$

Отметим, что оператор Лапласа Δ может быть применен и к векторной функции $\vec{a} = \vec{a}(X, Y, Z)$:

$$\Delta\vec{a} = \Delta X \cdot \vec{i} + \Delta Y \cdot \vec{j} + \Delta Z \cdot \vec{k}.$$

Приведенные операции векторного анализа изложены для случая декартовой прямоугольной системы координат как наиболее часто применяемой. В приложениях используются и другие системы координат.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое поле называется потенциальным? Приведите примеры потенциальных полей.
2. Перечислите свойства потенциальных полей.
3. Какое поле называется соленоидальным (трубчатым)? Приведите примеры соленоидальных полей.
4. Какое поле называется гармоническим?
5. Что такое оператор Гамильтона? Запишите с помощью оператора Гамильтона а) градиент скалярного поля; б) дивергенцию векторного поля; в) ротор векторного поля.
6. Перечислите повторные дифференциальные операции в скалярных и векторных полях.
7. Результаты каких повторных дифференциальных операций равны нулю?
8. Что такое оператор Лапласа и как он связан с оператором ∇?
9. Приведите примеры функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Как называются такие функции.

Тема 6
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Лекция 1. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Определение собственного интеграла, зависящего от параметра.
2. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра.
3. Дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.

1. Определение собственных интегралов, зависящих от параметра. Пусть на множестве $Y \subset \boldsymbol{R}$ определены функции $\varphi = \varphi(y)$ и $\psi = \psi(y)$, причем $\varphi(y) \le \psi(y)$. И пусть на множестве

$$Q = \{(x; y) | \varphi(y) \le x \le \psi(y), y \in Y\}$$

определена функция $f(x; y)$. Если при любом значении параметра $y \in Y$ функция $f(x; y)$ интегрируема по Риману, то интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x; y)dx$ есть функция параметра y, определенная на множестве Y.

Определение 1. ***Собственным интегралом, зависящим от параметра***, называется интеграл вида

$$\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x; y)dx, \tag{1}$$

где переменная y называется ***параметром***.

Если $\varphi(y) = a$ и $\psi(y) = b$, где a и b постоянные числа, $a < b$, то собственный интеграл, зависящий от параметра y примет вид

$$\Phi(y) = \int\limits_{a}^{b} f(x; y)dx. \tag{2}$$

Пример. Функция Бесселя $J_0(y) = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(y \cdot \cos x)dx$ является собственным интегралом, зависящим от параметра y.

Пусть $Y=[c;d]\subset \boldsymbol{R}$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[c;d]$ (рис.1). Рассмотрим область G, образованную графиками функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и прямыми $y=c$, $y=d$. Тогда областью определения функции $\Phi(y)$ является замкнутая область

$$\overline{G}=\{(x;y)|\varphi(y)\le x\le\psi(y), c\le y\le d\}.$$

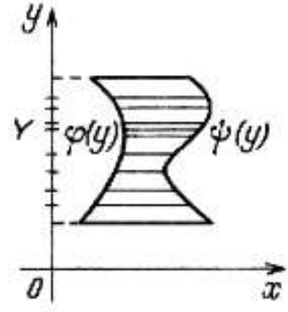


Рис.1.

2. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 1. *Пусть 1) функция* $f(x;y)$ *определена на прямоугольнике*

$$\Pi=\{(x;y)|a\le x\le b, c\le y\le d\},$$

2) при любом фиксированном $y\in[c;d]$ *непрерывна по* x *на отрезке* $[a;b]$,

3) $f(x;y)\rightrightarrows f(x;y_0)$ *(сходится равномерно) при* $y\to y_0\in[c;d]$.

Тогда функция $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ *непрерывна на* $[c;d]$.

► Рассмотрим приращение

$$\Delta\Phi(y)=\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y+\Delta y)dx-\int\limits_a^b f(x;y)dx=$$

$$=\int\limits_a^b[f(x;y+\Delta y)-f(x;y)]dx.$$

Тогда

$$\left|\Delta\Phi(y)\right| = \left|\int_a^b \left[f(x;y+\Delta y) - f(x;y)\right]dx\right| \le \int_a^b \left| f(x;y+\Delta y) - f(x;y)\right| dx .$$

По условию функция $f(x;y)$ равномерно сходится к функции $f(x;y_0)$ при $y \to y_0$, то по теореме Кантора имеем:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \forall\, x$ и $\forall\, y \;\; |y - y_0| < \delta \;\; \Rightarrow$

$$\left| f(x;y+\Delta y) - f(x;y)\right| < \varepsilon < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

По теореме об оценке интеграла получим:

$$\left|\Delta\Phi(y)\right| \le \int_a^b \left| f(x;y+\Delta y) - f(x;y)\right| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} < \varepsilon$$

для всех $\Delta y < \delta$.

Следовательно, функция $\Phi(y)$ непрерывна. ◄

Теорема 2. *Пусть 1) функции* $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *непрерывны на отрезке* $[c;d]$ *и* $-\infty < c \le y \le d < +\infty$, *причем* $\varphi(y) \le \psi(y)$,

2) функция $f(x;y)$ *непрерывна множестве*

$$\overline{G} = \left\{ (x;y) \middle| \varphi(y) \le x \le \psi(y), c \le y \le d \right\}.$$

Тогда функция $\Phi(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ *непрерывна на* $[c;d]$.

Без доказательства.

Следствие. *Предельный переход под знаком интеграла*

$$\lim_{\lambda \to 0} \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx = \int\limits_{\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0} \psi(y)} \lim_{y \to y_0} f(x;y)dx . \qquad (3)$$

3. Дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 3 (правило Лейбница). *Если функции* $f(x;y)$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *непрерывны на прямоугольнике*

$$\Pi = \left\{ (x;y) \middle| a \le x \le b, c \le y \le d \right\},$$

то функция $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ *дифференцируема на отрезке* $[c;d]$ *и справедлива формула*

$$\frac{d\Phi}{dy}=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx. \qquad (4)$$

► Пусть $y\in[c;d]$ и $y+\Delta y\in[c;d]$. Тогда, используя теорему конечных приращений Лапласа, имеем

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}=\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y}\left(\int\limits_a^b f(x;y+\Delta y)dx-\int\limits_a^b f(x;y)dx\right)=$$

$$=\int\limits_a^b \frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}dx=\left[\begin{array}{l}\text{по теореме}\\ \text{конечных приращений}\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y+\theta y)}{\partial y}dx,$$

где $\theta\in(0;1)$.

Оценим разность $\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}-\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx$ при $y\to y_0$.

Имеем:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}-\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx\right|=\left|\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y+\theta y)}{\partial y}dx-\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx\right|\le$$

$$\le\int\limits_a^b \left|\frac{\partial f(x;y+\theta y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right|dx.$$

По условию функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на прямоугольнике Π.

Следовательно, она равномерно непрерывна на Π. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Тогда по определению равномерной непрерывности, существует $\delta>0$ такое, что $\forall\, x$ и $\forall\, y$ из условия $|y-y_0|<\delta$ следует выполнение неравенства

$$\left|\frac{\partial f(x;y+\Delta y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right|<\varepsilon<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Причем, если $\Delta y=|y-y_0|<\delta$, то $\theta\cdot|\Delta y|<|\Delta y|<\delta$.

Поэтому

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}-\int_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx\right|\le\int_a^b\left|\frac{\partial f(x;y+\theta y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right|dx\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{b-a}\cdot\int_a^b dx=\varepsilon\ .$$

Это означает, что

$$\frac{d\Phi}{dy}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}=\int_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx\ . \blacktriangleleft$$

Теорема 4 (дифференцирование собственного интеграла по параметру). *Пусть 1) функции* $f(x;y)$ *и* $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ *непрерывны на прямоугольнике* $\Pi=\{(x;y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}$;

2) $\overline{G}=\{(x;y)|\varphi(y)\le x\le\psi(y), c\le y\le d\}\subset\Pi$;

3) функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ *непрерывны и имеют непрерывные производные* $\varphi'(y)$, $\psi'(y)$ *на отрезке* $[c;d]$, $-\infty<c\le y\le d<+\infty$.

Тогда функция $\Phi(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x;y)dx$ *имеет производную на* $[c;d]$ *справедлива формула*

$$\frac{d\Phi}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x;y)dx\right)=$$

$$=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx+f(\psi(y);y)\psi'(y)-f(\varphi(y);y)\varphi'(y). \quad (5)$$

Без доказательства.

