А. Р. Миротин

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## МЕРА И ИНТЕГРАЛ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
математических специальностей учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования

Москва
URSS, 2012

УДК 517.5
ББК 22.161.5

М 644

Рецензенты: Я. В. Радыно, член-корреспондент НАН Беларуси, заведующий кафедрой функционального анализа Белорусского государственного университета; кафедра теории функций, функционального анализа и прикладной математики УО «Гродненский государственный университет им. Я. Купалы» (заведующий кафедрой — профессор Ю. М. Вувуникян)

Миротин А. Р.
М 644 Функциональный анализ. Мера и интеграл, учебное пособие для студентов математических специальностей университетов — М. : URSS, 2012. — 154 с.
ISBN 5-94845-100-3

Учебное пособие написано в соответствии программами курса «Функциональный анализ и интегральные уравнения» и содержит основные понятия и теоремы теории меры и интеграла Лебега. Предназначено для студентов математических специальностей университетов.

УДК 517.5
ББК 22.161.5

УДК 517.5 ББК 22.161.5

ISBN 5-94845-100-3

©URSS, 2012
©Миротин А.Р., 2012

*Посвящается моему учителю*
*Евгению Алексеевичу Горину*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Данный текст представляет собой расширенную запись семестрового курса лекций по функциональному анализу и интегральным уравнениям, который на протяжении ряда лет автор читает на математическом факультете ГГУ им. Ф. Скорины. Традиционно этот курс в ГГУ начинается в четвертом семестре и содержит теорию меры и интеграла Лебега (обслуживающую не только анализ, но и теорию вероятностей и математическую статистику), а также элементы того, что раньше не совсем удачно называлось теорией функций действительного переменного. Лекции охватывают весь материал по теме «Теория меры и интеграл Лебега», предусмотренный образовательными стандартами Республики Беларусь и учебными программами для высших учебных заведений по специальностям 1-31 03 01 Математика и 1-31 03 03 Прикладная математика. Цель предлагаемых текстов лекций — обеспечить студентов учебным пособием, по которому было бы удобно готовиться к экзамену (включая контролируемую самостоятельную работу).

Особенности настоящего курса сводятся в основном к следующему.

Из трех возможных подходов к построению лебеговского продолжения меры (по Лебегу, по Колмогорову и по Каратеодори) в лекциях выбран последний (два других подхода отражены в учебниках [1] и [7] соответственно). Хотя на первый взгляд он и не выглядит так естественно, как подход Колмогорова, но технически более прост, позволяет сразу рассматривать неограниченные меры и не требует сигма-конечности меры. Известные автору книги на русском языке, использующие этот подход, либо являются монографиями, непригодными в качестве учебников, либо трудны для первоначального знакомства с предметом. В интересной монографии К. Партасарати [10], например, теория Лебега излагается «вперемешку» с теорией вероятностей, и рассчитана эта книга на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников.

При построении теории интеграла используются конечнозначные простые функции. Хотя это и приводит к небольшому усложнению доказательства теоремы об аппроксимации измеримых функций простыми, но дает выигрыш в других вопросах. Интеграл от неотрицательной функции определяется как предел ее интегральных сумм Лебега (понимаемых как интегралы от аппроксимирующей ее монотонной последовательности простых функций, построенной при доказательстве теоремы об аппроксимации). Теорема Радона-Никодима выводится из теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала. Теорема Фубини-Тонелли доказывается с помощью теоремы о монотонных классах. Доказательство теоремы Лебега о дифференцировании проводится с использованием максимальной функции Харди-Литтлвуда. Из других особенностей изложения отметим (возможно, новое) доказательство теоремы Жордана-Хана о разложении знакопеременной меры, основанное на лемме Цорна, а также включение материала, выходящего за рамки типовой программы, а именно, посвященного свертке, единственности инвариантной меры на числовой оси, интегралу Хенстока-Курцвейля, свойствам интеграла Лебега, зависящего от параметра. Этот материал непосредственно примыкает к основному и может быть использован при составлении заданий для курсовых работ студентам, специализирующимся в области математического анализа.

Изложение в лекциях сопровождается довольно значительным числом упражнений (как правило, легких), выполнение большинства из которых необходимо для неформального усвоения материала. Каждая глава заканчивается списком дополнительных упражнений. В конце пособия помещен список всех упражнений, которым можно пользоваться, как задачником. Упражнения, отмеченные знаком *, снабжены ответами и указаниями, также помещенными в конце пособия. Дополнительный (необязательный) материал выделен знаками *. Внутри каждой главы формулы имеют двойную нумерацию, например, (2.1) обозначает первую формулу параграфа 2; теоремы, леммы и т. д. нумеруются раздельно по параграфам. Знак := читается «равняется по определению»; конец доказательства обозначается знаком □.

Профессор Ю. В. Малинковский прочитал рукопись и сделал несколько интересных замечаний, за что автор выражает ему искреннюю благодарность. Особая благодарность рецензентам — члену-корреспонденту НАН РБ Я. В. Радыно и кафедре теории функций, функционального анализа и прикладной математики учреждения образования «Гродненский государственный университет им. Я. Купалы» (заведующий кафедрой — профессор Ю. М. Вувуникян) — за советы, способствовавшие улучшению рукописи.

# ВВЕДЕНИЕ

Безусловно правильным, хотя и далеко не полным, ответом на вопрос «что такое интеграл?» является «предел интегральных сумм». Все дело в том, как строить эти суммы. Как известно, при построении римановых сумм $\sigma(f, P, \xi)$ для функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ исходят из разбиения $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in \Delta_k := [x_{k-1}, x_k]$ и полагают

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{k=1}^{n} y_k m(\Delta_k),$$

где $y_k = f(\xi_k)$, а $m(\Delta_k) = x_k - x_{k-1}$ — длина отрезка $\Delta_k$. Интеграл тогда определяется как предел этих сумм при неограниченном измельчении отрезка (если этот предел существует и не зависит от выбора отмеченных точек).

Интеграл Римана весьма полезен в анализе и его приложениях, однако со временем обнаружился ряд его недостатков, из которых отметим следующие:

- многие «простые» функции (например, функция Дирихле) оказываются не интегрируемыми;

- он не позволяет должным образом развить гармонический анализ (в частности, теорию рядов Фурье);

- «по Риману» нельзя интегрировать функции, заданные на абстрактных множествах (а это необходимо делать, например, при современном подходе к теории вероятностей);

- условия теорем о предельном переходе под знаком интеграла Римана слишком ограничительны;

- пространство интегрируемых по Риману функций с интегральной метрикой не полно;

- условия справедливости основной теоремы математического анализа («формулы Ньютона-Лейбница») являются весьма жесткими.

Это привело к необходимости модификации теории интеграла, что и было сделано А. Лебегом и его последователями в начале XX века.

Исходная идея А. Лебега – при построении интегральных сумм нужно разбивать не область определения, а множество значений $E(f)$ функции $f$. При этом, если точки $y_k$ разбивают отрезок, содержащий $E(f)$ (для простоты мы считаем $f$ ограниченной), на промежутки $I_k$, то интегральные суммы Лебега имеют вид

$$\sum_k y_k m(f^{-1}(I_k)),$$

где $m(f^{-1}(I_k))$ — должным образом обобщенная «длина» (мера) прообраза $f^{-1}(I_k)$ множества $I_k$ при отображении $f$. Поскольку множества $f^{-1}(I_k)$ могут быть устроены весьма сложно, реализация этой идеи потребовала, прежде всего, построения соответствующей теории меры на прямой, затем – теории тех функций, для которых множества вида $f^{-1}(I_k)$ можно измерить (такие функции стали называть измеримыми), и, наконец, собственно теории интеграла.

Отметим, что если в римановых суммах значения функции идут просто в порядке следования их абсцисс, то в лебеговы они входят, так сказать, с учетом кратности. Поэтому, сопоставляя свой процесс интегрирования с римановым, А. Лебег сравнивал их с процессом подсчета большой суммы денег, осуществляемой двумя кассирами, – опытным и неопытным. Неопытный кассир суммирует купюры все подряд, в том порядке, как они ему попадаются. Опытный же сначала раскладывает их по достоинству и лишь затем вычисляет сумму, используя умножение.

Преимущества лебеговского подхода видны уже на примере функции Дирихле $D$, принимающей значение 1 на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$, и значение 0 на множестве $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Поскольку, как мы увидим позже, $m(\mathbb{Q}) = 0$, все интегральные суммы Лебега функции Дирихле равны нулю, а потому интеграл Лебега от $D$ существует (и равен нулю), хотя по Риману она, как уже было отмечено, не интегрируема ни на каком отрезке положительной длины.

Описанная выше схема для случая функций, определенных на числовой прямой, реализуется не проще, чем для функций многих переменных и даже для функций на произвольном пространстве с мерой. Этим и объясняется, что (в нарушение принципа историзма в преподавании) теория Лебега излагается далее сразу в максимальной общности, а исторически первый и важный случай числовой прямой с мерой Лебега рассматривается в качестве «модельного примера»[1].

