Математические основы теории обработки сигналов

А. Р. Миротин

Целью данного курса является ознакомление слушателей с основами теории обработки сигналов[1], на примере которой он может убедиться в прикладном значении ряда понятий и результатов классического и функционального анализа.

К задачам теории обработки сигналов относятся их анализ и диагностика, кодирование, квантование и сжатие, передача, хранение, синтез и реконструкция сигналов, получаемых по каналу связи.

§1. **Виды сигналов**

В терминологии теории обработки сигналов, применяемой в инженерных текстах (см., например, [1], [2]) сигнал — это физическая величина (напряжение, сила тока и т.п.), которая зависит от другой (или других) величин. Далее мы будем для наглядности рассматривать зависимость от времени (но это не обязательно, например, при оптической обработке информации сигналом может быть зависимость интенсивности света от координаты точки). При этом различают *сигналы дискретного времени* (ДВ-сигналы) и *сигналы непрерывного времени* (НВ- или *аналоговые сигналы*). Математически *ДВ-сигналы — это функции, определенные на множестве целых чисел* $\mathbb{Z}$ *или его подмножествах* (например, на $\mathbb{Z}_+$; в этом случае говорят о *плюс-сигналах*).

Аналогично, *НВ-сигналы — это функции, определенные на множестве* $\mathbb{R}$ *или его подмножествах* (например, на $\mathbb{R}_+$; в этом случае тоже говорят о *плюс-сигналах*).

Поскольку сигналы — это функции, то различным классам функций (ограниченным, периодическим, действительнозначным и т. п.) соответствуют аналогичные классы сигналов.

Если не оговорено противное, все сигналы мы будем считать действительнозначными.

То небольшое количество понятий и фактов из курса функционального анализа, которые будут использоваться ниже, можно найти в [3].

[1] Теория обработки сигналов была построена Н. Винером в 30-е годы XX века.

Определение 1. *Энергией* ДВ-сигнала $x(n)$ называется величина

$$E(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^2.$$

Таким образом, *ДВ-сигналы, имеющие конечную энергию, — это в точности элементы пространства* $l_2(\mathbb{Z})$, и при этом $E(x) = \|x\|_{l_2}^2$.

Определение 2. *Мощностью* ДВ-сигнала $x(n)$ называется величина

$$P(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2,$$

если предел существует.

Энергия и мощность НВ-сигнала определяются аналогично.
Определение 3. *Энергией* НВ-сигнала $x(t)$ называется величина

$$E(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt.$$

Следовательно, *НВ-сигналы, имеющие конечную энергию, — это в точности функции из пространства* $L^2(\mathbb{R})$, и при этом $E(x) = \|x\|_{L^2}^2$.

Определение 4. *Мощностью* НВ-сигнала $x(t)$ называется величина

$$P(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt,$$

если предел существует.

Поскольку сигнал — это функция, все известные нам свойства функций (периодичность, ограниченность, четность и т. п.) распространяются и на сигналы.

§2. **Фильтры (системы) с дискретным временем**

Как пишут в технической литературе, *фильтр* (в другой терминологии *система* или SISO[2]-*система*) — это устройство, преобразующее сигнал на входе в определенный сигнал на выходе. При этом предполагается, что если сигналам на входе $x_i(t)$ соответствуют сигналы на

[2]single input-single output

выходе $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$, то сигналу на входе $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ соответствует сигнал на выходе $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$. Там это называется «принципом суперпозиции».

Таким образом, на языке функционального анализа фильтр (система), удовлетворяющий принципу суперпозиции, — это линейный оператор.

В данном разделе будет рассматриваться случай дискретного времени (т. е. ДВ-сигналы и соответствующие им фильтры (ДВ-фильтры), часто называемые *цифровыми фильтрами*).

Следующая конструкция дает нам очень важный класс фильтров.