Пример. Найти производную функции

$$\Phi(y)=\int_0^y\left(x^2+y^2+xy\right)dx$$

Решение. Используем формулу (5)

$$\Phi'(y)=\int_0^y(2y+x)dx+\left(y^2+y^2+y^2\right)\cdot 1-\left(y^2\right)\cdot 0=$$

$$=\left(2xy-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^y+3y^2=2y^2+\frac{y^2}{2}+3y^2=5{,}5y^2 .$$

Теорема 5 (интегрирование по параметру). *Пусть функция* $f(x;y)$ *непрерывна на прямоугольнике*

$$\Pi=\{(x;y)|a\le x\le b,\ c\le y\le d\}.$$

Тогда

$$\int_c^d \Phi(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x;y)dy .$$

► Интеграл $\int_c^d \Phi(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx$ есть повторный интеграл.

По теореме о переходе от двойного интеграла от функции $f(x;y)$ к повторному, имеем

$$\iint_{\Pi} f(x;y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x;y)dx . ◄$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение собственного интеграла, зависящего от параметра.

2. Сформулируйте теоремы о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.

3. Сформулируйте теоремы о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра.

4. Сформулируйте теорему об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра.

Лекция 2. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра.
2. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

1. Определение и сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Пусть функция $f(x;y)$ определена в области $\Pi_\infty = \{(x;y) | -\infty < a \le x \le b \le +\infty,\ y \in Y\}$.

И пусть функция $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx$ удовлетворяет условиям:

1) $-\infty < a < b \le +\infty$ (b может быть конечным или бесконечным),

2) для любого $y \in Y$ функция $f(x;y)$ интегрируема по переменной x на каждом отрезке $[a;\eta]$, где $a < \eta < b \le +\infty$.

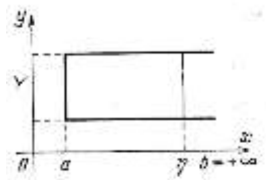


Рис.1.

Если b *конечно*, то имеем несобственный интеграл от неограниченной функции

$$\Phi(y) = \lim_{\eta \to b-0} \int\limits_a^\eta f(x;y)dx,$$

если b *бесконечно*, то имеем несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x;y)dx.$$

Будем рассматривать только второй случай (рис.1).

Определение 1. ***Несобственным интегралом, зависящим от параметра***, называется интеграл вида

$$\Phi(y)=\int_a^{+\infty} f(x;y)dx, \qquad (1)$$

где переменная y называется ***параметром***.

Аналогично вводятся несобственные следующие интегралы, зависящим от параметра y:

$$\Phi(y)=\int_{-\infty}^{b} f(x;y)dx,\ \Phi(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;y)dx$$

Определение 2. Несобственный интеграл, зависящий от параметра y, $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)dx$ называется ***сходящимся (поточечно)***, если $\forall\ y\in Y$ и $b\le+\infty$ существует конечный предел

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_a^{\eta} f(x;y)dx=\int_a^b f(x;y)dx, \qquad (2)$$

т.е. $\forall\ y\in Y$ интеграл $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)dx$ сходится как несобственный.

Поскольку $\int_a^b f(x;y)dx=\int_a^{\eta} f(x;y)dx+\int_{\eta}^b f(x;y)dx$, то для сходящегося интеграла имеем $\lim_{\eta\to b}\int_{\eta}^b f(x;y)dx=0$.

Символическая запись:

$$\lim_{\eta\to b-0}\int_a^{\eta} f(x;y)dx=\int_a^b f(x;y)dx\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ y\in Y\ \ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|\int_a^b f(x;y)dx-\int_a^{\eta} f(x;y)dx\right|\le\left|\int_{\eta}^b f(x;y)dx\right|<\varepsilon.$$

Равномерная сходимость интеграла $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)dx$ будет, если $\int_{\eta}^b f(x;y)dx\rightrightarrows 0$ при $\eta\to b$.

Определение 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра, $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ называется ***равномерно сходящимся по параметру*** y ***на множестве*** Y, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $b'(y;\varepsilon)>0$, $a\le b'<b$, что для всех $y\in Y$ и всех η, $b'<\eta<b$, выполняется неравенство $\left|\int\limits_{b'}^{b} f(x;y)dx\right|<\varepsilon$.

Обозначим $\Phi(y;\eta)=\int\limits_a^{\eta} f(x;y)dx$, где $a<\eta<b\le+\infty$. Тогда интеграл $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ равномерно сходится, если $\Phi(y;\eta)\rightrightarrows\Phi(y)$ при $\eta\to b$.

Символическая запись:

$$\int\limits_a^{\eta} f(x;y)dx\rightrightarrows\int\limits_a^{b} f(x;y)dx,\ \text{при } \eta\to b,\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \ \exists b'(y;\varepsilon)<b:\ \forall\ y\in Y\ \text{ и }\ \forall\ \eta\in(b';b)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left|\int\limits_{b'}^{b} f(x;y)dx\right|<\varepsilon.$$

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\cos xy\,dx,\ \ y\in\boldsymbol{R}.$$

Решение. Возьмем $\forall\ \varepsilon>0$.

Покажем, что существует $b'=b'(y;\varepsilon)$.

Имеем

$$\left|\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-x}\cos xy\,dx\right|\le\int\limits_{\eta}^{+\infty} e^{-x}dx=e^{-\eta}\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Положим $b'(y;\varepsilon)=\ln\dfrac{2}{\varepsilon}$. Тогда $\forall\ \eta\in[b';+\infty)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\eta}^{+\infty} e^{-x}\cos xy dx\right| < \varepsilon .$$

Значит, интеграл сходится равномерно по параметру y на $\boldsymbol{R}$.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). *Для того чтобы несобственный интеграл* $\Phi(y)=\int_a^b f(x;y)dx$ *сходился равномерно по параметру* y *на множестве* $Y \in \boldsymbol{R}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists b' \in [a,b)$ *такое, что* $\forall\ \eta,\eta' \in [b';b)$ *и* $\forall\ y \in Y$ *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{\eta}^{\eta'} f(x;y)dx\right| < 0 .$$

►*Необходимость*. Пусть $\int_a^b f(x;y)dx$ равномерно сходится по параметру y на множестве Y. Тогда $\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists b' \in [a,b)$ такое, что $\forall\ \eta \in [b';b)$ и $\forall\ y \in Y$ выполнялось неравенство

$$\left|\int_{\eta}^{b} f(x;y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Пусть $\eta,\eta\xi' \in [b';b)$ и $\forall\ y \in Y$.

Тогда

$$\left|\int_{\eta}^{\eta'} f(x;y)dx\right| = \left|\int_{\eta}^{b} f(x;y)dx - \int_{\eta'}^{b} f(x;y)dx\right| \le$$

$$\le \left|\int_{\eta}^{b} f(x;y)dx\right| + \left|\int_{\eta'}^{b} f(x;y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Достаточность. Пусть $\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists b' \in [a,b)$ такое, что $\forall\ \eta,\eta' \in [b';b)$ и $\forall\ y \in Y$ выполнено неравенство

$$\left|\int_{\eta}^{\eta'} f(x;y)dx\right| < 0 .$$

Тогда, в силу критерия Коши сходимости несобственных интегралов, $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится при $\forall\ y \in Y$. В силу произвольности η', переходя к пределу при $\eta' \to b-0$, получаем, что $\forall\ \eta \in [b';b)$ и $\forall\ y \in Y$ выполнено неравенство $\left|\int_\eta^b f(x;y)dx\right| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y. ◄

Следствие. *Если* $\exists \varepsilon_0 > 0$ *такое, что* $\forall b' \in [a,b)$ $\exists \eta_0, \eta_0' \in [b';b)$ *и* $\exists y_0 \in Y$ *такие, что*

$$\left|\int_{\eta_0}^{\eta_0'} f(x;y)dx\right| \geq \varepsilon_0,$$

то интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ *не сходится равномерно по параметру* y y *на множестве* Y.

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy}dx,\ \ y \in [0;+\infty).$$

Решение. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{e}$. Тогда $\forall\ \ b' \in (0;+\infty)$ $\exists\, \eta = b'$ и $y = \frac{1}{b'}$ такие, что

$$\int_\eta^{+\infty} ye^{-xy}dx = \int_{b'}^{+\infty} ye^{-xy}dx = \left[\begin{array}{l} t = xy, \\ y = \dfrac{t}{x}, \\ x = \dfrac{t}{y}, dx = dt \end{array}\right] =$$

$$= \int_{b'\cdot y}^{+\infty} e^{-t}dt = \int_{1}^{+\infty} e^{-t}dt = e^{-1} = \varepsilon .$$

Следовательно, интеграл $\int_{0}^{+\infty} ye^{-xy}dx$ сходится неравномерно по параметру y на множестве $Y = [0;+\infty)$.

2. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 2 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). *Пусть существует функция* $g(x) \geq 0$ *, удовлетворяющая условиям*

1) $g(x)$ *определена на* $[a;b)$ *и интегрируема на* $[a;\eta]$, $a < \eta < b \leq +\infty$ *;*

2) $|f(x;y)| \leq g(x)$ *для* $\forall x \in [a;b)$ *и* $\forall y \in Y$ *;*

3) $\int_{a}^{b} g(x)dx$ *сходится.*

Тогда интеграл $\Phi(y) = \int_{a}^{b} f(x;y)dx$ *сходится абсолютно и равномерно на* Y *.*

► Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда из сходимости $\int_{a}^{b} g(x)dx$, согласно критерию Коши сходимости интегралов, следует, что существует такое число $\eta(\varepsilon) > 0$, $a \leq \eta(\varepsilon) < b$, что для всех η' и η'', $\eta(\varepsilon) < \eta' < b$, $\eta(\varepsilon) < \eta'' < b$, выполнялось неравенство $\left|\int_{\eta'}^{\eta''} g(x)dx\right| < \varepsilon$.

Тогда $\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x;y)dx\right| \leq \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x;y)|dx \leq \int_{\eta'}^{\eta''} |g(x)|dx < \varepsilon$. ◄

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интегралы 1) $\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ по параметру α при $\alpha \in [0;+\infty)$,

2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2 + 1}$, $y \in \boldsymbol{R}$.

Решение.

1. Для интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ возможны два случая.

Случай 1. Пусть $0 < \alpha_0 \le \alpha$. Так как $e^{-\alpha x^2} \le e^{-\alpha_0 x^2}$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2} dx$

сходится, то по признаку Вейерштрасса интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ сходится равномерно по параметру α на множестве $[\alpha_0;+\infty)$.

Случай 2. Пусть $\alpha \in (0;+\infty)$. Покажем, что на $(0;+\infty)$ интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ сходится неравномерно. Воспользуемся следствием из критерия Коши.

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{e}$, $\forall\ b > 0$ возьмем $\eta_0 = b$, $\eta_0' = b + 1$, $\alpha_0 = \frac{1}{(b+1)^2}$. Тогда

$$\int\limits_{\eta_0}^{\eta_0'} \varepsilon^{-\alpha_0 x^2} dx = \int\limits_b^{b+1} e^{-\alpha_0 x^2} dx \ge e^{-\alpha_0 (b+1)^2} \int\limits_b^{b+1} dx = \frac{1}{e} = \varepsilon_0 .$$

Следовательно, интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ сходится неравномерно по параметру α на множестве $[\alpha_0;+\infty)$.

2. Подынтегральная функция есть $f(x;y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$.

Возьмем функцию $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, для которой

$$f(x;y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \le \frac{1}{x^2 + 1} = g(x).$$

Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$ и является сходящимся для всех $x \in [0;+\infty)$.

Тогда интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+y^2+1}$ сходится равномерно согласно признаку Вейерштрасса.

Замечание. Пусть интеграл $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx$ (равномерно) сходится на множестве Y. И пусть последовательность (η_n), $n = 1,2,3,...$, $a \le \eta_n < b$, $\eta_0 = a$, сходится к b. Тогда последовательность функций $\Phi_n(y) = \int\limits_a^{\eta_n} f(x;y)dx$ (равномерно) сходится на множестве Y к функции $\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x;y)dx$.

Теорема 3 (признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла по параметру). *Пусть 1)* $\forall y \in Y$ *функции* $f(x;y)$, $g(x;y)$ *и* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *непрерывны как функции* x *на полуинтервале* $[a;+\infty)$*;*

2) функция $F(x;y)$*, являющаяся при любом* $y \in Y$ *первообразной по* x *функции* $f(x;y)$*, ограничена при* $y \in Y$, $x \in [a;+\infty)$*;*

3) $\frac{\partial g}{\partial x} \le 0$ *при* $y \in Y$*, и* $x \in [a;+\infty)$*;*

4) существует непрерывная на $[a;+\infty)$ *функция* $\psi(x)$ *такая, что* $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$ *и* $|g(x;y)| \le \psi(x)$ *для* $y \in Y$ *и* $x \in [a;+\infty)$.

Тогда интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$$

сходится равномерно по параметру y *на множестве* Y.

► По признаку Дирихле (для несобственных интегралов) несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$ сходится при любом $y \in Y$. Покажем, что он сходится равномерно по параметру y на множестве Y.

Так как по условию 4 функция $\psi(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists a' > a$ такое, что $\forall \; \eta \in [a';+\infty)$ выполнено неравенство

$$\psi(x) < \frac{\varepsilon}{2C},$$

где C есть постоянная, ограничивающая, в силу условия 2, первообразную $F(x;y)$.

Пусть $y \in Y$ и $\eta \in [a';+\infty)$.

Воспользовавшись формулой интегрирования по частям и тем, что $g(x;y) \to 0$ при $x \to +\infty$ получаем

$$\int_\eta^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx = F(\eta;y)g(\eta;y) - \int_\eta^{+\infty} F(x;y)\frac{\partial g(x;y)}{\partial x}dx.$$

Так как по условию теоремы $|F(x;y)| \le C$ и $\frac{\partial g}{\partial x} \le 0$, $|g(x;y)| \le \psi(x)$, то получаем, что $\forall \; \eta \in [a';+\infty)$ выполнено неравенство

$$\left|\int_\eta^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx\right| \le C\psi(x) + \int_\eta^{+\infty} C\left|\frac{\partial g(x;y)}{\partial x}\right|dx =$$

$$= C\psi(x) - \int_\eta^{+\infty} C\frac{\partial g(x;y)}{\partial x}dx = C\psi(x) + Cg(\eta;y) \le 2C\psi(x) < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y. ◄

Замечание. Если $+\infty$ единственная особая точка сходящегося интеграла $\int_a^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$, то интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве Y в том и только в том случае, когда при любом $a'>a$ интеграл $\int\limits_{a'}^{+\infty} f(x;y)g(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на множестве Y. Поэтому для справедливости утверждения теоремы 2 достаточно, чтобы условия 1—4 выполнялись на некотором промежутке $[a';+\infty)\subset[a;+\infty)$.

Пример. Исследовать на равномерную сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\sin x}{x}dx$ по параметру y при $y\in[0;+\infty)$.

***Решение*.**

Пусть $f(x;y)=\sin x$, $g(x;y)=\dfrac{e^{-xy}}{x}$.

Функция $\sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$.

При $x\geq 1$, $y\geq 0$ для функции $g(x;y)=\dfrac{e^{-xy}}{x}$ выполнены следующие неравенства:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xy}}{x}\right)=-\frac{e^{-xy}}{x^2}(1+xy)<0,$$

$$\frac{e^{-xy}}{x}<\frac{1}{x}=\psi(x),\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Значит, согласно признаку Дирихле, данный интеграл сходится равномерно по параметру y на множестве $Y=[0;+\infty)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение несобственного интеграла, зависящего от параметра.

2. Дайте определение а) поточечной сходимости, б) равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

3. Сформулируйте и докажите критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

4. Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

5. Сформулируйте и докажите признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Лекция 3. СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Непрерывность несобственного интеграла по параметру.
2. Интегрируемость несобственного интеграла по параметру.
3. Дифференцируемость несобственного интеграла по параметру.

1. Непрерывность несобственного интеграла по параметру.

Теорема 1. *Пусть функция* $f(x;y)$ *непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике*

$$\Pi_\infty = \{(x;y) | -\infty < a \le x \le b \le +\infty, c \le y \le d\},$$

а интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ *равномерно сходится по параметру* y *на отрезке* $[c;d]$. *Тогда функция* $\Phi(y) = \int_a^b f(x;y)dx$ *является непрерывной функцией переменной* y *на отрезке* $[c;d]$ *и справедлива формула*

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x;y)dx = \int_a^b f(x;y_0)dx. \qquad (1)$$

► Возьмем любое $\varepsilon > 0$.