[1]В классическом учебнике [7] изложение общей теории меры предваряется построением меры Лебега на плоскости.

# Глава 1

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

*Никто не изгонит нас из рая,*
*созданного Кантором.*
Д. Гильберт.

Целью этой небольшой главы является напоминание некоторых понятий и фактов «наивной» (т. е. не аксиоматической) теории множеств, уже известных студентам-математикам, например, по курсам «Введение в специальность» и «Математический анализ». Более подробные сведения (включающие и аксиоматику Цермело-Френкеля) можно найти, например, в [5].

## 1.1 Множества, отношения и отображения

В теории множеств есть два первичных (неопределяемых) понятия — «элемент» и «множество». При этом элемент $x$ может как принадлежать, так и не принадлежать множеству $A$, что записывается как $x \in A$ и $x \notin A$ соответственно. Задать множество — значит указать, какие объекты являются его элементами. Слова «множество», «совокупность», «набор», «семейство» будут считаться синонимами. Совокупность всех подмножеств множества $X$ будет обозначаться $\mathcal{P}(X)$, пустое множество — знаком $\emptyset$. Отметим, что далее соотношение включения $A \subset X$ не исключает, что $A = X$.

Если $\{E_i\}_{i\in I}$ есть семейство множеств, то мы можем образовать *объединение*

$$\cup_{i\in I}E_i := \{x : \exists i\ x\in E_i\}$$

и *пересечение*

$$\cap_{i\in I}E_i := \{x : \forall i\ x\in E_i\}$$

его членов. Если множества $A$ и $B$ не пересекаются, то их объединение будет обозначаться $A\sqcup B$ и называться *дизъюнктным объединением* множеств $A$ и $B$. Дизъюнктное объединение семейства $\{E_i\}_{i\in I}$ будет обозначаться $\sqcup_{i\in I}E_i$.

*Разность* множеств $A$ и $B$ определяется как

$$A\setminus B := \{x : x\in A \text{ и } x\notin B\}.$$

Если из контекста ясно, что все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого «универсального» множества $X$, то разность $X\setminus E$ называется *дополнением* подмножества $E$ множества $X$ и будет обозначаться $E'$. При этом справедливы *правила де Моргана* (формулы двойственности)

$$\left(\bigcup_{i\in I}E_i\right)' = \bigcap_{i\in I}E_i',\quad \left(\bigcap_{i\in I}E_i\right)' = \bigcup_{i\in I}E_i'.$$

Если $X$ и $Y$ — два множества, то их *прямое* (*декартово*) произведение $X\times Y$ есть множество, образованное всеми упорядоченными парами[1] $(x, y)$, где $x\in X, y\in Y$.

*Отношением* между множествами $X$ и $Y$ называется подмножество множества $X\times Y$ (если $X = Y$, то говорят об отношении на множестве $X$). Если $R$ есть отношение между $X$ и $Y$, то вместо $(x, y)\in R$ часто пишут $xRy$.

*Обратное отношение* $R^{-1}$ между множествами $Y$ и $X$ определяется как $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y)\in R\}$.

Наиболее важными являются следующие три типа отношений.

1. Отношение эквивалентности. Это отношение $R$ на множестве $X$, обладающее следующими свойствами:

а) $xRx$ при всех $x\in X$ (*рефлексивность*),

б) $xRy$ тогда и только тогда, когда $yRx$ (*симметричность*),

в) если $xRy$ и $yRz$, то $xRz$ (*транзитивность*).

В этом случае вместо $xRy$ часто пишут $x\sim y$. Множество $\tilde{x} = \{y\in X : y\sim x\}$ называют *классом эквивалентности* элемента $x\in X$. Легко доказать, что $X$ *есть дизъюнктное объединение таких классов* (докажите).

[1] Упорядоченную пару $(x, y)$ можно определить как множество $\{x, \{x, y\}\}$.

2. Отношение порядка. (*Частичным*) *порядком* на множестве $X$ называется отношение $R$ на $X$, которое рефлексивно, транзитивно и обладает следующим свойством:

г) $xRy$ и $yRx$ влечет $y = x$ (*антисимметричность*).

При этом множество $X$ называется *частично упорядоченным*. Если для любых $x, y \in X$ имеет место либо $xRy$, либо $yRx$, то порядок $R$ называется *линейным*, а множество $X$ — *линейно упорядоченным*. Мы будем обозначать отношение порядка знаком $\leq$. Если $x \leq y$, то говорят также, что $x$ *не превосходит* $y$ (или $x$ предшествует $y$). Если $x \leq y$ и $x \neq y$, то пишут $x < y$. Элемент $b \in X$ называется *верхней границей множества* $A \subset X$, если $x \leq b$ при всех $x \in A$. Само множество $A$ при этом называется *ограниченным сверху*. Аналогично определяются нижняя граница и ограниченное снизу множество. Элемент $a \in X$ называется *максимальным*, если из неравенства $a \leq x$ следует $a = x$. Аналогично определяется минимальный элемент множества.

Следующая теорема является обобщением принципа математической индукции.

**Лемма Цорна**. *Если множество $X$ частично упорядочено, причем любое его линейно упорядоченное подмножество ограничено сверху, то в $X$ существует максимальный элемент.*

Иногда вместо леммы Цорна бывает удобно использовать следующее утверждение.

**Принцип максимальности Хаусдорфа.** *Каждое частично упорядоченное множество содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество.*

Более подробно, эта теорема утверждает, что если множество $X$ частично упорядочено, то найдется такое его линейно упорядоченное (относительно порядка, индуцированного из $X$) подмножество $M$, то никакое линейно упорядоченное подмножество множества $X$ не может содержать $M$ в качестве собственного подмножества.

* Лемма Цорна выводится из принципа максимальности Хаусдорфа следующим образом. Будем называть *цепью* любое линейно упорядоченное подмножество множества $X$. По принципу Хаусдорфа в $X$ имеется максимальная цепь $C$. Так как $C$ ограничена, найдется такой элемент $a \in X$, что $c \leq a$ для всех $c \in C$. Тогда элемент $a$ — максимальный. В самом деле, если элемент $b \geq a$, $b \neq a$, то множество $\{b\} \cup C$ будет цепью, содержащей $C$ в качестве собственного подмножества, что противоречит максимальности $C$. $\Box$*

3. Отображения (функции). Интуитивно функция — это зависимость

между переменными величинами. На языке теории множеств этому понятию можно придать строгий смысл. Именно, *отображение* $f : X \to Y$ есть такое отношение $G_f$ между множествами $X$ и $Y$, что для любого $x \in X$ существует единственный $y \in Y$, для которого $xG_fy$. В этом случае пишут $y = f(x)$ (или $f : x \mapsto y$), а $G_f$ называют *графиком отображения* $f$ (по существу, при таком подходе отображение отождествляется со своим графиком). Часто слова «отображение» и «функция» считаются синонимами, но мы будем называть функциями лишь отображения в числовые множества. Для различных типов отображений используются также названия «преобразование», «последовательность», «оператор», «функционал», «мера» и т. д. Часто семейство подмножеств $\{E_i\}_{i\in I}$ множества $X$ тоже определяют как отображение $i \mapsto E_i$ из $I$ в $\mathcal{P}(X)$.

Множество $X$ называют *областью* (или *множеством*) *определения отображения* $f$ (его еще обозначают $D(f)$), а множество

$$f(X) := \{f(x) : x \in X\}$$

(его еще обозначают $E(f)$) — *множеством его значений*. Если $A \subset X$, то мы обозначаем через $f|A$ *сужение отображения* $f$ на множество $A$ (т. е. $D(f|A) = A$, $(f|A)(x) = f(x)$ при $x \in A$). Если отображение $g : A \to Y$ таково, что $g = f|A$, то $f$ называют *продолжением* отображения $g$ с множества $A$ на $X$. Множество значений сужения $f|A$ обозначается $f(A)$ и называется *образом множества* $A$ *при отображении* $f$. Таким образом,

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\}.$$

Если $C \subset Y$, то множество

$$f^{-1}(C) := \{x \in X : f(x) \in C\}$$

называется (полным) *прообразом множества* $C$ *при отображении* $f$. Операция взятия прообраза перестановочна с операциями объединения, пересечения и дополнения, т. е. справедливы следующие равенства:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i), \tag{1.1}$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(E_i), \tag{1.2}$$

$$f^{-1}(E') = (f^{-1}(E))'. \tag{1.3}$$

Кроме того,

$$f\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(F_i), \tag{1.4}$$

но

$$f\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(F_i). \tag{1.5}$$

**Упражнение 1**. Докажите эти соотношения.

*Прямое (декартово)* произведение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ есть множество, образованное всеми упорядоченными наборами (конечными последовательностями) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i, i = 1, \ldots, n$. Другими словами, оно состоит из всевозможных отображений $x : \{1, \ldots, n\} \to \cup_i X_i$, таких, что $x(i) \in X_i, i = 1, \ldots, n$. В таком виде это понятие переносится на произвольные семейства $\{X_i\}_{i\in I}$ не пустых множеств. По определению, прямое (декартово) произведение $\prod_{i\in I} X_i$ состоит из всевозможных отображений $x : I \to \cup_i X_i$, таких, что $x(i) \in X_i, i \in I$ [2]. Возникает вопрос: всегда ли существуют такие отображения, т. е. всегда ли можно образовать новое множество, выбрав из каждого $X_i$ ровно по одному элементу? Оказывается, утверждение о непустоте произведений $\prod_{i\in I} X_i$ не пустых множеств не зависит от остальных аксиом теории множеств. Хотя это утверждение и приводит к ряду удивительных результатов (типа существования не измеримых по Лебегу множеств, см. ниже), но отказ от него сильно обедняет математику, и большинство математиков в настоящее время принимают (и применяют) следующий постулат.