Определение 1. *Свертка ДВ-сигналов* f и h определяется следующим образом:

$$f * h(n) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)h(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

если ряд сходится. В этом случае говорят, что сигналы f и h *свертываемы.*

Определение 2. Оператор $C_h : f \mapsto f*h$ будем называть *оператором свертки* (с последовательностью h).

Всюду в этом параграфе $\delta_k := (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$ $(k \in \mathbb{Z})$ — точки пространства $l_2(\mathbb{Z})$ (δ_{nk} — символы Кронекера).

Определение 3. Оператор

$$(D^k f)(n) := f(n-k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

(f — ДВ-сигнал) называется *оператором сдвига* (на k).

Упражнения. Проверьте, что
1) $D^k\delta_0 = \delta_k$;
2) $f * \delta_k = D^k f$ при всех $k \in \mathbb{Z}$ (в частности, $f * \delta_0 = f$);
3) *оператор сдвига изометричен в пространстве* $l_2(\mathbb{Z})$.

Лемма 1. *В каждом из следующих случаев свертка существует:*
1) *f и h — плюс-сигналы (т. е. f и h обращаются в нуль вне $\mathbb{Z}_+$)*;
2) $f \in l_1(\mathbb{Z})$, $h \in l_p(\mathbb{Z})$ $\;(p \geq 1)$;
3) $f, h \in l_2(\mathbb{Z})$.

Доказательство. Утверждение 2) следует из того, что $h \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Утверждение 3) следует из неравенства $|f(k)h(n-k)| \le (|f(k)|^2 + |h(n-k)|^2)/2$. $\square$

Упражнения. 1) Докажите утверждение 1) леммы 1.

2) Докажите, что если свертки существуют, то

а) $f * g = g * f$ (коммутативность свертки);

б)$f * (g + h) = f * g + f * h$ (дистрибутивность свертки).

Подавляющее большинство устройств-преобразователей сигналов (фильтров) обладает тем свойством, что если сигналу на входе $x(t)$ отвечает сигнал на выходе $y(t)$, то сигналу на входе $x(t-k)$, запаздывающему на k секунд, отвечает сигнал на выходе $y(t-k)$, также запаздывающий на k секунд (это свойство называется *инвариантностью по времени*). Если мы примем еще естественное условие, что это устройство сигналы с конечной энергией преобразует в сигналы с конечной энергией, то придем к понятию стационарного фильтра, которое на языке функционального анализа для дискретного времени формулируется следующим образом.

Определение 4. ДВ-фильтр Φ называется *стационарным* (в другой терминологии ЛИВ-*системой*), если

1) Φ — линейный ограниченный оператор в $l_2(\mathbb{Z})$;

2) Φ является *инвариантным по времени*, т. е. перестановочен со сдвигом: $\Phi(D^k x) = D^k(\Phi x)$ для каждого момента k и каждого сигнала x.

Упражнение. Докажите, что условие 2) следует из равенства $\Phi D = D\Phi$.

Следующая простая теорема дает нам широкий класс стационарных ДВ-фильтров.

Теорема 1. *Если $h \in l_1(\mathbb{Z})$, то C_h есть стационарный ДВ-фильтр.*

Доказательство. Для любого $x \in l_2(\mathbb{Z})$

$$(C_h x)(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)x(n-k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)D^k x(n).$$

Поскольку $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| < \infty$ и $\|D^k\| = 1$, то отсюда следует, что

$$C_h = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)D^k,$$

где ряд абсолютно сходится по операторной норме. Следовательно, C_h есть линейный ограниченный оператор в $l_2(\mathbb{Z})$. Его перестановочность со сдвигом также следует из последнего равенства (и легко проверяется непосредственно). $\square$

Справедливо частичное обращение предыдущей теоремы. Далее будет использоваться тот легко проверяемый факт (проверьте его), что *последовательность* $\delta_k := (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{Z}}$ $(k \in \mathbb{Z})$ *есть ортонормированный базис (см. [3]) пространства* $l_2(\mathbb{Z})$.