Так как $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$, то $\exists b' \in [a;b)$ такое, что $\forall\ y \in [c;d]$ выполнено неравенство

$$\left|\int_{b'}^b f(x;y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как интеграл $\int_a^{b'} f(x;y)dx$ является собственным, то этот интеграл есть непрерывная функция параметра y на $[c;d]$. Пусть $y_0 \in [c;d]$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall\ y \in [c;d]$ и такого, что $|y - y_0| < \delta$ имеет место

$$\left| \int_a^{b'} f(x;y)dx - \int_a^{b'} f(x;y_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для любого $y \in [c;d]$ такого, что $|y - y_0| < \delta$, имеем

$$\left| \int_a^{b} f(x;y)dx - \int_a^{b} f(x;y_0)dx \right| < \left| \int_a^{b'} f(x;y)dx - \int_a^{b'} f(x;y_0)dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{b'}^{b} f(x;y)dx \right| + \left| \int_{b'}^{b} f(x;y_0)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ есть непрерывная функция параметра y в произвольной точке $y_0 \in [c;d]$. ◄

2. Интегрируемость несобственного интеграла по параметру.

Теорема 2 (о перестановке порядка интегрирования). *Пусть функция $f(x;y)$ непрерывна на конечном или бесконечном прямоугольнике*

$$\Pi_\infty = \{(x;y) | -\infty < a \le x \le b \le +\infty, c \le y \le d\},$$

а интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$. Тогда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy. \qquad (2)$$

► Так как интеграл $\int_a^b f(x;y)dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$, то он будет на отрезке $[c;d]$ непрерывной, а поэтому и интегрируемой функцией. Повторный интеграл в левой части формулы (2) существует. Кроме того, в силу равномерной сходимости интеграла $\int_a^b f(x;y)dx$ на $[c;d]$ для любого $\varepsilon > 0$ $\exists b' \in [a;b)$ такое, что $\forall\ \eta \in (b';b)$ и $\forall\ y \in Y$ выполнено неравенство

$$\left|\int_{\eta}^{b} f(x;y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c}.$$

Применяя теорему о перестановке порядка интегрирования в собственных интегралах, получаем равенство

$$\int_c^d dy \int_a^{\eta} f(x;y)dx = \int_a^{\eta} dx \int_c^d f(x;y)dy. \tag{3}$$

Покажем, что интеграл, стоящий в левой части равенства (3), при $\eta \to b-0$ стремится к интегралу в левой части равенства (2). Действительно,

$$\left|\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx - \int_c^d dy \int_a^{\eta} f(x;y)dx\right| = \left|\int_c^d dy \int_{\eta}^b f(x;y)dx\right| \le$$

$$\le \int_c^d \left(\left|\int_a^{\eta} f(x;y)dx\right|\right)dy < \frac{\varepsilon}{d-c}\int_c^d dy = \varepsilon.$$

Итак, левая часть равенства (3) имеет предел при $\eta \to b-0$. Поэтому, правая часть этого равенства имеет предел при $\eta \to b-0$. Переходя в равенстве (3) к пределу, получаем (2). ◄

В теореме 2 была обоснована перестановка порядка интегрирования, когда внутренний интеграл несобственный, а внешний – собственный. В теореме 3 обоснована перестановка порядка интегрирования, когда оба интеграла несобственные.

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x;y)$ *непрерывна на множестве* $\Pi = \left\{(x;y)\middle| a \le x < b, c \le y < d\right\}$ *и выполнены следующие условия:*

1) несобственный интеграл $\int_a^b |f(x;y)|dx$ *сходится равномерно по параметру* y *на любом отрезке* $[c';d'] \subset (c;d)$*;*

2) несобственный интеграл $\int_c^d |f(x;y)|dy$ *сходится равномерно по параметру* x *на любом отрезке* $[a';b'] \subset (a;b)$*;*

3) один из двух повторных интегралов

$$\int_c^d dy \int_a^b |f(x;y)|dx\,,\ \int_a^b dx \int_c^d |f(x;y)|dy$$

сходится.

Тогда сходятся оба повторных интеграла $\int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx$, $\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x;y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)dx\,.$$

Без доказательства.

Пример. Вычислить интеграл Эйлера-Пуассона (интеграл вероятностей)

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\,.$$

Решение. Имеем

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \begin{bmatrix} t = xy, y > 0, \\ dt = ydx \end{bmatrix} = y\int_0^{+\infty} e^{-x^2y^2} dx\,.$$

Умножая это равенство на e^{-y^2} и интегрируя его от 0 до $+\infty$ по y, получаем

$$I^2 = \int_0^{+\infty} I \cdot e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} ye^{-y^2(1+x^2)}dx \qquad (4)$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} ye^{-y^2(1+x^2)}dx$ сходится равномерно по параметру y на любом отрезке $[c;d] \subset (0;+\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как

$$\left| ye^{-y^2(1+x^2)} \right| \le de^{-c^2(1+x^2)}$$

и интеграл $\int_0^{+\infty} \left(de^{-c^2(1+x^2)}\right)dx$ сходится.

Аналогично доказывается, что интеграл $\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится равномерно по параметру на x любом отрезке $[a;b]\subset(0;+\infty)$. Повторный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} dx\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy$ сходится в силу равенства (4).

Переставляя порядок интегрирования в равенстве (4), получаем

$$I^2=\int\limits_0^{+\infty} dx\int\limits_0^{+\infty} ye^{-y^2\left(1+x^2\right)}dy=-\int\limits_0^{+\infty}\left(\left.\frac{e^{-y^2\left(1+x^2\right)}}{2\left(1+x^2\right)}\right|_0^{+\infty}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}.$$

Отсюда $I=\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

3. Дифференцируемость несобственного интеграла по параметру.

Теорема 4 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру). Пусть функции $f(x;y)$ и $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}$ непрерывны на конечном или бесконечном прямоугольнике $\Pi_\infty=\{(x;y)|-\infty<a\le x\le b\le+\infty, c\le y\le d\}$, а интеграл $\int\limits_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx$ равномерно сходится на отрезке $[c;d]$. Тогда функция $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ дифференцируема на отрезке $[c;d]$ и справедливо равенство

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_a^b f(x;y)dx\right)=\int\limits_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx. \qquad (5)$$

►Пусть $c \le y \le d$. Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\eta)}{\partial y} dx$ при $\eta \in [c;d]$ По условию теоремы этот интеграл сходится равномерно по параметру y на отрезке $[c;d]$. В силу теоремы 2 законна перестановка порядка интегрирования

$$\int\limits_c^y d\eta \int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\eta)}{\partial y} dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^y \frac{\partial f(x;\eta)}{\partial y} d\eta = \tag{6}$$

$$= \int\limits_a^b f(x;y) dx + c_0,$$

где $c_0 = -\int\limits_a^b f(x;c) dx$.

Так как интеграл $\int\limits_a^b \frac{\partial f(x;\eta)}{\partial y} dx$ сходится равномерно по параметру η на $[c;d]$, то этот интеграл будет непрерывной функцией η на этом отрезке. Поэтому интеграл, стоящий в левой части равенства (6), будет непрерывно дифференцируемой функцией параметра y на отрезке $[c;d]$. Но тогда и $\int\limits_a^b f(x;y) dx$ есть непрерывно дифференцируемая функция на $[c;d]$. Дифференцируя обе части равенства (6) по y , получаем формулу (5). ◄

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} dx$.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x;y) = \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

Интеграл $\Phi(y) = \int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ является несобственным, так как функция $f(x;y)$ неопределенна в точках $x = 0$ и $x = 1$.

При $x \to 0$ функция $\frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o(1)$, при $x \to 1$ функция

$$\frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Поскольку $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}}$, то

$$\frac{\partial f}{\partial y} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} xy}{x\sqrt{1-x^2}}dx$ равномерно сходится. По свойству 3 имеем

$$\Phi'(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2y^2\right)\sqrt{1-x^2}} = \begin{bmatrix} x = \sin t, \\ dx = \cos t \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\sin^2 t} =$$

$$= \begin{bmatrix} \operatorname{tg} t = z, \\ t = \operatorname{arctg} z \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dz}{1+\left(1+y^2\right)z^2} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности несобственного интеграла по параметру.
2. Сформулируйте и докажите теорему об интегрируемости несобственного интеграла по параметру.
3. Какие условия должны выполняться при перестановке порядка интегрирования в случае двух несобственных интегралов.
4. Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

Лекция 4. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА

1. Определение и свойства гамма функции.
2. Определение и свойства бета-функция.