**Аксиома выбора**. *Пусть $I$ — не пустое множество. Множество $\prod_{i\in I} X_i$ не пусто, если не пусты все множества $X_i$.*

Лемма Цорна и аксиома выбора являются следствиями друг-друга. Это значит, что если к какой-нибудь общепринятой системе аксиом теории множеств (например, к уже упоминавшейся системе Цермело-Френкеля) добавить аксиому выбора, то лемма Цорна может быть строго доказана, и наоборот. То же относится к аксиоме выбора и принципу максимальности Хаусдорфа.

Рассмотрим важное понятие обратного отображения. Пусть задано отображение $f : X \to Y$. Если обратное отношение $G_f^{-1}$ между множествами $Y$ и $X$

[2] Если все множества $X_i$ равны $X$, то вместо $\prod_{i\in I} X_i$ пишут $X^I$; таким образом, $X^I$ — это множество всевозможных отображений $I \to X$.

само является отображением (из $Y$ в $X$), то оно называется *обратным отображением (обратной функцией)* и обозначается $f^{-1}$, а исходное отображение $f$ называется *обратимым.* Это равносильно тому, что уравнение $f(x) = y$ при каждом $y \in Y$ имеет, и притом единственное, решение $x =: f^{-1}(y) \in X$ (почему?). В таком случае отображение $f$ называется также *биективным*. Условие биективности полезно разделить на два. Если уравнение $f(x) = y$ при $y \in Y$ имеет не более одного решения, т. е. из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, то $f$ называется *инъективным*. А если это уравнение при каждом $y \in Y$ имеет (вообще говоря, не единственное) решение, т. е. $f(X) = Y$, то $f$ называется *сюръективным* (или *отображением на* $Y$). Таким образом, отображение биективно тогда и только тогда, когда оно инъективно и сюръективно.

Наконец напомним, что если мы имеем два отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то их *композиция* (суперпозиция, сложная функция) $g \circ f : X \to Z$ определяется равенством $g \circ f(x) := g(f(x))$.

**Упражнения 2**. 1) Проверьте, что композиция отображений обладает сочетательным свойством: если еще $h : Z \to T$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2) Будет ли композиция отображений $f, g : X \to X$ обладать переместительным свойством: $g \circ f = f \circ g$?

3) Пусть отображение $f : X \to Y$ обратимо. Чему равны композиции $f^{-1} \circ f$ и $f \circ f^{-1}$?

**Упражнения 3**. *Симметрическая разность множеств* $A$ и $B$ определяется как

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Докажите, что

1) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

2) $B' \triangle A' = B \triangle A$;

3) $C \cap B \subset (C \cap A) \cup (B \triangle A)$;

4) $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$

для любых множеств $A, B, C \subset X$.

## 1.2 Счетные и несчетные множества

Важнейшим открытием Георга Кантора, ознаменовавшим собой возникновение теории (бесконечных) множеств, явилось обнаружение того факта, что бесконечные множества могут различаться «по величине». Чтобы придать этому утверждению строгий смысл, нужно научиться сравнивать бесконечные множества.

**Определение 1**. Множества $X$ и $Y$ называются *равномощными* (*имеющими одинаковую мощность, эквивалентными*), если существует биективное отображение $f : X \to Y$. Этот факт далее будет обозначаться так: $|X| = |Y|$ (или $X \sim Y$). Используются также обозначения $\mathrm{Card}(X) = \mathrm{Card}(Y), \overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$ (обозначение Кантора).

Выполнение нижеследующих упражнений необходимо для надлежащего усвоения начал теории множеств.

**Упражнения 1**. Докажите, что

1) $\{2, 3, \ldots\} \sim \mathbb{N}$;

2) любые два интервала (отрезка) эквивалентны между собой;

3) $(-\pi/2, \pi/2) \sim \mathbb{R}$;

4) отношение $X \sim Y$ рефлексивно, симметрично и транзитивно;

5) $A \sim A_1, B \sim B_1 \Rightarrow A \times B \sim A_1 \times B_1$.

При этом множество $X$ называется *конечным* и состоящим из $n$ элементов, если $X \sim \{1, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). В противном случае $X$ называется *бесконечным*.

Простейшими из бесконечных множеств являются множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел и эквивалентные ему множества.

**Определение 2**. Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству $\mathbb{N}$.

Другими словами, множество $A$ счетно, если его элементы можно занумеровать натуральными числами, т. е. «расположить в последовательность»:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

В этом случае говорят также, что $A$ *имеет счетную мощность* и пишут $|A| = \aleph_0$ (правая часть читается «алеф нуль»)[3].

**Упражнения 2**. Докажите, что

1) множество, эквивалентное счетному, также счетно;

2) объединение конечного и счетного множества счетно;

3)* объединение двух счетных множеств счетно;

4) множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.

Следующие две теоремы показывают (пока на интуитивном уровне), что счетная мощность — наименьшая из мощностей бесконечных множеств.

**Теорема 1.** *Всякое бесконечное множество $A$ имеет счетное подмножество.*

---

[3] $\aleph$ (алеф) — первая буква древнефиникийского алфавита и алфавита языка иврит.

Доказательство. Выберем из множества $A$ элемент $a_1$, из множества $A \setminus \{a_1\}$ — элемент $a_2$, из множества $A \setminus \{a_1, a_2\}$ — элемент $a_3$ и т. д. Множество $\{a_1, a_2, \ldots\}$ — искомое.$\square$

**Теорема 2.** *Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Доказательство. Пусть множество $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ счетно, и $B \subset A$. Обозначим через $a_{n_1}$ элемент множества $B$ с наименьшим номером, через $a_{n_2}$ элемент множества $B \setminus \{a_{n_1}\}$ с наименьшим номером и т. д. Если этот процесс оборвется на некотором шаге, то множество $B$ конечно. В противном случае $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$ счетно. $\square$

**Теорема 3** (основная теорема теории счетных множеств). *Объединение счетного семейства счетных множеств счетно.*

Доказательство. Пусть $A_n = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность счетных множеств. Элементы их объединения можно расположить в последовательность, например, следующим образом:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{11}, \underbrace{a_{12}, \quad a_{21}}_{\text{сумма индексов } 3}, \underbrace{a_{13}, \quad a_{22}, \quad a_{31}}_{\text{сумма индексов } 4}, \ldots\}.\square$$

**Следствие 1**. *Прямое произведение конечного семейства счетных множеств счетно.*

Доказательство. Если множества $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B$ счетны, то по предыдущей теореме счетно множество $A \times B = \cup_{n=1}^{\infty} \{a_n\} \times B$. Случай $n$ сомножителей доказывается методом математической индукции. $\square$

**Замечание**. Отметим, что прямое произведение *счетного* семейства счетных множеств не счетно (см. дополнительное упражнение 17 в конце главы).

**Следствие 2**. *Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.*

Доказательство. Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $m/n,\ n > 0$. При этом отображение $\mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m/n \mapsto (m, n)$ инъективно, т. е. $\mathbb{Q}$ эквивалентно подмножеству множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Осталось воспользоваться предыдущим следствием и теоремой 2. $\square$

**Упражнения 3**. Докажите, что
1)* объединение конечного семейства счетных множеств счетно;
2)* объединение счетного семейства не пустых конечных множеств счетно.

Следующая теорема фактически положила начало содержательной теории (бесконечных) множеств.

**Теорема 4** (теорема Кантора). *Множество действительных чисел не счетно.*

Доказательство. Достаточно доказать несчетность интервала $(0,1)$. Допустим противное: $(0,1)=\{a_1,a_2,\ldots\}$. Запишем каждое из чисел $a_n\in(0,1)$ в виде бесконечной десятичной дроби, исключая запись с девяткой в периоде:

$$a_1=0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots,$$

$$a_2=0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots,$$

$$a_3=0,a_{31}a_{32}a_{33}\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и образуем новое число $b=0,b_1b_2b_2\ldots\in(0,1)$ по следующему правилу: $b_1=1$, если $a_{11}\neq1$ и $b_1=2$, если $a_{11}=1$, $b_2=1$, если $a_{22}\neq1$ и $b_2=2$, если $a_{22}=1$ и т. д. Тогда $b_n\neq a_{nn}$ при всех $n$, т. е. $b\notin\{a_1,a_2,\ldots\}=(0,1)$ — противоречие. $\square$

**Замечание.** Остроумный метод доказательства предыдущей теоремы получил название *диагонального метода Кантора*.

*Существуют и другие способы доказательства теоремы 4, см. упражнение 19 в разделе «Дополнительные упражнения к главе 1» и упражнение 16 в разделе «Дополнительные упражнения к главе 2».*

**Определение 3.** Множество $X$, эквивалентное $\mathbb{R}$, называется *множеством мощности континуума* (пишут: $|X|=\mathfrak{c}$).