Теорема 2. *Каждый стационарный ДВ-фильтр* Φ *имеет вид* C_h, *где* $h = \Phi\delta_0$ *— так называемая импульсная характеристика фильтра* Φ.

Доказательство. Так как любой вектор $x \in l_2(\mathbb{Z})$ имеет вид $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\delta_k$, то

$$\Phi x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\Phi\delta_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)\Phi D^k\delta_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)D^k\Phi\delta_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(k)D^k h = h*x.\square$$

Замечание. Теорема 2 показывает, что стационарный ДВ-фильтр Φ хорошо приближается фильтрами вида

$$\Phi_N x = \sum_{j=-N}^{N} h(j)D^j x.$$

Каждый такой фильтр может быть синтезирован из конечного числа простейших элементов — фильтров вида $k : x(n) \mapsto kx(n)$ («усилитель»), $D : x(n) \mapsto x(n-1)$ («единичная задержка»), $S : (x(n), y(n)) \mapsto x(n) + y(n)$ («сумматор»).

Теорема 1 дает лишь достаточное условие, которому должна удовлетворять импульсная характеристика фильтра, являющегося оператором свертки, для того чтобы он был стационарным, а теорема 2 утверждает, что стационарный фильтр есть оператор свертки, но не дает никакой информации об импульсной характеристике. На самом деле, как показал Н. Винер, *импульсная характеристика стационарного фильтра есть в точности последовательность коэффициентов Фурье некоторой функции из* $L^\infty(\mathbb{T})$. Для доказательства нам требуется некоторая подготовка.

Далее через $L^2(\mathbb{T})$ будет обозначаться гильбертово пространство $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ комплекснозначных функций на единичной окружности $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} :$

$|z| = 1\}$ относительно так называемой нормированной меры Хаара μ на $\mathbb{T}$, т. е. меры Лебега (длины дуги), деленной на 2π. Преимущество такой нормировки состоит в том, что ортонормированный базис в этом пространстве составляют функции z^k, где $z = e^{it}$ — независимая переменная, пробегающая $\mathbb{T}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ по этой системе имеют вид

$$\widehat{\varphi}(n) := \int_{\mathbb{T}} \varphi(z)\overline{z}^n d\mu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{it})e^{-int}dt.$$

При этом в силу теоремы об изоморфизме для гильбертовых пространств (см. [3]) *отображение*

$$F : L^2(\mathbb{T}) \to l_2(\mathbb{Z}), \quad F\varphi := (\widehat{\varphi}(n))_{n\in\mathbb{Z}}\,,$$

ставящее в соответствие каждой функции $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ последовательность ее коэффициентов Фурье, является унитарным оператором (здесь пространство $l_2(\mathbb{Z})$ рассматривается над полем $\mathbb{C}$).

Разложение функции $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ в ряд Фурье по системе $(z^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)z^n.$$

Отметим, что пространсиво $L^2(\mathbb{T})$ изоморфно гильбертову пространству $L^2_{2\pi}$, состоящему из 2π-периодических функций f, принадлежащих $L^2(-\pi,\pi)$, со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt.$$

Изоморфизмом служит отображение $J : L^2(\mathbb{T}) \to L^2_{2\pi}$, $f(z) \mapsto f(e^{it})$.

Лемма 2. *Для любых функций $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{T})$ справедливо равенство*

$$F(\varphi\psi) = (F\varphi) * (F\psi).$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству правила перемножения степенных рядов (упражнение). $\square$

Упражнение. Докажите, что $(f*g)*h = f*(g*h)$, если $f, g, h \in L^2(\mathbb{T})$ (*ассоциативность свертки*).

Указание. Можно применить ряды Фурье.

Определение 5. Ниже через M_φ будет обозначаться *оператор* $\psi \mapsto \varphi\psi$ *умножения на функцию* φ.