1. Определение и свойства гамма функции.

Определение 1. Функция

$$\Gamma(s)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx, \quad s>0, \tag{1}$$

называется ***гамма-функцией,*** а ее значение – ***эйлеровым*** интегралом.

Гамма-функция является непрерывной функцией аргумента s.

Ниже приводятся **свойства** гамма-функции.

1. $\Gamma(s)>0$ для любого $s>0$.

2. $\Gamma(1)=1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

3. $\Gamma(s+1)=s\cdot\Gamma(s)$.

► $\Gamma(s+1)=\int\limits_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx=\begin{bmatrix} u=x^s, dv=e^{-x}dx, \\ du=s\cdot x^{s-1}, v=-e^{-x}\end{bmatrix}=$

$=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+s\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx=s\cdot\Gamma(s).$ ◄

4 (формула понижения). Для любого $n\in \boldsymbol{N}$ справедливо равенство

$$\Gamma(n)=(n-1)!.$$

► $\Gamma(n)=\Gamma((m-1)+1)=[\text{св.}3]=(n-1)\Gamma(n-2+1)=...=(n-1)!$ ◄

5. Гамма-функция имеет непрерывные производные любого порядка k, $k\in \boldsymbol{N}$, и справедливо равенство

$$\Gamma^{(k)}(s)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^k dx.$$

6. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$, $n\in \boldsymbol{N}$.

7 (формула дополнения). Если $0<p<1$, то

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin \pi p}.$$

8 (формула Стирлинга). При $s\to+\infty$ справедливо

$$\Gamma(s+1)\approx\sqrt{2\pi s}\cdot\left(\frac{s}{e}\right)^{s}.$$

2. Определение и свойства бета-функция.

Определение 2. Функция

$$\mathrm{B}(p;q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\quad p>0,\quad q>0 \qquad (2)$$

называется ***бета-функцией,*** а ее значение – ***эйлеровым*** интегралом.

Бета-функция является непрерывной функцией и обладает частными производными любого порядка.

Ниже приводятся **свойства** бета-функции.

1. Для любых $p>0$ и $q>0$ справедливо равенство

$$\mathrm{B}(p;q)=\mathrm{B}(q;p).$$

► $\mathrm{B}(p;q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\begin{bmatrix} t=1-x, \\ dx=-dt \end{bmatrix}=$

$=-\int_1^0 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt=\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}dt=\mathrm{B}(q;p).$ ◄

2. Для любых $p>0$ и $q>0$ справедливы равенства

$$\mathrm{B}(p;q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p;q-1),$$

$$\mathrm{B}(p;q)=\frac{p-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p-1;q).$$

► $\mathrm{B}(p;q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\begin{bmatrix} u=(1-x)^{q-1}, dv=x^{p-1}dx, \\ du=(q-1)(1-x)^{q-2}dx, v=\dfrac{x^p}{p} \end{bmatrix}=$

$$=\frac{x^p}{p}\cdot(1-x)^{q-1}\Big|_0^1-(q-1)\int_0^1(1-x)^{q-2}\,\frac{x^p}{p}\,dx=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,dx=$$

$$=\left[\begin{array}{l} x^p(1-x)^{q-2}=(1-(1-x))\cdot x^{p-1}(1-x)^{q-2}= \\ =x^{p-1}(1-x)^{q-2}-x^{p-1}(1-x)^{q-1} \end{array}\right]=$$

$$=\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-2}\,dx-\frac{q-1}{p}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx=$$

$$=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p;q-1)-\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p;q).$$

Тогда

$$\left(1+\frac{q-1}{p}\right)\mathrm{B}(p;q)=\frac{q-1}{p}\mathrm{B}(p;q-1).$$

Отсюда

$$\mathrm{B}(p;q)=\frac{q-1}{p+q-1}\mathrm{B}(p;q-1).\ ◄$$

3. $\mathrm{B}(p;1)=\dfrac{1}{p}$.

► $\mathrm{B}(p;1)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^0\,dx=\frac{x^p}{p}\Big|_0^1=\frac{1}{p}$. ◄

4. Для любого $p>0$ и любого $n\in\boldsymbol{N}$ справедливо равенство

$$\mathrm{B}(p;n)=\mathrm{B}(n;p)=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)}{p\cdot(p+1)\cdot\ldots\cdot(p+n-1)}.$$

5. Для любых $n\in\boldsymbol{N}$ и $m\in\boldsymbol{N}$ справедливо равенство

$$\mathrm{B}(m;n)=\frac{(m-1)!\cdot(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

6. Бета-функцию можно представить в виде

$$\mathrm{B}(p;q)=\int_0^{+\infty}\frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}}\,dz.$$

7. $\mathrm{B}(p;1-p)=\dfrac{\pi}{\sin\pi p}$.

8 (связь гамма- и бета- функций). Для любых $p>0$ и $q>0$ имеет место равенство

$$\mathrm{B}(p;q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int\limits_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} x=2\sqrt{t},\, t>0, \\ dx=\dfrac{dt}{\sqrt{t}}, \\ x=0\Rightarrow t=0, \\ x=2\Rightarrow t=1 \end{array}\right]=\int\limits_0^1 4t\cdot\frac{\sqrt{4-4t}}{\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=8\int\limits_0^1 t^{\frac{1}{2}}\cdot(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt=8\cdot\mathrm{B}\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=8\cdot\frac{\Gamma(3/2)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)}=$$

$$=8\cdot\frac{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=8\cdot\frac{\dfrac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}\cdot\dfrac{1\cdot\sqrt{\pi}}{2^1}}{2!}=\pi.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение гамма-функции. Перечислите свойства гамма-функции.
2. Дайте определение бета-функции. Перечислите свойства бета-функции.

Лекция 5. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

1. Определение интеграла Фурье и формула обращения.
2. Свойства преобразования Фурье.
3. Свертка функций.

1 Определение интеграла Фурье. Формула обращения. Пусть функция локально интегрируема, т.е. она непрерывна на любом отрезке $[a,b]$ числовой оси $\mathbf{R}$. ***Интегралом в смысле главного значения*** называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b} f(x)dx,\ b>0. \tag{1}$$

Отличие интеграла в смысле главного значения от несобственного интеграла состоит в том, что несобственный интеграл есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx \tag{2}$$

при произвольных a и b, а интеграл в смысле главного значения (1) есть предел того же интеграла, но при $a=b$

Очевидно, что, если существует несобственный интеграл (2), то и существует интеграл в смысле главного значения (1). Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения (1) может существовать, а несобственный интеграл (2) – нет.

Рассмотрим множество $L^1(-\infty;\infty)$ кусочно-непрерывных и абсолютно интегрируемых на $\mathbf{R}$ функций, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$.

Пример. Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} xdx$ не существует, а интеграл в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} xdx = 0.$$

Определение 1. ***Интегралом Фурье*** функции $f(x)$ называется функция вида

$$\hat{f}(y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx\,. \qquad (3)$$

Поскольку

$$\left|f(x)e^{-iyx}\right| = |f(x)|\cdot\left|e^{-iyx}\right| = |f(x)|\cdot|\cos yx - i\sin yx| =$$

$$= |f(x)|\cdot\sqrt{\cos^2 yx + \sin^2 yx} = |f(x)|$$

и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$, то на основании признака сравнения несобственных интегралов, данный интеграл сходится при любом $u \in \mathbf{R}$.

Определение 2. Отображение F, ставящее в соответствие функции $f(x)$ функцию $\hat{f}(y)$ и определяемое формулой (3), называется ***преобразованием Фурье***.

Обозначается: $F[f](y) = \hat{f}(y)$.

Отображение F^{-1}, ставящее в соответствие функции $\hat{f}(y)$ функцию $f(x)$ по формуле

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{iyx}dy\,. \qquad (4)$$

называется ***обратным преобразованием Фурье***.

Обозначается: $F^{-1}[f](y) = f(x)$.

Функция $F[f]$ называется ***образом Фурье*** функции $f(x)$.

Теорема 1 (формула обращения). *Если функция* $f(x) \in L^1$ *и существуют* $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, *то*

$$F^{-1}[F[f]] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f\,.$$

Без доказательства.