**Упражнение 4.** Докажите, что
1) $|(a,b)|=\mathfrak{c}$ $(a<b)$;
2)* $|[a,b]|=\mathfrak{c}$ $(a<b)$.

*Чтобы показать силу теоремы Кантора, укажем одно ее нетривиальное применение. Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами (например, число $\sqrt{2}$ — алгебраическое). В противном случае оно называется *трансцендентным*. Еще Л. Эйлер не сомневался, что такие числа существуют, но первый пример привел Ж. Лиувилль только в XIX веке (число Лиувилля $\sum_{n=1}^{\infty}1/10^{n!}$). Доказательство трансцендентности конкретного числа, как правило, дело весьма трудное. Например, первое доказательство трансцендентности числа $\pi$ (Линдеманн), давшее отрицательное решение знаменитой проблемы квадратуры круга, поставленной еще в Древней Греции, занимало целую книгу. А трансцендентность постоянной Эйлера

$C := \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n} 1/k - \log n)$ не доказана до сих пор. Вместе с тем, *существование* таких чисел легко выводится из теоремы Кантора. В самом деле, множество всех многочленов с целыми коэффициентами счетно (оно эквивалентно $\cup_{n=1}^{\infty}\mathbb{Z}^n$, если отождествить любой такой многочлен с упорядоченным набором его коэффициентов), а множество корней многочлена конечно. Следовательно, *множество всех алгебраических чисел счетно.* Таким образом, трансцендентные числа не просто существуют, но образуют несчетное множество! (Согласно легенде, один из современников Г. Кантора воскликнул, увидев это доказательство: «Это не математика, это теология!».*

До сих пор речь шла лишь о равенстве мощностей (т. е. об эквивалентности множеств), но легко ввести и сравнение множеств по их мощности.

**Определение 4.** Говорят, что мощность множества $A$ *не превосходит мощности множества* $B$ (пишут $|A| \leq |B|$), если $A$ эквивалентно некоторому подмножеству множества $B$. Пишут также $|A| < |B|$, если $|A| \leq |B|$, но $|A| \neq |B|$.

**Примеры 1.** Теорема 1 утверждает, что $\aleph_0 \leq |A|$ для любого бесконечного множества $A$. Теорема 2 утверждает, что если $|X| \leq \aleph_0$, то множество $X$ конечно или счетно.

Таким образом, наименьшая из мощностей бесконечных множеств есть $\aleph_0$. Напротив, как показывает следующая теорема, наибольшей среди мощностей бесконечных множеств нет.

**Теорема 5** (Кантор). *Для любого множества $X$ справедливо неравенство* $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Доказательство.[4] Ясно, что $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$, поскольку $\mathcal{P}(X)$ содержит часть, состоящую из одноточечных подмножеств множества $X$, эквивалентную $X$. Осталось доказать, что множества $X$ и $\mathcal{P}(X)$ не эквивалентны. Допустим противное, т. е. существует биективное отображение $f : X \to \mathcal{P}(X)$. Мы получим противоречие, если построим множество $Y \subset X$, не принадлежащее $f(X)$. Положим

$$Y := \{x \in X : x \notin f(x)\}.$$

Покажем, что $Y \neq f(x)$ ни для какого $x \in X$. Предположим, что это не так, т. е. $Y = f(x)$ для некоторого $x \in X$. Возможны лишь два случая.

1) $x \in Y$. Но тогда $x \in f(x)$ (ведь $Y = f(x)$), что противоречит определению множества $Y$.

[4] Поучительно сравнить это доказательство со следующим «парадоксом брадобрея». В некотором государстве король приказал своему придворному брадобрею брить всех мужчин, которые не бреются сами. Сможет ли брадобрей выполнить этот приказ?

2) $x \notin Y$. Но тогда $x \notin f(x)$ (у нас $Y = f(x)$), а потому $x \in Y$ по определению множества $Y$. Полученное противоречие доказывает теорему 5. $\square$

**Замечание.** Не каждый класс объектов можно называть множеством. Из предыдущей теоремы, например, следует, что класс всех множеств не является множеством. (Допустим, что класс $\mathcal{M}$ всех множеств является множеством. Так как $\mathcal{M} \supset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, то это противоречит теореме 5).

Введенное выше отношение для мощностей является отношением линейного порядка, т. е. справедливы следующие утверждения.

**Теорема 6** (Кантора-Бернштейна). *Если* $|X| \leq |Y|$ *и* $|Y| \leq |X|$, *то* $|X| = |Y|$.

Доказательство. По условию теоремы существуют инъекции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$. Рассмотрим точку $x \in X$ и образуем три подмножества множества $X$ следующим образом. Если $x \in g(Y)$, то образуем элемент $g^{-1}(x) \in Y$; если $g^{-1}(x) \in f(X)$, то образуем элемент $f^{-1}(g^{-1}(x)) \in X$; и т. д. Описанный процесс либо будет продолжаться бесконечно, либо закончится за конечное число шагов на элементе из $X \setminus g(Y)$ (не исключено, что этим элементом будет сам $x$), либо закончится за конечное число шагов на элементе из $Y \setminus f(X)$. В каждом из этих трех случаев мы скажем, что $x$ принадлежит множествам $X_\infty$, $X_X$, $X_Y$ соответственно. При этом $X = X_\infty \sqcup X_X \sqcup X_Y$. Аналогично строится разбиение $Y = Y_\infty \sqcup Y_Y \sqcup Y_X$. Ясно, что $f$ отображает $X_\infty$ на $Y_\infty$ и $X_X$ на $Y_X$, в то время, как $g$ отображает $Y_Y$ на $X_Y$. Таким образом, мы можем определить биективное отображение $h : X \to Y$ по правилу $h(x) = f(x)$, если $x \in X_\infty \sqcup X_X$, и $h(x) = g^{-1}(x)$, если $x \in X_Y$.$\square$

**Теорема 7** (Кантор). *Для любых двух множеств* $X$ *и* $Y$ *либо* $|X| \leq |Y|$, *либо* $|Y| \leq |X|$.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{I}$ всех инъекций из подмножеств $X$ в $Y$, частично упорядоченное по правилу $f \leq g := G_f \subset G_g$. Легко проверить, что упорядоченное множество $(\mathcal{I}, \leq)$ удовлетворяет условиям леммы Цорна (проверьте), а потому содержит максимальный элемент $h$. Пусть $D(h) = A$, $h(X) = B$. Если оба множества $X \setminus A$ и $Y \setminus B$ не пусты, то, выбрав элементы $x_0 \in X \setminus A$ и $y_0 \in Y \setminus B$ и положив $h(x_0) := y_0$, мы получим продолжение $h$ до биекции $\{x_0\} \cup A \to \{y_0\} \cup B$, что противоречит максимальности $h$. Таким образом, либо $A = X$, а тогда $|X| \leq |Y|$, либо $B = Y$, а тогда $h^{-1} : Y \to X$ есть инъекция, и потому $|Y| \leq |X|$.$\square$

**Упражнение 5.** Докажите свойство транзитивности для отношения $|A| \leq |B|$.

**Пример 2.** Используя геометрические соображения, легко доказать непосредственно, что любые два интервала (отрезка) положительной длины равномощны (сделайте это). Так как любой такой интервал содержит отрезок и наоборот, то по теореме Кантора-Бернштейна любой интервал положительной длины равномощен любому отрезку положительной длины (и имеет мощность континуума).

При определении мощностей множеств бывает полезно использовать следующее утверждение в сочетании с теоремой Кантора-Бернштейна.

**Лемма 1** (о сравнении мощностей). *Пусть* $f : X \to Y$.

1) *Если* $f$ *инъективно, то* $|X| \leq |Y|$.

2) *Если* $f$ *сюръективно, то* $|X| \geq |Y|$.

Доказательство. 1) Это очевидно.