Лемма 3. *Оператор* M_φ *ограничен в* $L^2(\mathbb{T})$, *если и только если* $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. *При этом* $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq \|M_\varphi\|$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Для доказательства необходимости нужно в неравенстве $\|\varphi\psi\|_{L^2} \leq \|M_\varphi\|\|\psi\|_{L^2}$ положить $\psi = \chi_B$, где B — произвольное измеримое подмножество $\mathbb{T}$.$\square$

Лемма 4. *Справедливо равенство* $M_{z^k} = F^{-1}D^kF$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Доказательство. Упражнение. $\square$

Напомним, что *тригонометрический полином* — это линейная комбинация одночленов вида z^k, где $z = e^{it}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 3 (первая лемма Винера). *Пусть функция* φ *принадлежит* $L^\infty(\mathbb{T})$, $w = F\varphi$. *Тогда оператор свертки* C_w *есть стационарный фильтр. Обратно, для любого стационарного фильтра* Φ *существует единственная последовательность* w *вида* $F\varphi$, *где* $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$, *такая, что* $\Phi = C_w$, *причем* $\|\Phi\| = \|\varphi\|_{L^\infty}$.

Доказательство. Пусть S_0 — подпространство $l_2(\mathbb{Z})$, состоящее из финитных последовательностей (линейных комбинаций δ_k-х). Тогда $C_wf \in l_2(\mathbb{Z})$ для любой последовательности w вида $F\varphi$, где $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ и любого $f \in S_0$ (поскольку C_wf есть линейная комбинация сдвигов последовательности w, а $w \in l_2(\mathbb{Z})$ в силу равенства Парсеваля, см. [3]). Рассмотрим функцию $p := F^{-1}f$. Это тригонометрический полином в силу финитности f и равенства $F^{-1}\delta_k = z^k$, $k \in \mathbb{Z}$. Имеем

$$\|C_wf\|_{l_2} = \|(F\varphi)*(Fp)\|_{l_2} = \|F(\varphi p)\|_{l_2} = \|p\varphi\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^\infty}\|p\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^\infty}\|f\|_{l_2}.$$

Значит, C_w l_2-непрерывен на S_0 и $\|C_w\| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}$. Следовательно, C_w имеет единственное непрерывное продолжение с S_0 на все l_2. А так как в силу теоремы Рисса (см. [3]) для любого n линейный функционал $g \mapsto (C_wg)(n)$ непрерывен на l_2, то это продолжение совпадает с C_w. Перестановочность оператора C_w со сдвигами уже отмечалась выше.

Обратно, пусть Φ — стационарный фильтр. Рассмотрим оператор $A := F^{-1}\Phi F$, действующий в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Поскольку Φ перестановочен с D^k, из леммы 4 следует, что A перестановочен с M_{z^k} $(k \in \mathbb{Z})$.

В самом деле,

$$AM_{z^k} = F^{-1}\Phi F F^{-1} D^k F = F^{-1}\Phi D^k F = F^{-1} D^k \Phi F = M_{z^k} A.$$

Пусть $\varphi := A1$ (1 — функция на $\mathbb{T}$, тождественно равная 1). Тогда $Az^k = AM_{z^k}1 = M_{z^k}A1 = z^k\varphi$. Поэтому $Ap = \varphi p$ для любого тригонометрического полинома p. Снова пользуясь равенством Парсеваля, имеем

$$\|p\varphi\|_{L^2} = \|F(\varphi p)\|_{l_2} = \|FAp\|_{l_2} = \|FF^{-1}\Phi Fp\|_{l_2} = \|\Phi Fp\|_{l_2} \le \|\Phi\|\|Fp\|_{l_2}$$
$$= \|\Phi\|\|p\|_{L^2}.$$

Так как любая функция $\psi \in L^2(\mathbb{T})$ есть предел последовательности тригонометрических полиномов, из последнего неравенства и леммы Фату (см. [3], [4]) следует, что $\|\varphi\psi\|_{L^2} \le \|\Phi\|\|\psi\|_{L^2}$. В силу леммы 3 отсюда следует, что $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ и $\|\varphi\|_{L^\infty} \le \|\Phi\|$.