Замечание. Формула обращения может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right)e^{iyx}dy$$

или

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(x-t)y}dt\,.$$

Т р и г о н о м е т р и ч е с к а я   ф о р м а   и н т е г р а л а   Ф у р ь е. Используя формулу Эйлера $e^{iz}=\cos z+i\sin z$, интеграл Фурье можно записать в виде

$$F[f](y)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\cos yx-i\sin yx)dx=$$

$$=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos yxdx-v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin yxdx.$$

Обратное преобразование Фурье примет вид

$$f(x)=F^{-1}[f](x)=$$

$$=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\cos yxdy+v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\sin yxdy.$$

О п р е д е л е н и е   3. ***Косинус преобразованием Фурье*** называется действительная часть преобразования Фурье:

$$F_c[f](y)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos yx\,dx.$$

Синус преобразованием Фурье называется мнимая часть преобразования Фурье:

$$F_s[f](y)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin yx\,dx.$$

Очевидно, что

$$F[f]=F_c[f]-iF_s[f].$$

Если $f(x)$ – четная функция, то функция $f(x)\sin yx$ – нечетная функция. Тогда $F_s[f](y)=0$ и

$$F[f](y)=F_c[f](y),$$

при этом

$$F_c[f](y)=v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos yx\,dx,$$

$$f(x)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\cos yxdy=v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}F_c(y)\cos yxdy.$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то функция $f(x)\cos yx$ – четная функция. Тогда $F_c[f](y)=0$ и

$$F[f](y)=-iF_s[f](y),$$

при этом

$$F_s[f](y) = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin yx\,dx,$$

$$f(x) = v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\sin yxdx = v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} F_s(y)\sin yxdx.$$

Пример. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

Решение. Функция $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, – гладкая и абсолютно интегрируемая на интервале $[0;\infty)$. Следовательно, для нее существуют преобразования Фурье:

$$F_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t}\cos ytdt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-t}\cos yt\Big|_0^B - u\int_0^B e^{-t}\sin ytdt\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-B}\cos yB + 1 - u\left(-e^{-t}\sin yt\Big|_0^B + u\int_0^B e^{-t}\cos ytdt\right)\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 - y^2\int_0^{\infty} e^{-t}\cos ytdt\right).$$

Отсюда

$$F_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}.$$

Аналогично получим

$$F_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t}\sin ytdt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+1}.$$

Обратные косинус- и синус -преобразования Фурье примут вид:

$$e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos yx}{y^2+1}dy,\quad e^{-x} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y\sin yx}{y^2+1}dy.$$

2. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье обладает следующими свойствами.

1 (линейность). *Прямое и обратное преобразования Фурье являются линейными отображениями:*

$$F[\alpha\cdot f + \beta\cdot g] = \alpha\cdot F[f] + \beta\cdot F[g],$$

$$F^{-1}[\alpha\cdot f+\beta\cdot g]=\alpha\cdot F^{-1}[f]+\beta\cdot F^{-1}[g].$$

► Доказательство следует из свойств линейности интеграла (все интегралы понимаются в смысле главного значения):

$$F[\alpha\cdot f+\beta\cdot g](y)=(\alpha\cdot f+\widehat{\beta}\cdot g)(y)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))e^{-iyx}dx=$$

$$=\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}dx+\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-iyx}dx=$$

$$=\alpha\cdot F[f](y)+\beta\cdot F[g](y).$$

Аналогично доказывается для обратного преобразования Фурье.◄

2 (преобразование Фурье от сдвига). *Если* $f(x)\in L^1(-\infty;\infty)$, *то*

$$F[f(x-a)]=e^{-iay}\cdot F[f].$$

► Имеем

$$F[f(x-a)](y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)e^{-iyx}dx=$$

$$=\begin{bmatrix}x-a=t, dx=dx,\\ x\to-\infty\Rightarrow t\to-\infty,\\ x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iy(t+a)}dt=$$

$$=e^{-iya}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iyt}dt=e^{-iya}\cdot\hat{f}(y)=e^{-iya}\cdot F[f](y).$$ ◄

3 (преобразование Фурье от производной). *Пусть* $f(x)$, $f'(x)\in L^1(-\infty;\infty)$ *и* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. *Тогда*

$$F[f']=iy\cdot F[f].$$

► По определению преобразования Фурье имеем

$$F[f'](y)=\hat{f}'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-iyx}dx=$$

$$= \begin{bmatrix} u = e^{-iyx}, dv = f'(x)dx, \\ du = -iye^{-iyx}dx, v = f(x) \end{bmatrix} = e^{-iyx} \cdot f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + iy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx =$$

$$= iy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx = iy \cdot F[f](y). \blacktriangleleft$$

Следствие. Если функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x) \in L^1(-\infty;\infty)$ и $f^{(n)}(x)$ – кусочно-непрерывна на любом отрезке, то

$$F\left[f^{(n)}\right] = (iy)^n \cdot F[f].$$

4. *Пусть* $f(x)$ *и ее первообразная* $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ *абсолютно интегрируемые функции на* $(-\infty;+\infty)$, $f(x)$ *– непрерывна,* $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$. *Тогда*

$$F[g] = \frac{F[f]}{iy}.$$

► По свойству интеграла с переменным верхним пределом, имеем

$$(g(x))' = f(x).$$

Значит, $F\left[g'\right](y) = F[f](y)$.

С другой стороны, на основании свойства 5, получим

$$F\left[g'\right](y) = iyF[g](y).$$

Приравнивая, получим

$$iyF[g](y) = F[f](y).$$

Отсюда

$$F[g](y) = \frac{F[f](y)}{iy}. \blacktriangleleft$$

5 (дифференцирование преобразования Фурье). *Пусть функции* $f(x)$, $xf(x)$ *абсолютно интегрируемые функции на* $(-\infty;+\infty)$, *функции. Тогда функция* $\hat{f}(y) = F[f](y)$ *имеет на* $(-\infty;+\infty)$ *непрерывную производную, причем*

$$\frac{d}{dy}(F[f]) = F[(-ix)f].$$

► $\left(\hat{f}(y)\right)' = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx\right) =$

=[по правилу дифференцирования несобственного интеграла, зависящего от параметра]=

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dy}\left(f(x)e^{-iyx}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-iyx}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-ixf(x))e^{-iyx}dx = F[-ixf(x)](y).$$ ◄

Следствие. *Если* $f(x)$ *непрерывна, а функции* $xf(x)$, $x^2 f(x)$, *...,* $x^n f(x)$ *– абсолютно интегрируемы, то*

$$\frac{d^n}{dy^n}(F[f]) = F\left[(-ix)^n f\right].$$

6 (единственность). *Если* $F[f] = F[g]$*, то* $f(x) = g(x)$.

3. Свертка функций.

Определение 4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x) \in L^1(-\infty;\infty)$. Функция (если несобственный интеграл сходится $\forall x \in \boldsymbol{R}$)

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

называется ***сверткой*** функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 2. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на* $\boldsymbol{R}$*, то свертка* $f * g$ *есть непрерывная ограниченная и абсолютно интегрируемая функция на* $\boldsymbol{R}$.

Без доказательства.

Теорема 3. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на* $\boldsymbol{R}$*, то*

$$F[f * g] = F[f] \cdot F[g].$$

► По определению преобразования Фурье имеем

$$F[f * g](y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(f * g)(x)e^{-iyx}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt\right)e^{-iyx}dx =$$

=[изменяем порядок интегрирования]=

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-iyx}dx\right)g(t)dt =$$

=[свойство 2]=

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F[f](y)e^{-iyt}g(t)dt = F[f]\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}g(t)dt = F[f]\cdot F[g]. \blacktriangleleft$$

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)\in L^1(-\infty;\infty)$. Свертка обладает следующими **свойствами**.

1 (коммутативность): $f*g = g*f$.

2 (распределительный закон): $(f+g)*h = f*h + g*h$.

3 (сочетательный закон): $(f*g)*h = f*(g*h)$.

Справедливость данных формул следует из теоремы 3.

Вопросы для самоконтроля

1. Для каких функций существует преобразование Фурье?
2. Дайте определение прямого и обратного преобразования Фурье.
3. В чем суть теоремы обращения?
4. Что называется косинус-, синус- преобразованием Фурье?
5. В чем особенность нахождения преобразования Фурье для четных и нечетных функций?
6. Какими свойствами обладает преобразование Фурье?
7. Что называется сверткой функций?
8. Чему равно преобразование Фурье от свертки функций?

Лекция 6. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Общие понятия.
2. Пространства основных и обобщенных функций.
3. Операции над обобщенными функциями.