2) Образуем множество $Z \subset X$, выбрав из каждого множества $f^{-1}(\{y\})$, $y \in Y$ ровно по одному элементу (аксиома выбора). Тогда отображение $f|Z$ есть биекция $Z$ на $Y$.$\square$

**Пример 3.** Покажем, что квадрат $[0,1] \times [0,1]$ имеет мощность континуума. С этой целью запишем каждую точку $x$ промежутка $[0,1)$ в виде бесконечной десятичной дроби без девятки в периоде: $x = 0,x_1x_2x_3\ldots$, положим $1 = 0,999\ldots$ и рассмотрим отображение

$$f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1] : x \mapsto (0,x_1x_3x_5\ldots; 0,x_2x_4x_6\ldots).$$

Поскольку оно сюръективно, то по лемме о сравнении мощностей справедливо неравенство $|[0,1] \times [0,1]| \leq \mathfrak{c}$. Обратное неравенство очевидно. Этот результат (который Н. Н. Лузин называл «одним из самых глубоких открытий Г. Кантора») кажется парадоксальным, так как он утверждает, что квадрат имеет «столько же» точек, сколько его сторона [5].

## 1.3 Дополнительные упражнения к главе 1

1. Докажите распределительные законы для операций объединения и пересечения:

1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

[5] Кантор писал Дедекинду: «Я это вижу, но не верю».

2. Докажите, что для произвольного семейства множеств $A_i$ справедливы равенства:

1) $(\cup_i A_i) \cap B = \cup_i (A_i \cap B)$,

2) $(\cap_i A_i) \cup B = \cap_i (A_i \cup B)$.

3. Докажите правила де Моргана.

4. Докажите включения

$$(\cup_i A_i) \setminus (\cup_i B_i) \subset \cup_i (A_i \setminus B_i),$$

$$(\cap_i A_i) \setminus (\cap_i B_i) \subset \cup_i (A_i \setminus B_i).$$

5. Докажите, что множество, наделенное отношением эквивалентности, есть дизъюнктное объединение своих классов эквивалентности.

6*. Приведите пример частично упорядоченного множества, имеющего несколько максимальных элементов.

7. Покажите на примере, что включение в формуле (1.5) может быть строгим.

8. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = y$ при каждом $y \in Y$ имеет единственное решение в множестве $X$.

9. Рассмотрим отображение $f : X \to Y$.

а) Докажите, что равенство $f(f^{-1}(A)) = A$ выполняется при всех $A \subset Y$ тогда и только тогда, когда отображение $f$ сюръективно;

б)* Докажите, что равенство $f(A') = f(A)'$ выполняется при всех $A \subset X$ тогда и только тогда, когда отображение $f$ биективно.

10*. Докажите, что если множество на прямой есть объединение попарно не пересекающихся интервалов, то число этих интервалов не более чем счетно.

11*. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

12*. Пусть $A$ — такое подмножество числовой прямой, что каждое его не пустое подмножество имеет наименьший элемент. Докажите, что $A$ не более чем счетно.

13*. Докажите счетность множества всех конечных подмножеств счетного множества $X$.

14*. Пусть $A$ — такое подмножество множества неотрицательных действительных чисел, что множество всевозможных конечных сумм его элементов ограничено. Докажите, что $A$ не более чем счетно.

15*. Пусть множество $A$ счетно, а множество $B$ бесконечно. Докажите, что $|A \cup B| = |B|$.

16*. Докажите, что если $|X_i| = |X|$, то $|\prod_{i \in I} X_i| = |X^I|$.

17*. Докажите, что декартово произведение счетного семейства счетных множеств имеет мощность континуума.

18*. Рассмотрев отображение $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n-1)$, дайте новое доказательство следствия 1 основной теоремы теории счетных множеств. Получите отсюда новое доказательство самой основной теоремы.

19*. Рассмотрим следующее доказательство теоремы Кантора о несчетности интервала $(0, 1)$. Допустим противное: $(0, 1) = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Выберем отрезок $I_1 \subset (0, 1)$, не содержащий $a_1$; затем выберем отрезок $I_2 \subset I_1$, не содержащий $a_2$; и т. д. Приведите принятое допущение к противоречию.

# Глава 2

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ

*Гулять гуляй,*
*да меру знай.*
Народная мудрость.

Прототипами мер являются многие математические, физические и т. п. величины, такие как длина, площадь, объем, вероятность, масса, количество теплоты, электрический и магнитный заряды, цена земельного участка. Основными целями данной главы являются изложение теории продолжения меры, заданной первоначально на «бедной» системе подмножеств множества $X$, до меры, определенной на достаточно «богатой» системе его подмножеств, а также изучение мер на прямой, получающихся в результате такого продолжения.

## 2.1 Системы множеств

Нам потребуются следующие системы множеств, которые далее будут служить областями определения мер.

**Определение 1**. Пусть $X$ — не пустое множество. Не пустая система $\mathcal{A}$ подмножеств множества $X$ называется *алгеброй множеств*, если она удовлетворяет следующим условиям:
1) $B_1, B_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{A}$;
2) $B \in \mathcal{A} \Rightarrow B' \in \mathcal{A}$.

**Упражнение 1**. Докажите следующие свойства алгебры множеств:
1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{A}$;

3) $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cap_{j=1}^{n} B_j,\ \cup_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{A}$.

Таким образом, операции объединения, пересечения и разности, произведенные конечное число раз, не выводят из алгебры множеств.

Как правило, «квалифицированные» меры определены на алгебрах, которые замкнуты и относительно счетных объединений и пересечений (так называемых $\sigma$-алгебрах).

**Определение 2**. Пусть $X$ — не пустое множество. Система $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$ называется *$\sigma$-алгеброй*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathcal{B}$ — алгебра множеств;

2) $B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

**Упражнения 2**. Докажите, что

1) $B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \cap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$;

2) пересечение любого семейства $\sigma$-алгебр подмножеств множества $X$ само является $\sigma$-алгеброй.

3) если для алгебры $\mathcal{B}$ условие 2 предыдущего определения выполняется только для *дизъюнктных* систем $B_n$, то $\mathcal{B}$ будет $\sigma$-алгеброй.

Часто первоначально мера естественным образом определяется на весьма бедной системе множеств следующего типа:

**Определение 3**. Пусть $X$ — не пустое множество. Не пустая система $\mathcal{S}$ подмножеств множества $X$ называется *полуалгеброй* (множеств), если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $B_1, B_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{S}$;

2) $B \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S} :\ B' = \sqcup_{j=1}^{n} B_j$;

3) $X \in \mathcal{S}$.

**Примеры 1**. 1) (модельный пример). Пусть $X = \mathbb{R}$. Система $\mathcal{I}$, состоящая из множеств вида $[a, b)$ и $(-\infty, a)$, где $-\infty < a \leq b \leq +\infty$, как легко проверить, будет полуалгеброй. Она называется *полуалгеброй стрелок*;

2) пусть $X = \mathbb{R}$. Система $\mathcal{A}(\mathcal{I})$, состоящая из множеств вида $\sqcup_{j=1}^{n} I_j$ $I_j \in \mathcal{I}$, будет алгеброй (см. ниже). Она называется *алгеброй элементарных множеств на* $\mathbb{R}$;

*3) пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство. Система $\mathcal{F}$ событий будет $\sigma$-алгеброй*.

Следующая конструкция позволяет строить неограниченное количество примеров $\sigma$-алгебр.

**Определение 4**. Для любой не пустой системы $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ существует наименьшая (по включению) $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$ (это пересечение всех $\sigma$-алгебр, содержащих $\mathcal{E}$, см. выше упражнения 2). Она называется *$\sigma$-алгеброй, порожденной системой* $\mathcal{E}$, и обозначается $\mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Теперь можно дать еще один пример $\sigma$-алгебры, который очень важен для анализа и теории вероятностей.

4) **Определение 5**. $\sigma$-алгебра, порожденная системой $\mathcal{I}$ стрелок, называется *$\sigma$-алгеброй борелевских множеств на* $\mathbb{R}$ и обозначается $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Если $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток, то $\sigma$-алгебру $\mathcal{B}_I := \{B \subset I : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ называют *$\sigma$-алгеброй борелевских подмножеств промежутка* $I$.

**Упражнение 3**. Докажите, что $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ совпадает с
а)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех интервалов;
б)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех открытых множеств из $\mathbb{R}$;
в)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех отрезков.

**Теорема-определение 1** (теорема об алгебре, порожденной полуалгеброй). *Пусть $\mathcal{S}$ есть полуалгебра подмножеств множества $X$. Система $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, состоящая из всевозможных конечных дизъюнктных объединений вида $A = \sqcup_{i=1}^{n} A_i$, где $A_i$ принадлежат $\mathcal{S}$, является алгеброй. Она называется алгеброй, порожденной полуалгеброй $\mathcal{S}$. Элементы этой алгебры будем называть элементарными множествами.*

Доказательство. Проверим для $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ аксиомы алгебры. Справедливость первой вытекает из распределительного закона пересечения относительно объединения (см. дополнительное упражнение 2 к главе 1):

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) \bigcap \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} B_j\right) = \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{m} (A_i \cap B_j)\,.$$

Теперь индукцией по $n$ докажем, что если $E = \sqcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$, то $E' \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$.