Положим $w := F\varphi$. Тогда $w \in l_2$, и $\Phi = S_w$. В самом деле $w = F\varphi = FF^{-1}\Phi 1 = \Phi\delta_0$, но в доказательстве теоремы 2 было показано, что $\Phi = C_h$, где $h = \Phi\delta_0$. Неравенство $\|C_w\| \le \|\varphi\|_{L^\infty}$ было установлено выше. $\square$

Замечание. Предыдущая теорема показывает, что *стационарный фильтр* Φ *полностью характеризуется своей реакцией* $w = \Phi\delta_0$ *на импульсное воздействие* δ_0 (т. е. своей импульсной характеристикой).

Определение 6. Фильтр Φ называется *каузальным* (или *физически реализуемым*), если отсутствие сигнала на входе f до момента s, т. е. равенство $f(t) = 0$ для всех моментов времени $t < s$, влечет отсутствие сигнала на выходе до момента s, т. е. $(\Phi f)(t) = 0$ для всех моментов времени $t < s$. Для инвариантного по времени фильтра это равносильно выполнению последнего условия при $s = 0$ (проверьте это).

Теорема 4 (вторая лемма Винера). *Для каузальности стационарного фильтра* Φ *необходимо и достаточно, чтобы его импульсная характеристика* w *была сосредоточена на* $\mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Если фильтр Φ каузальный, то его импульсная характеристика $w(n) = (\Phi\delta_0)(n)$ равна нулю при $n < 0$, поскольку δ_0 обладает этим свойством.

Обратно, пусть импульсная характеристика w фильтра Φ сосредоточена на $\mathbb{Z}_+$. Тогда с учетом теоремы 2 при $n < 0$ имеем для плюс-сигнала x

$$\Phi x(n) = C_w x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} w(k)x(n-k) = 0. \ \square$$

Если мы рассматриваем произвольные ограниченные сигналы (не обязательно имеющие конечную энергию), то полезным оказывается следующее понятие.

Определение 7. Фильтр Φ называется *устойчивым* (BIBO[3]-*системой*), если он переводит ограниченные сигналы в ограниченные (то есть отображает пространство $l_\infty(\mathbb{Z})$ в себя).

Теорема 5. *Для устойчивости фильтра C_h необходимо и достаточно выполнение условия $h \in l_1(\mathbb{Z})$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть фильтр C_h устойчив. Тогда ряд

$$C_h x(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) x(-k)$$

сходится при всех $x \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Полагая здесь $x(-k) := (-1)^{\mathrm{sgn} h(k)}$, получаем $C_h x(0) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h(k)| < \infty$.

Достаточность условия $h \in l_1(\mathbb{Z})$ очевидна. $\square$

Определение 8. Фильтр Φ называется *обратимым*, если он обратим как линейный оператор в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$.

Теорема 5. *Для обратимости фильтра C_h, где $h \in l_1(\mathbb{Z})$, достаточно выполнение условия* $|F^{-1}h(z)| \geq C > 0$.

Доказательство. По лемме 2 уравнение $C_h x = y$, т.е. $h * x = y$, $(y \in l_2(\mathbb{Z}))$ равносильно уравнению $F^{-1}hF^{-1}x = F^{-1}y$. При наших условиях оно имеет для любого $y \in l_2(\mathbb{Z})$ единственное решение $x = F(F^{-1}y/F^{-1}h)$ в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$. $\square$

[3]bounded input — bounded output

§3. **Фильтры с непрерывным временем**

В этом разделе фильтр — это ограниченный линейный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R})$.

Как и в дискретном случае *стационарный НВ-фильтр — это фильтр, перестановочный* (коммутирующий) с *операторами сдвига*

$$(\tau_h f)(x) := f(x-h) \quad (h \in \mathbb{R})$$

в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Для $\tau_h f$ используется также обозначение f_h.

Такие фильтры могут быть описаны с помощью преобразования Фурье в $L^2(\mathbb{R})$.