1. Общие понятия. Понятие обобщенной функции было вызвано не стремлением к обобщениям. А конкретными физическими задачами, когда обобщенных функций оказалось недостаточно для описания наблюдаемых явлений. Идею введения проиллюстрируем на следующем примере.

Когда говорят о материальной точке массы 1, то это идеализированная модель шара достаточно малого радиуса ε и массы 1. Плотность такого шара есть единица, поделенная на объем шара. Если в пространстве нет других масс, то плотность материи в пространстве будет распределена по следующему закону:

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \text{ при } |x|\le\varepsilon,\\ 0 \text{ при } |x|>\varepsilon,\end{cases}$$

где $x\in \boldsymbol{R}$.

При этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)dx=1$.

Если $\varepsilon\to+0$, то предельная плотность $\delta(x)$ примет следующий вид:

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty \text{ при } x=0,\\ 0 \text{ при } x\ne0.\end{cases}$$

По плотности $\delta(x)$ нельзя восстановить массу при помощи интегрирования, так как функция $\delta(x)$ не интегрируема ни по Риману, ни в несобственном смысле.

Будем рассматривать $\delta_\varepsilon(x)$ как линейный функционал над линейным пространством непрерывных на $\mathbf{R}$ функций, ставящий в соответствие каждой непрерывной в $\mathbf{R}$ функции $\varphi(x)$ число

$$(\delta_\varepsilon, f)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\cdot\varphi(x)dx.$$

Применяя теорему о среднем, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\delta_\varepsilon,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi(x_\varepsilon)=\varphi(0)=(\delta,\varphi), \qquad (1)$$

где δ есть линейный функционал, ставящий в соответствие непрерывной функции число $\varphi(0)$.

Если для любой непрерывной функции выполнено данное равенство, то говорят, что линейный функционал δ есть ***слабый предел*** линейных функционалов δ_ε при $\varepsilon\to+0$.

При таком подходе по плотности можно восстановить массу точки. Она равна

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}(\delta_\varepsilon,1)=(\delta,1)=1.$$

Функционал (1) называется δ***-функцией Дирака***.

2. Пространство основных и обобщенных функций.

Определение 1. ***Носителем*** функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $\varphi(x)\neq 0$.

Обозначается: $\mathrm{supp}\varphi(x)=\overline{\{x|\ \varphi(x)\neq 0\}}$.

Определение 2. Функция $\varphi(x)$ называется ***финитной***, если носитель функции есть ограниченное замкнутое множество, т.е. функция обращается в нуль вне некоторого отрезка.

Пример. На рисунке 1 изображен график финитной функции.

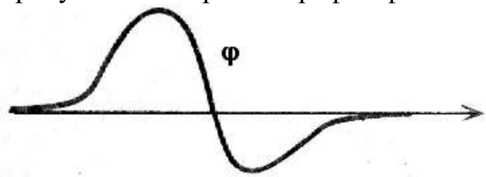


Рис.1.

Пусть $\mathbf{D}$ есть множество финитных и бесконечно дифференцируемых на $\mathbf{R}$ функций. Очевидно, что $\mathbf{D}$ есть линейное пространство.

Определение 3. Будем говорить, что последовательность функций $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$, где $\varphi_n(x)\in\mathbf{D}$ при любом $n\in\mathbf{N}$, ***сходится*** к функции $\varphi(x)\in\mathbf{D}$, если выполнены следующие условия:

1) носители всех функций $\varphi_n(x)$, $\varphi(x) \in \mathbf{D}$ лежат на некотором отрезке $[a;b]$:

$$\varphi_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a;b] \;\; n \in \mathbf{N},$$

2) при любом $k \in \mathbf{N}$ последовательность производных $\varphi_n^{(k)}(x)$ равномерно на $[a;b]$ сходится к $\varphi^{(k)}(x)$: $\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x)$.

Обозначается: $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathbf{D}} \varphi(x)$ при $n \to \infty$.

Определение 4. Линейное пространство $\mathbf{D}$ с введенной выше сходимостью называется ***пространством основных функций***.

Пример. 1. Если $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$, то $\varphi \in \mathbf{D}$.

2. Показать, что функция (шапочка)

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, \text{ если } |x| < \varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

принадлежит пространству $\mathbf{D}$.

Решение. Действительно, односторонние производные всех порядков справа и слева в точках $x = -\varepsilon$ и $x = \varepsilon$ равны нулю. Поэтому функция бесконечно дифференцируема на всей числовой оси. При этом $\varphi_\varepsilon(x)$ – финитная, так как $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon(x) = [-\varepsilon; \varepsilon]$. Значит, $\varphi_\varepsilon(x) \in \mathbf{D}$. На рисунке 2 изображена данная функция при различных ε.

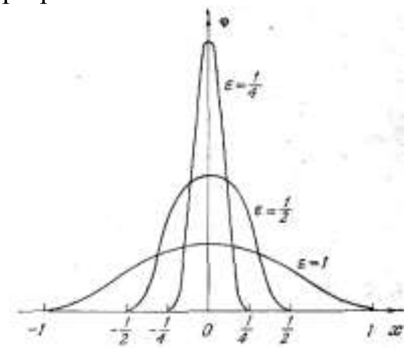


Рис.2.

Определение 5. ***Обобщенной функцией*** называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathbf{D}$.

Из определения следует, что $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ является обобщенной функцией, если выполнены следующие условия:

1) $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$ есть *функционал* на $\mathbf{D}$: каждой функции $\varphi\in\mathbf{D}$ сопоставляется число (f,φ);

2) f – есть *линейный функционал*: для любых двух чисел α, β и любых двух функций $\varphi(x)$, $\psi(x)\in\mathbf{D}$ выполнено равенство

$$(f,\alpha\varphi+\beta\psi)=\alpha(f,\varphi)+\beta(f,\psi);$$

3) f является *непрерывным функционалом*: из $\varphi_n\xrightarrow{\mathbf{D}}\varphi$ при $n\to\infty$ следует, что

$$(f,\varphi_n)\xrightarrow{\mathbf{D}}(f,\varphi) \text{ при } n\to\infty.$$

Множество всех линейных непрерывных функционалов обозначается через $\mathbf{D'}$. Множество $\mathbf{D'}$ является линейным пространством относительно линейной комбинации непрерывных линейных функционалов:

$$(\alpha f+\beta g,\varphi)=\alpha(f,\varphi)+\beta(g,\varphi)\quad \varphi\in\mathbf{D},$$

поскольку функционал $\alpha f+\beta g$ является линейным и непрерывным (показать самостоятельно).

В пространстве $\mathbf{D'}$ выделяют класс ***регулярных функционалов***: если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке (локально интегрируема), то выражение

$$(f,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi(x)dx$$

определяет линейный и непрерывный функционал на $\mathbf{D}$.

Обобщенные функции также называются ***распределениями***, так как плотность $\rho(x)$ распределения вещества неизмерима никаким прибором и представляет собой функционал

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\varphi(x)dx.$$

Линейные непрерывные функционалы, не являющиеся регулярными, называются ***сингулярными***.

Пример. Показать, что δ-функция, определяемая как функционал, действующий на функции $\varphi\in\mathbf{D}$ по правилу

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0) \tag{2}$$

является сингулярным функционалом пространства $\mathbf{D'}$.

► Линейность и непрерывность функционала (2) очевидны. Докажем его сингулярность.

Пусть существует такая локально интегрируемая функция, что

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\ \varphi\in \mathbf{D}. \tag{3}$$

В частности, равенство (3) должно быть выполнено для функции $\varphi_\varepsilon(x)\in \mathbf{D}$, определенной равенством

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}},\ \text{если } |x|<\varepsilon, \\ 0,\ \text{если } |x|\ge\varepsilon \end{cases}$$

при любом $\varepsilon>0$.

Поэтому

$$(\delta,\varphi_\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx=\varphi_\varepsilon(0)=\frac{1}{e}. \tag{4}$$

С другой стороны, пользуясь локальной интегрируемостью функции $f(x)$, подберем такое ε, что

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(x)|dx<1.$$

Поскольку $\varphi_\varepsilon(x)\le\varphi_\varepsilon(0)$, то получаем

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right|=\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right|\le\varphi_\varepsilon(0)\int\limits_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}|f(x)|dx=\frac{1}{e},$$

что противоречит равенству (4). Противоречие доказывает, что δ-функция есть сингулярный линейный и непрерывный на $\mathbf{D}$ функционал.

