ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО СПЕЦКУРСУ
"МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ"

Тема 2: Фильтры (системы) дискретного времени

Определение 1. *Пространство* $l_2(\mathbb{Z})$ (пространство ДВ-сигналов с конечной энергией) состоит из отображений (т.е. двухсторонних последовательностей $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$) с обычными операциями сложения и умножения на числа и нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

Определение 2. *Фильтром дискретного времени* (сокращенно ДВ-фильтром) называется линейный оператор Φ, действующий в пространстве ДВ-сигналов.

Важный пример— *оператор сдвига*

$$Dx(n) := x(n-1).$$

Всюду ниже $D^s x(n) := x(n-s)$ — s-я степень оператора D.

Определение 3. ДВ-фильтр Φ называется *стационарным* (в другой терминологии ЛИВ-*системой*; используется также термин *LTI-система*), если

1) Φ — линейный ограниченный оператор в $l_2(\mathbb{Z})$;

2) Φ является *инвариантным по времени*, т. е. перестановочен со сдвигами: $\Phi(D^s x) = D^s(\Phi x)$ для каждого момента $s \in \mathbb{N}$ и каждого сигнала x.

В связи со свойством 1) определения 3 напомним, что линейный оператор Φ, действующий в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, называется ограниченным, если для некоторой константы $C > 0$ при всех $x \in l_2(\mathbb{Z})$ справедливо неравенство

$$\|\Phi x\| \le C\|x\|.$$

Пример. Является ли данное отображение стационарным фильтром

$$Ax(n) := \sum_{k=1}^{10} \frac{x(n-k)}{2^k}?$$

Решение. Отображение линейно, так как

$$A(x+y)(n) = Ax(n) + Ay(n), \quad A(\alpha x)(n) = \alpha Ax(n)$$

(проверьте это, вычисляя по отдельности обе части каждого равенства).

Сумма ограниченных операторов тоже ограничена (почему?). Значит, для доказательства ограниченности достаточно проверить, что для кажджого k ограничен оператор $A_k x(n) := \frac{x(n-k)}{2^k}$. Но это следует из равенства

$$\|A_k x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{x(n-k)}{2^k} \right|^2 = \frac{1}{4^k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n-k)|^2 = \frac{1}{4^k}\|x\|^2.$$

Аналогично, для проверки перестановочности со сдвигами (т.е. свойства 2 из определения 3) в силу утверждения задачи 1 (см. ниже) достаточно проверить, что $A_k Dx(n) = DA_k x(n)$. Но это так, поскольку обе части этого равенства равны $\frac{x(n-1-k)}{2^k}$. Итак, A есть стационарный фильтр.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что для фильтра Φ справедливость равенства $\Phi D^s = D^s \Phi$ при всех $s \in \mathbb{N}$ следует из равенства $\Phi D = D\Phi$.

Указание. Рассуждайте по индукции.

2. Проверьте, являются ли следующие отображения стационарными фильтрами:

а) $Ax(n) := kx(n)$ $(k \in \mathbb{R})$ ("*усилитель*");

б) $Dx(n) := x(n-1)$ ("*единичная задержка*");

в) $D^s x(n) := x(n-s)$ $(s \in \mathbb{N})$ ("*задержка на* s *секунд*");

г) $Cx(n) := 2x(n-2) - 3x(n-5)$;

д) $Sx(n) := x(2n)$;

е) $Bx(n) = x(n-1)u(1-n)$ (где $u(n) = 0$ при $n < 0$ и $u(n) = 1$ при $n \geq 0$).

Указание. Для проверки условия 2) определения 3 можно воспользоваться результатом задачи 1.

3. Докажите, что оператор $\Sigma x(n) := \sum_{k=1}^{n} x(k)$ не есть стационарный фильтр.

Указание. Рассуждайте от противного: если он является стационарным фильтром, то $\Sigma\delta_1 \in l_2(\mathbb{Z})$ (где $\delta_1(k) = 0$ при $k \neq 1$ и $\delta_1(1) = 1$) и получи́те противоречие.