Напомним, что *преобразование Фурье функций из* $L^1(\mathbb{R})$ определяется следующим образом:

$$(\mathcal{F}f)(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\lambda x}dx.$$

Кроме того, с помощью теоремы о продолжении оператора по непрерывности (см., например, [3], §39), *этот оператор продолжается с всюду плотного подпространства* $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ *пространства* $L^2(\mathbb{R})$ *до унитарного оператора* (также обозначаемого $\mathcal{F}$) *на всем* $L^2(\mathbb{R})$ (теорема Планшереля). Этот оператор называется L^2-*преобразованием Фурье* (преобразованием Фурье–Планшереля, преобразованием Фурье в пространстве L^2).

При этом справедлива *формула обращения*

$$f(x) = (\mathcal{F}\widehat{f})(-x).$$

Как и в случае ДВ-сигналов, важную роль в теории НВ-сигналов играет следующее понятие.

Определение 1. *Сверткой НВ-сигналов* f и g называется сигнал

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)ds$$

(если интеграл существует)[4].

Лемма 1. *В каждом из следующих случаев свертка существует:*

[4]В технической литературе вместо термина «свертка НВ-сигналов» иногда используется термин «взаимная корреляционная функция».

1) *f и g — локально интегрируемые плюс-сигналы (т. е. f и g интегрируемы по Лебегу на каждом отрезке и сосредоточены на $\mathbb{R}_+$)*;

2) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^\infty(\mathbb{R})$;

3) $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. При этом $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

4) $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^p(\mathbb{R})$ $(p \geq 1)$. При этом $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

Упражнения. 1) Докажите утверждения 1), 2), 3).

Указание. Сначала покажите, что функция $(x; y) \mapsto f(y)g(x-y)$ $m \otimes m$-измерима, если m-измеримы функции f, g на $\mathbb{R}$. Для этого достаточно доказать, что функция $(x; y) \mapsto g(x-y)$ $m \otimes m$-измерима. Пусть $s(x, y) = x - y$. Для любого m-измеримого $E \subset \mathbb{R}$ множество $s^{-1}(E)$ $m \otimes m$-измеримо, поскольку $s^{-1}(E)$ есть полоса, которая после поворота на угол $\pi/4$ вокруг начала координат переходит в полосу $(1/\sqrt{2})E \times \mathbb{R}$. Осталось заметить, что множество $(g \circ s)^{-1}(-\infty, c)$ имеет вид $s^{-1}(E)$, где E m-измеримо. Существование свертки в 3) следует из неравенства $|f(s)g(t-s)| \leq (|f(s)|^2 + |g(t-s)|^2)/2$. Второе утверждение следует из неравенства Коши–Буняковского (см. [3], [4]).

2) Докажите, что если свертки существуют, то

а) $f * g = g * f$ (коммутативность свертки);

б)$f * (g + h) = f * g + f * h$ (дистрибутивность свертки).

Важнейшее свойство свертки выражает следующая

Теорема 1. *Если $f \in L^1(\mathbb{R})$, $g \in L^2(\mathbb{R}) \cup L^1(\mathbb{R})$, то*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}f\mathcal{F}g.$$

Доказательство. Случай $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ рассмотрен, например, в [3], §38. На случай $g \in L^2(\mathbb{R})$ это равенство продолжается «по непрерывности». □

Упражнение. Докажите, что $(f*g)*h = f*(g*h)$, если $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$ (ассоциативность свертки).

Указание. Можно применить преобразование Фурье.

Следующая теорема описывает стационарные НВ-фильтры.