Действительно, при $n = 1$ это вытекает из определения полуалгебры. Предположим, что при некотором конкретном $n$ наше утверждение доказано, и рассмотрим множество $E = \sqcup_{i=1}^{n+1} A_i$, где $A_i \in \mathcal{S}$. Так как $E = (\sqcup_{i=1}^{n} A_i) \sqcup A_{n+1}$, то по правилу де Моргана $E' = (\sqcup_{i=1}^{n} A_i)' \cap A'_{n+1}$. В силу индуктивного предположения и определения полуалгебры найдутся такие $B_k, C_l \in \mathcal{S}$, что $(\sqcup_{i=1}^{n} A_i)' = \sqcup_{k=1}^{p} B_k$, $A'_{n+1} = \sqcup_{l=1}^{q} C_l$. Снова применяя распределительный закон, получаем окончательно

$$E' = \left(\bigsqcup_{k=1}^{p} B_k\right) \bigcap \left(\bigsqcup_{l=1}^{q} C_l\right) = \bigsqcup_{k=1}^{p} \bigsqcup_{l=1}^{q} (B_k \cap C_l) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}).\square$$

**Упражнение 4**. Докажите, что $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ есть наименьшая (по включению) алгебра, содержащая $\mathcal{S}$.

Следующий факт будет полезен при изучении измеримых функций.

**Лемма 1** (лемма о прообразе $\sigma$-алгебры). *Для любого отображения $f : X \to Y$ и системы подмножеств $\mathcal{E}$ множества $Y$ справедливо равенство*

$$f^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{E})) = \mathcal{B}(f^{-1}(\mathcal{E})).$$

Доказательство. Поскольку левая часть доказываемого равенства является $\sigma$-алгеброй (используйте формулы (1.1) – (1.3) главы 1), содержащей $f^{-1}(\mathcal{E})$, она содержит правую. Обратное включение следует из того, что система множеств

$$\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(f^{-1}(\mathcal{E}))\}$$

является $\sigma$-алгеброй, содержащей $\mathcal{E}$, а потому содержит и $\mathcal{B}(\mathcal{E})$.$\square$

**Упражнение 5.** Пусть $\mathcal{S}$ — полуалгебра множеств. Докажите, что $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathcal{S})) = \mathcal{B}(\mathcal{S})$.

**Упражнение 6.*** Пусть $\mathcal{E}$ — система подмножеств множества $X, A \subset X$. Докажите, что

$$\mathcal{B}(\mathcal{E}) \cap A = \mathcal{B}(\mathcal{E} \cap A)$$

(через $\mathcal{E} \cap A$ мы обозначаем систему множеств $\{B \cap A : B \in \mathcal{E}\}$).

Невозможно, как правило, дать конструктивное описание $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ подобно тому, как это делалось, например, для $\mathcal{A}(\mathcal{S})$, ввиду чрезвычайной широты $\mathcal{B}(\mathcal{A})$. Работу с $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ иногда облегчает теорема, которую мы сейчас докажем. Для этого введем следующее понятие, часто используемое в теории меры.

**Определение 5**. Не пустая система $\mathcal{M}$ подмножеств множества $X$ называется *монотонным классом*, если она замкнута относительно объединений возрастающих последовательностей и пересечений убывающих последовательностей своих элементов.

**Пример 2.** Система всех лучей на прямой с правым концом $+\infty$ (включая и пустой луч) является монотонным классом.

**Упражнения 7.** Докажите, что

1)* каждая $\sigma$-алгебра является монотонным классом, но обратное неверно;

2) если монотонный класс является алгеброй, то он является также и $\sigma$-алгеброй;

3) пересечение любого семейства монотонных классов является монотонным классом.

**Определение 6**. Наименьший из монотонных классов, содержащих данную систему $\mathcal{E}$ подмножеств множества $X$, называется *монотонным классом, порожденным системой* $\mathcal{E}$, и обозначается $\mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Имеет место

**Теорема 2** (о монотонных классах). *Если* $\mathcal{A}$ *есть алгебра множеств, то* $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Поскольку система $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ является монотонным классом, содержащим $\mathcal{A}$, она содержит и $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Для доказательства обратного включения достаточно убедиться, что $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ является $\sigma$-алгеброй.

Для этого покажем сначала, что $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ удовлетворяет аксиомам алгебры.

1) Пусть $B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Рассмотрим систему множеств

$$\mathcal{N}(B) = \{C \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : B \cap C \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

Легко проверить, что $\mathcal{N}(B)$ есть монотонный класс. Кроме того, $\mathcal{N}(B)$ содержит $\mathcal{A}$ (докажите это, рассмотрев сначала случай $B \in \mathcal{A}$). Следовательно, он совпадает с $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, а потому $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ замкнут относительно пересечений.

2) Докажем, что он замкнут и относительно дополнений. Для этого рассмотрим систему множеств

$$\mathcal{M}' = \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) : B' \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}.$$

Также непосредственно проверяется, что она есть монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$, и следовательно совпадает с $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, а потому $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ замкнут относительно операции дополнения.

Итак, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ есть алгебра множеств. Чтобы убедиться, что это $\sigma$-алгебра, возьмем последовательность $B_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ и образуем *возрастающую* последовательность $B'_n = \cup_{k=1}^{n} B_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Тогда $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} B'_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, что и завершает доказательство. $\square$

## 2.2 Меры. Свойства мер

Следующее понятие является одним из основных в современном анализе и теории вероятностей.

**Определение 1**. Пусть $\mathcal{S}$ есть полуалгебра подмножеств множества $X$. Отображение $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$, не равное тождественно $+\infty$, называется *мерой*, если оно удовлетворяет следующему условию:

если $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ $(A, A_n \in \mathcal{S})$, то

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

($\sigma$-*аддитивность*).

**Определение 2**. Отображение $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$, не равное тождественно $+\infty$, удовлетворяющее условию:

если $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ $(A, A_n \in \mathcal{S}, N \in \mathbb{N})$, то

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$$

(*конечная аддитивность*), называется *конечно-аддитивной мерой* .

Ниже мы увидим, что не каждая конечно-аддитивная мера $\sigma$-аддитивна.

Во избежание недоразумений, вместо «мера» мы иногда будем говорить «$\sigma$-аддитивная мера».

**Упражнения 1**. Докажите, что

1)* для любой (конечно- или $\sigma$-)аддитивной меры $\mu$ справедливо равенство $\mu(\emptyset) = 0$;

2) каждая $\sigma$-аддитивная мера конечно-аддитивна;

3) линейная комбинация конечного числа мер с неотрицательными коэффициентами является мерой;

4) для любого $E \in \mathcal{S}$ функция на $\mathcal{S}$, задаваемая формулой $\nu(A) = \mu(A \cap E)$, является мерой.

Эта мера, суженная на полуалгебру $\mathcal{S}_E = \{A \in \mathcal{S} : A \subset E\}$ подмножеств множества $E$ (проверьте, что $\mathcal{S}_E$ есть полуалгебра), называется *сужением меры $\mu$ на множество $E$*. При этом меру $\mu$ естественно называть *продолжением меры* $\nu$ с $E$ на $X$ (а точнее, с $\mathcal{S}_E$ на $\mathcal{S}$, тогда эта терминология согласуется с принятой в общей теории отображений).

**Примеры 1**. 1) *Мера Дирака*. Зафиксируем точку $a$ непустого множества $X$. Мера, определенная на $\mathcal{P}(X)$ равенством

$$\delta_a(B) = \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \notin B, \end{cases}$$

называется *мерой Дирака*, или мерой единичной массы, сосредоточенной в точке $a$.

2) *Дискретная мера*. Пусть $\{x_n : n = 1, 2, ...\}$ — не более чем счетное подмножество множества $X$, $p_n > 0$ и $\sum_n p_n < \infty$. Для любого $A \subset X$ положим

$$\mu(A) = \sum_{k, x_k \in A} p_k.$$

Полученная мера называется *дискретной*. Она играет важную роль в некоторых вопросах теории вероятностей (при $\sum_n p_n = 1$).

При $X = \{x_n : n = 1, 2, ...\}$ и $p_n = 1$ эта мера называется *считающей* (подумайте, почему).

3) *Мера Лебега на прямой* (модельный пример). Пусть $X = \mathbb{R}$. Мера $m$ на полуалгебре стрелок, заданная равенствами

$$m([a, b)) = b - a, \ m((-\infty, b)) = +\infty$$

(«длина»), называется *мерой Лебега на прямой*.

**Упражнение 2**. Проверьте выполнение условия $\sigma$-аддитивности в примерах 1 и 2.

**Определение 3**. Скажем, что последовательность множеств $B_n$ *стремится к множеству* $B$ *снизу* (пишем $B_n \uparrow B$), если $B_1 \subset B_2, \ldots$ и $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

**Упражнение 3**. Определите $B_n \downarrow B$.

**Теорема 1** (свойства мер). *Мера $\mu$ на алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ обладает следующими свойствами:*

*1) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

*В частности, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (монотонность меры).*

*2) $\sigma$-полуаддитивность. Если $B_n, \cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$, то*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

*3) Непрерывность снизу. $B, B_n \in \mathcal{A}, B_n \uparrow B \Rightarrow \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.*

*4) Непрерывность сверху. $B, B_n \in \mathcal{A}, B_n \downarrow B, \mu(B_1) < \infty \Rightarrow \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.*

Доказательство. 1) Упражнение.