Пространство $\mathbf{D'}$ называется ***пространством обобщенных функций***, а элементы этого пространства – ***обобщенными функциями***.

Определение 6. Будем говорить, что последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, где $f_n\in\mathbf{D'}$, ***сходится*** в $\mathbf{D'}$ к $f\in\mathbf{D'}$, если для любой функции $\forall\ \varphi\in\mathbf{D}$ выполнено равенство

$$(f_n,\varphi)\to(f,\varphi) \text{ при } n\to\infty.$$

Обозначается: $f_n\xrightarrow{\mathbf{D'}} f$

Такая сходимость функционалов называется ***слабой сходимостью***.

Пример. Доказать, что в пространстве $\mathbf{D'}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sin nx = 0$.

Решение. Каждая функция из пространства основных функций $\mathbf{D}$ абсолютно дифференцируема на всей числовой оси. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(\sin nx, \varphi) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\sin nx dx = 0 .$$

Иногда вместо последовательности функционалов $f_n \in \mathbf{D'}$ рассматривают семейство функционалов (f_ε), зависящих от параметра ε. В этом случае запись

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{D'}} f \text{ при } \varepsilon \to +0$$

означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall\ \varphi \in \mathbf{D} .$$

В частности, запись

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{D'}} \delta \text{ при } \varepsilon \to +0$$

означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon, \varphi) = (\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \forall\ \varphi \in \mathbf{D} .$$

Примеры. Доказать, что

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \xrightarrow{\mathbf{D'}} \delta(x) \text{ при } \varepsilon \to +0 .$$

Решение. Очевидно, что функции $f_\varepsilon(x)$ локально интегрируемы и поэтому порождают регулярные функционалы в $\mathbf{D'}$. Возьмем любую функцию $\varphi \in \mathbf{D}$. Пусть ее носитель лежит на отрезке $[-A; a]$. Тогда

$$(f_\varepsilon, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \int_{-A}^{+A} f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x) - \varphi(0) + \varphi(0)]dx .$$

Так как функция $\varphi(x)$ дифференцируема и финитна на $\mathbf{R}$, то, применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем неравенство:

$$|\varphi(x)-\varphi(0)| = |x\varphi(\xi)| \le |x| \cdot \max_{x\in[-A;A]} = c_0|x|.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 1,$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\right| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{+A}\frac{c_0\varepsilon|x|}{x^2+\varepsilon^2}\,dx = \frac{c_0\varepsilon}{\pi}\ln\frac{A^2+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0,$$

то получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon,\varphi)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)]dx =$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\varepsilon^2}\,dx + \frac{\varphi(0)}{\pi}\int\limits_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\,dx\right) = \varphi(0) = (\delta,\varphi).$$

Согласно определению это означает, что $\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \xrightarrow{\mathbf{D'}} \delta(x)$.

3. Операции над обобщенными функциями.

Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Введем операцию умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(x)$.

Если $f \in \mathbf{D'}$, а $\psi(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, то $\psi \cdot f$ – такая обобщенная функция, которая действует на произвольную функцию $\varphi \in \mathbf{D}$ по следующему правилу:

$$(\psi \cdot f, \varphi) = (f, \psi \cdot \varphi). \qquad (5)$$

Данная операция линейна и непрерывна из $\mathbf{D'}$ в $\mathbf{D'}$.

Пример. Показать, что $x\delta = 0$.

Решение. Пользуясь равенством (5), получаем

$$(x\delta,\varphi) = (\delta,\varphi) = (x\varphi)(0) = 0\cdot\varphi(0) = 0 \quad \forall\ \varphi\in\mathbf{D}.$$

Производная обобщенной функции. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbf{R}$ функция. Тогда ее производная $f'(x)$ является локально абсолютно интегрируемой функцией.

Пусть $\forall\ \varphi \in \mathbf{D}$. Для нее существует отрезок $[-A; A]$ такой, что

$$\operatorname{supp}\varphi(x) \subset [-A; A].$$

Отсюда $\varphi(-A) = \varphi(a) = 0$.

Тогда

$$\left(f', \varphi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = \int_{-A}^{+A} f'(x)\varphi(x)dx = \begin{bmatrix} u = \varphi(x), dv = f'(x)dx, \\ du = \varphi'(x), v = f(x) \end{bmatrix} =$$

$$= f(x) \cdot \varphi(x)\Big|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{+A} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -\left(f, \varphi'\right).$$

О п р е д е л е н и е 7. ***Производной обобщенной функции*** $f \in \mathbf{D'}$ называется линейный и непрерывный функционал $f' \in \mathbf{D'}$, задаваемый формулой

$$\left(f', \varphi\right) = -\left(f, \varphi'\right) \quad \forall\ \varphi \in \mathbf{D}. \qquad (6)$$

Производные высших порядков определяются для обобщенных функций по индукции:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)', \ n = 1,2,\dots .$$

Отсюда следует, что любая обобщенная функция f бесконечно дифференцируема, причем

$$\left(f^{(n)}, \varphi\right) = (-1)^n \left(f, \varphi^{(n)}\right) \quad \forall\ \varphi \in \mathbf{D}.$$

Пример. Найти производную функции Хевисайда

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \geq 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. При $x = 0$ функция $\sigma(x)$ является разрывной. Поэтому она не имеет производной в обычном смысле. Однако $\sigma(x)$ является локально интегрируемой, и ее можно рассматривать как обобщенную функцию, действующую на основные функции по правилу

$$(\sigma, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx.$$

Для любой функции $\varphi \in \mathbf{D}$ имеем:

$$\left(\sigma',\varphi\right)=-\left(\sigma,\varphi'\right)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)\varphi'(x)dx=-\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi'(x)dx=-\varphi(+\infty)+\varphi(0)=$$

$$=\varphi(0)=(\delta,\varphi),$$

так как $\varphi(+\infty)=0$.

Отсюда следует, что $\sigma'=\delta$.

Таким образом, производная в обычном смысле может не совпадать с производной в смысле обобщенных функций.

Операция сдвига аргумента для обобщенных функций. Пусть $f(x)$ есть локально интегрируемая на $\mathbf{R}$ функция. Для нее определена операция сдвига аргумента T_h по правилу

$$T_h f(x)=f(x-h).$$

Если $\varphi\in\mathbf{D}$, то

$$\left(T_h f,\varphi\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x-h)\varphi(x)dx=\begin{bmatrix}t=x-h,\\ dx=dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\varphi(x+h)dx=\left(f,T_{-h}\varphi\right).$$

Хотя значение обобщенной функции f в точке не определено, но для нее можно формально ввести операцию сдвига аргумента по аналогии с полученной формулой:

$$\left(T_h f,\varphi\right)=\left(f,T_{-h}\varphi\right). \qquad (7)$$

При этом при любом $h\in\mathbf{R}$ формула (7) определяет $T_h f$ как линейный и непрерывный функционал в пространстве $\mathbf{D}$ т. е. $T_h f\in\mathbf{D'}$. Для функции Дирака $\delta(x)$ сдвиг $T_h\delta=\delta(x-h)$ и $\forall\ \varphi\in\mathbf{D}$ есть

$$\left(\delta(x-h),\varphi\right)=\left(\delta,\varphi(x+h)\right)=\varphi(h).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие функции называются финитными?
2. Дайте определение пространства основных функций.
3. Что называется обобщенной функцией? Приведите примеры обобщенных функций.
4. Что называется слабой сходимостью функционалов?

5. Перечислите основные операции над обобщенными функциями?

ЛИТЕРАТУРА

1. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1 – М.: Наука, 1981.
2. Зорич В.А Математический анализ. Ч.2. – М.: Наука, 1984.
3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1985.
4. Кудрявцев. Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. – М.: Наука., 1989.
5. Математический анализ в вопросах и задачах: Учебн. пособие для вузов / Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984.
6. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч.1/ А.И.Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Выш.шк., 1989.
7. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч. Ч.2/ А.И.Герасимович, Н.П. Кеда, М.Б. Сугак. – Мн.: Выш.шк., 1990.
8. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2т. Т.1. – М.: Наука, 1990.
9. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2т. Т.2. – М.: Наука, 1991.
10. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука., 1988.

Учебное издание

Марченко Лариса Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Тексты лекций для студентов физического факультета

В пяти частях

Часть четвертая

Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных

В авторской редакции

Подписано в печать 26.10.2006. (66) Бумага писчая №1. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Times New Roman Cyr. Усл.п.л.___. Уч.изд.л.__. Тираж 25 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104