Теорема 2. *Пусть Φ — ограниченный линейный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Для того чтобы Φ коммутировал со сдвигами, т.е. был стационарным НВ-фильтром, необходимо и достаточно, чтобы существовала ограниченная измеримая функция m, такая, что $\mathcal{F}(\Phi f) = m\mathcal{F}f$.*

Доказательство. Достаточность. Для $h \in \mathbb{R}$ положим $e_h(\lambda) := e^{-2\pi i h\lambda}$, и пусть $f \in L^2(\mathbb{R})$. Тогда, как легко проверить, $\widehat{f_h} = e_h\widehat{f}$. Поэтому, если $\mathcal{F}(\Phi f) = m\mathcal{F}f$, то

$$\widehat{\Phi(f_h)} = m\widehat{f_h} = me_h\widehat{f} = e_h\widehat{\Phi f} = \widehat{(\Phi f)_h},$$

и осталось воспользоваться тем, что по теореме Планшереля преобразование Фурье биективно отображает $L^2(\mathbb{R})$ на себя.

Необходимость. Если Φ — ограниченный линейный оператор в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, коммутирующий со сдвигами, то он коммутирует и со свертками. В самом деле, для $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ имеем

$$f * g = \int_{\mathbb{R}} (\tau_y f)g(y)dy,$$

а потому, в силу линейности и непрерывности оператора Φ,

$$\Phi(f * g) = \int_{\mathbb{R}} \Phi(\tau_y f)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \tau_y(\Phi f)g(y)dy = (\Phi f) * g$$

(у нас $\Phi\tau_y = \tau_y\Phi$). С учетом коммутативности свертки отсюда следует, что $(\Phi f) * g = (\Phi g) * f$. Применяя к этому равенству преобразование Фурье, получаем, что для ненулевых $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ справедливо соотношение $\widehat{\Phi f}/\widehat{f} = \widehat{\Phi g}/\widehat{g}$. Таким образом, обозначая это частное через m, получаем равенство $\mathcal{F}(\Phi f) = m\mathcal{F}f$. Из него следует, что оператор $g \mapsto mg$ ограничен в $L^2(\mathbb{R})$, а потому функция m существенно ограничена (т.е. $|m(x)| \leq C$ почти всюду), что легко доказывается от противного (см., например, [3], §27, теорема 6). Изменяя (при необходимости) функцию m на множестве нулевой меры, можно добиться того, что она будет ограничена всюду. $\square$

По аналогии с дискретным случаем стационарный НВ-фильтр может быть описан и в терминах свертки. При этом оказывается, что, как и в дискретном случае, такой фильтр полностью характеризуется своей импульсной характеристикой, т. е. реакцией на импульсное воздействие. Формулировка соответствующего результата в полном объеме требует привлечения теории обобщенных функций (распределений; относительно теории обобщенных функций см., например, [3], глава VIII). Так, импульсное воздействие в случае НВ-сигналов есть распределение (так называемая δ-функция Дирака). Вместо этого ниже мы опишем один важный класс НВ-фильтров, оставаясь в рамках «классического» анализа.

Определение 2. Говорят, что НВ-фильтр Φ *сохраняет периодичность*, если существует такая функция $p(\omega)$ (*спектральная характеристика* фильтра), что

$$\Phi(e^{2\pi i\omega t}) = p(\omega)e^{2\pi i\omega t} \quad (\omega, t \in \mathbb{R}).$$

Теорема 3. *Если спектральная характеристика p сохраняющего периодичность фильтра Φ такова, что функция $\varphi = \mathcal{F}^{-1}p$ принадлежит $L^1(\mathbb{R})$, то фильтр имеет вид*

$$\Phi f = \varphi * f.$$

Обратно, если $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, то оператор $f \mapsto \varphi * f$ в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ является фильтром, сохраняющим периодичность.

Доказательство. По формуле обращения для преобразования Фурье

$$f(t) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega.$$

Используя свойства линейности и непрерывности оператора Φ, теорему 2 и формулу обращения, выводим отсюда,что

$$\Phi f(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)\Phi(e^{2\pi i\omega t})d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega)p(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega =$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}f)(\omega)\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}p)(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f * \varphi)(\omega)e^{2\pi i\omega t}d\omega = (\varphi * f)(t).$$

Обратное утверждение проверяется непосредственно. $\square$

Определение 3. Функция φ из предыдущей теоремы называется *импульсной характеристикой* фильтра Φ.