2) Пусть $C_1 := B_1, C_n := B_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} B_i$. Тогда, как легко проверить (проверьте!), $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \sqcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Поэтому

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i).$$

3) Так как $B_n \uparrow$, то предыдущая конструкция множеств $C_n$ упрощается: $C_1 := B_1, C_2 := B_2 \setminus B_1, C_3 := B_3 \setminus B_2, \ldots$. Тогда

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} C_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n).$$

4) Сведем к 3). Пусть $B_n \downarrow B$. Рассмотрим последовательность множеств $B_1 \setminus B_n \uparrow B_1 \setminus B$. В силу 3) имеем $\lim_{n\to\infty} \mu(B_1 \setminus B_n) = \mu(B_1 \setminus B)$, т. е. с учетом свойства 1)

$$\mu(B_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \mu(B_1) - \mu(B),$$

откуда и следует 4). $\square$

**Замечания**. 1) Свойство 1) справедливо и для конечно-аддитивной меры.

2) Конечно-аддитивная мера $\mu$ на алгебре $\mathcal{A}$ обладает свойством *конечной полуаддитивности*: если $B_n \in \mathcal{A}$, то

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mu(B_n).$$

Это доказывается тем же методом, что и свойство 2).

**Следствие 1**. *Пусть мера определена на $\sigma$-алгебре. Тогда объединение не более чем счетного семейства множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

**Упражнение 4.** Докажите, что если $\mu_1, \mu_2$ — две конечные меры, определенные на $\sigma$-алгебрах $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ соответственно, то система $\{A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ является монотонным классом.

**Определение 4.** Мера $\mu$ на множестве $X$ называется $\sigma$-конечной, если $X$ можно представить в виде счетного объединения множеств конечной меры.

***Определение 5.** Мера $\mu$ на множестве $X$ называется *непрерывной*, если $\mu(\{x\}) = 0$ при всех $x \in X$.

Следующие упражнения призваны показать, что *любая $\sigma$-конечная мера есть сумма дискретной и непрерывной.*

**Упражнения 5.** Пусть $\mu$ — конечная мера на $X$. Докажите следующие утверждения.

1)* Множество $X_1 := \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$ не более чем счетно.

2) Положим $X_1 = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}, p_n = \mu(\{x_n\})$ и обозначим через $\mu_d$ дискретную меру, отвечающую этим последовательностям (см. пример выше). Тогда разность $\mu_c = \mu - \mu_d$ является непрерывной мерой.

**Упражнение 6.** Обобщите результат предыдущего упражнения на $\sigma$-конечные меры.*

**Упражнение 7.** Докажите, что для меры $\mu$ на алгебре $\mathcal{A}$ и любых $A, B \in \mathcal{A}$ справедливо неравенство $\mu(A \cap B) \le \sqrt{\mu(A)\mu(B)}$. Верно ли это неравенство для меры, определенной лишь на полуалгебре?

**Упражнение 8**. Пусть $X = \{a, b\}$. Определим функцию $\mu$ на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ следующим образом: $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(\{a\}) = 1,\ \mu(\{b\}) = +\infty,\ \mu(X) = +\infty$. Докажите, что $\mu$ есть мера и она не $\sigma$-конечна.

## 2.3 Продолжение мер

Любая мера продолжается с полуалгебры на некоторую содержащую ее $\sigma$-алгебру в два этапа.

**Теорема 1** (о продолжении меры с полуалгебры на порожденную ею алгебру). *Конечно-аддитивную меру $\mu$ можно единственным образом продолжить с полуалгебры $\mathcal{S}$ до конечно-аддитивной меры $\mu$ на алгебре $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Если $\mu$ $\sigma$-аддитивна, то таково же и ее продолжение.*

Доказательство. Единственность. Пусть $\mu'$– продолжение меры $\mu$ на $\mathcal{A}(\mathcal{S})$. Тогда для любого $A = \sqcup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ $(B_i \in \mathcal{S})$ имеем

$$\mu'(A) = \sum_{i=1}^n \mu'(B_i) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i). \tag{3.1}$$

Таким образом, продолжение, если оно существует, может иметь только вид (3.1).

Существование. Для $A = \sqcup_{i=1}^n B_i \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$ $(B_i \in \mathcal{S})$ положим по определению

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i).$$

а) Докажем корректность этого определения. Пусть $A = \sqcup_{i=1}^n A_i = \sqcup_{j=1}^n B_j$ – два разбиения множества $A$ на элементы $A_i, B_j \in \mathcal{S}$. Рассмотрим «общее измельчение» $C_{ij} := A_i \cap B_j \in \mathcal{S}$ множества $A$ (с подобным приемом мы уже встречались в теории интеграла Римана). Тогда

$$A_i = A_i \cap A = A_i \cap \left( \bigsqcup_{j=1}^n B_j \right) = \bigsqcup_{j=1}^n C_{ij}.$$

Поэтому $\mu(A_i) = \sum_j \mu(C_{ij})$. Аналогично получаем $\mu(B_j) = \sum_i \mu(C_{ij})$ (проделайте это). Следовательно,

$$\sum_i \mu(A_i) = \sum_j \mu(B_j) (= \sum_{ij} \mu(C_{ij})).$$

б) Аддитивность и $\sigma$-аддитивность продолжения будем доказывать параллельно. С этой целью ниже будем считать, что индекс $n$ пробегает конечное или счетное множество (в зависимости от того, является ли мера аддитивной, или $\sigma$-аддитивной). Пусть $A = \sqcup_n A_n,\ A, A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{S})$. В силу определения алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ имеем представления $A = \sqcup_{i=1}^k B_i,\ A_n = \sqcup_{j=1}^{k_n} B_{nj}$ $(B_i, B_{nj} \in \mathcal{S})$. Снова рассмотрим «общее измельчение» $C_{inj} := B_i \cap B_{nj} \in \mathcal{S}$ множества $A$. Как и выше, $B_i = \sqcup_n \sqcup_j C_{inj}$, а потому $\mu(B_i) = \sum_n \sum_j \mu(C_{inj})$. Поэтому

$$\mu(A) := \sum_i \mu(B_i) = \sum_i \sum_n \sum_j \mu(C_{inj}). \tag{3.2}$$

С другой стороны, $\mu(A_n) := \sum_j \mu(B_{nj})$. При этом $B_{nj} = B_{nj} \cap A = B_{nj} \cap (\sqcup_i B_i) = \sqcup_i C_{inj}$, а потому $\mu(B_{nj}) = \sum_i \mu(C_{inj})$. Таким образом,

$$\sum_n \mu(A_n) = \sum_n \sum_j \sum_i \mu(C_{inj}). \tag{3.3}$$

Осталось заметить, что правые части в (3.2) и (3.3) совпадают, так как не зависят от порядка суммирования (почему?). □

**Замечание**. Доказанная теорема показывает, что не нарушая общности мы можем рассматривать меры, определенные на алгебрах множеств (а не на полуалгебрах).

**Следствие 1**. *Мера Лебега $m$ на полуалгебре стрелок («длина») может быть единственным образом продолжена на алгебру элементарных множеств* (пока не доказана $\sigma$-аддитивность $m$, мы можем говорить только о конечно-аддитивном продолжении).

Второй этап продолжения меры не так очевиден. Для его реализации требуется определенная подготовка. Следующая конструкция является абстрактной реализацией идеи вычисления площади с помощью палетки (но рассматриваются «палетки» со счетным множеством ячеек!).

**Определение 1**. Пусть $\mu$ — мера на алгебре $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Определим *внешнюю меру* произвольного множества $E \subset X$ следующим образом:

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_n \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A},\ E \subset \bigcup_n A_n\right\}$$

(инфимум берется по всевозможным конечным или счетным покрытиям множества $E$ элементами из $\mathcal{A}$).

**Замечание**. Дополняя конечные покрытия множества $E$ элементами из $\mathcal{A}$ пустыми множествами, можно свести дело к счетным покрытиям. Более того, достаточно рассматривать лишь дизъюнктные счетные покрытия, поскольку мы можем заменить $A_n$ на $A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$. Подобное покрытие можно трактовать как некую абстрактную палетку со счетным множеством ячеек.

**Теорема 2** (теорема о свойствах внешней меры). *Внешняя мера обладает следующими свойствами:*

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2) $F \subset E \Rightarrow \mu^*(F) \leq \mu^*(E)$ *(монотонность);*
3) $\mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ ($\sigma$ *-полуаддитивность* ).

Доказательство. Свойства 1) и 2) сразу следуют из определения (проверьте).