Можно показать, что, как и в дискретном случае, импульсная характеристика НВ-фильтра является его реакцией на импульсное воздействие. Предыдущая теорема показывает, что фильтр Φ полностью характеризуется своей реакцией на такое воздействие.

§4. **Теорема отсчетов**

Определение 1. Функция

$$\operatorname{sinc}(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

называется *функцией отсчетов.*

Определение 2. Говорят, что *НВ-сигнал f имеет финитный спектр*, если его преобразование Фурье $\widehat{f}$ обращается в нуль вне некоторого отрезка $[-a, a]$ (математики в таком случае говорят, что *функция $\widehat{f}$ имеет компактный носитель*).

Следующий фундаментальный результат, называемый *теоремой отсчетов*, показывает, как НВ-сигнал f с финитным спектром восстанавливается по своим *отсчетным значениям* $f(n/2a)$ (представляющим собой ДВ-сигнал). Этот результат лежит в основе устройств, позволяющих одновременно передавать по одному каналу связи (например, световоду) большое количество сообщений.

Теорема 1 (Котельникова–Шеннона–Найквиста). *Пусть НВ-сигнал f принадлежит $L^2(\mathbb{R})$, причем его преобразование Фурье $\widehat{f}$ обращается в нуль вне отрезка $[-a, a]$. Тогда*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2a}\right) \operatorname{sinc}\left(2a\left(t - \frac{n}{2a}\right)\right).$$

Доказательство. По формуле обращения

$$f(t) = \int_{-a}^{a} \widehat{f}(\omega) e^{2\pi i\omega t} d\omega. \tag{1}$$

На отрезке $[-a, a]$ функция $\widehat{f}$ разлагается в ряд Фурье

$$\widehat{f}(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\frac{\pi}{a}\omega k}, \tag{2}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} \widehat{f}(\omega) e^{-i\frac{\pi}{a}\omega k} d\omega,$$

причем отсюда и из формулы (1) (при $t = -k/2a$) следует, что

$$c_k = \frac{1}{2a} f\left(-\frac{k}{2a}\right). \tag{3}$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \int\limits_{-a}^{a} e^{\pi i (\frac{k}{a} + 2t)\omega} d\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k 2a \operatorname{sinc}\left(a\left(\frac{k}{a} + 2t\right)\right).$$

Из этого равенства с учетом формулы (3) выводим, что

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(-\frac{k}{2a}\right) \operatorname{sinc}\left(2a\left(t + \frac{k}{2a}\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2a}\right) \operatorname{sinc}\left(2a\left(t - \frac{n}{2a}\right)\right). \square$$

Замечание. Созданы специальные устройства (аналого-цифровые преобразователи, АЦП), которые преобразуют НВ-сигнал на входе в соответствующий ДВ-сигнал. После его обработки некоторым процессором (например, после передачи этого сигнала по каналу связи) другое устройство (цифрово-аналоговый преобразователь, ЦАП), работа которого основана на теореме Котельникова–Шеннона–Найквиста, совершает обратное преобразование полученного ДВ-сигнала в НВ-сигнал на выходе.

Литература

ОСНОВНАЯ

1. И. М. Сиберт. Цепи, сигналы, системы: в 2-х частях. М. : Мир, 1988.

2. А. Б. Сергиенко. Цифровая обработка сигналов. СПб. : Питер, 2002.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

3. А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Минск, БГУ, 2003.

4. А. Р. Миротин. Функциональный анализ. Мера и интеграл. М.: URSS, 2012.

5. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

6. А. Р. Миротин, Ж. Н. Кульбакова, И. В. Парукевич. Функциональный анализ (под редакцией А. Б. Антоневича и Я. В. Радыно). Гомель, ГГУ им. Ф. Скорины, 2013 (*лабораторный практикум*).

7. В. А. Зорич. Математический анализ. Ч. II. М. : Наука, 1984.