3) Достаточно рассмотреть случай, когда правая часть конечна. По определению

$$\mu^*(E_j) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) : A_{nj} \in \mathcal{A},\ E_j \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{nj}\right\}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое покрытие $\{A_{nj} :\ n = 1, 2, \ldots\}$ ($A_{nj} \in \mathcal{A}$) множества $E_j$, что

$$\mu^*(E_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_{nj}).$$

А так как семейство $\{A_{nj} :\ n, j = 1, 2, \ldots\}$ есть покрытие множества $\cup_j E_j$, то

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{nj}) < \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) + \varepsilon.$$

Это влечет 3) силу произвольности $\varepsilon$. □

**Замечания**. 1) Из свойств 1) и 3) следует *конечная полуаддитивность* внешней меры: $\mu^*(\cup_{j=1}^n E_j) \le \sum_{j=1}^n \mu^*(E_j)$ (почему?).

2) Функция множества $\mu^*$ может быть даже не конечно-аддитивной на $\mathcal{P}(X)$, в чем нас убеждает следующий пример. Пусть $X = \{a, b\}$, $\mathcal{S} = \{X, \emptyset\}$, $\mu(X) = 1$. Из определения внешней меры сразу следует, что $\mu^*(\{a\}) = \mu^*(\{b\}) = 1$, а потому $\mu^*(X) \ne \mu^*(\{a\}) + \mu^*(\{b\})$.

3) При доказательстве предыдущей теоремы мы не пользовались $\sigma$-аддитивностью меры $\mu$.

А. Лебег указал такую $\sigma$-алгебру $\mathcal{A}^*$ подмножеств множества $\mathbb{R}$, содержащую все стрелки, что сужение $m^*|\mathcal{A}^*$ является ($\sigma$-аддитивной) мерой. Изложенное ниже развитие идей А. Лебега принадлежит К. Каратеодори.

Заметим, что множество $A \subset X$ разбивает множество $E \subset X$ на две части: $E = (E \cap A) \sqcup (E \cap A')$. Из конечной полуаддитивности внешней меры следует, что

$$\mu^*(E) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A'). \tag{3.4}$$

**Определение 2**. Будем говорить, что множество $A \subset X$ *хорошо разбивает множество* $E \subset X$, если предыдущее неравенство обращается в равенство:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A'). \tag{3.5}$$

Следовательно, для проверки того, что $A$ хорошо разбивает $E$, достаточно установить неравенство, противоположное (3.4).

**Определение 3**. Множество $A \subset X$ называется $\mu^*$-*измеримым*, если оно хорошо разбивает любое множество $E \subset X$.

Систему всех $\mu^*$-измеримых подмножеств множества $X$ будем обозначать $\mathcal{A}^*$ или $\mathcal{A}^*_X$.

**Лемма 1.** $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{A}$, $E \subset X$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $A_n \in \mathcal{A}$, покрывающие $E$, что

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap A')) \ge$$

$$\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A').$$

В силу произвольности $\varepsilon$ отсюда следует неравенство, противоположное (3.4). $\square$

**Лемма 2.** *Сужение $\mu^*$ на $\mathcal{A}$ совпадает с $\mu$.*

Доказательство. Пусть множество $A \in \mathcal{A}$, и множества $A_n \in \mathcal{A}$ образуют его счетное покрытие, т. е. $A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Переходя здесь к инфимуму по покрытиям, получаем $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Обратное неравенство выполняется потому, что само множество $A$ образует покрытие $A$.$\square$

Следующий фундаментальный результат служит инструментом для построения мер, определенных на $\sigma$-алгебрах.

**Теорема-определение 3** (теорема о лебеговском продолжении меры). *Для любой меры $\mu$, определенной на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества $X$,*

*1) система $\mathcal{A}^*$ всех $\mu^*$-измеримых множеств есть $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathcal{A}$;*

*2) сужение функции $\mu^*$ на $\mathcal{A}^*$ есть $\sigma$-аддитивная мера, совпадающая с $\mu$ на $\mathcal{A}$.*

*Это сужение называется* лебеговским продолжением меры $\mu$ *и тоже обозначается $\mu$.*

Доказательство. 1) Покажем, что $\mathcal{A}^*$ есть алгебра множеств. Выполнение второй аксиомы алгебры следует из симметричности формулы (3.5) относительно $A$ и $A'$. Для проверки первой выберем $A, B \in \mathcal{A}^*$ и пусть $C = A \cap B$. Тогда для любого $E \subset X$ имеем, дважды применяя определение $\mu^*$-измеримости

$$\mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \cap C') = \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \cap C' \cap A) + \mu^*(E \cap C' \cap A') =$$
$$= \mu^*((E \cap A) \cap B) + \mu^*((E \cap A) \cap B') + \mu^*(E \cap A') =$$
$$= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A') = \mu^*(E),$$

т. е. $C \in \mathcal{A}^*$.

2). Покажем, что $\mathcal{A}^*$ есть $\sigma$-алгебра, а сужение функции $\mu^*$ на $\mathcal{A}^*$ обладает свойством $\sigma$-аддитивности. Пусть множества $A_j \in \mathcal{A}^*$ дизъюнктны, $B = \sqcup_{j=1}^{\infty} A_j$ и $B_n = \sqcup_{j=1}^{n} A_j$. В силу доказанного на шаге 1) $B_n \in \mathcal{A}^*$, а потому для любого $E \subset X$ справедливо равенство

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n'). \tag{3.6}$$

Но для любого $n$ имеем

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*((E \cap B_n) \cap A_n) + \mu^*((E \cap B_n) \cap A'_n) =$$
$$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).$$

Итерируя это равенство, получаем

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \cdots + \mu^*(E \cap A_1).$$

Подставим результат в (3.6):

$$\mu^*(E) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B'_n) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B').$$

Устремляя в последнем неравенстве $n$ к бесконечности и воспользовавшись $\sigma$-полуаддитивностью внешней меры и неравенством (3.4), приходим к неравенствам

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B') \geq \mu^* \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j) \right) + \mu^*(E \cap B') =$$
$$= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B') \geq \mu^*(E). \tag{3.7}$$

Следовательно, все неравенства здесь обращаются в равенства. Отсюда следует, прежде всего, что $B$ хорошо разбивает $E$, а потому принадлежит $\mathcal{A}^*$. Стало быть, $\mathcal{A}^*$ есть $\sigma$-алгебра. Далее, полагая в равенствах, возникающих из (3.7), $E = B$, получаем, что

$$\mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j),$$

а потому сужение $\mu^*|\mathcal{A}^*$ $\sigma$-аддитивно. Остальные утверждения теоремы следуют из лемм 1 и 2. □

**Определение 4**. Если $\mu(X) < \infty$, то мера $\mu$ называется *конечной*.

**Теорема 4** (теорема о единственности продолжения меры). *Пусть $\sigma$-конечные меры $\mu_1$ и $\mu_2$ определены на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, порожденной полуалгеброй $\mathcal{S}$. Если $\mu_1$ и $\mu_2$ совпадают на $\mathcal{S}$, то они совпадают и на $\mathcal{B}(\mathcal{S})$.*

Доказательство. В самом деле, меры $\mu_1$ и $\mu_2$ на $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ тоже совпадают. Класс $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{S}) : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ содержит $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ и замкнут относительно объединений возрастающих последовательностей множеств в силу свойства непрерывности мер снизу. Если $\mu_i$ конечны, то он замкнут и относительно пересечений убывающих последовательностей множеств. Следовательно, он является монотонным, а потому совпадает с $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ (см. теорему о монотонных классах в §1). $\sigma$-конечный случай легко сводится к рассмотренному. $\Box$

Если мера $\mu$ конечна, справедлив следующий критерий измеримости.

**Теорема 5** (критерий Валле-Пуссена $\mu^*$-измеримости). *Пусть* $\mu(X) < \infty$. *Множество* $B \subset X$ $\mu^*$*-измеримо, если и только если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое множество* $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, *что* $\mu^*(A_\varepsilon \bigtriangleup B) < \varepsilon$.

(Напомним, что $A \bigtriangleup B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ — симметрическая разность множеств $A$ и $B$).

Доказательство. Необходимость. По определению внешней меры найдется такая последовательность множеств $A_n \in \mathcal{A}$, что $\cup A_n \supset B$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем натуральное число $N$ таким, что $\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) < \varepsilon/2$, и положим $A_\varepsilon = \cup_{n=1}^{N} A_n, B_\varepsilon = \cup_{n=N+1}^{\infty} A_n$. Тогда $A_\varepsilon \in \mathcal{A},\ A_\varepsilon \cup B_\varepsilon = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, причем

$$\mu(B_\varepsilon) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mu((A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \setminus B) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) - \mu(B) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(B) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку

$$B \bigtriangleup A_\varepsilon = (B \setminus A_\varepsilon) \cup (A_\varepsilon \setminus B) \subset ((A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \setminus A_\varepsilon) \cup ((A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \setminus B) \subset$$
$$\subset B_\varepsilon \cup ((A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \setminus B),$$

то

$$\mu(B \bigtriangleup A_\varepsilon) \le \mu(B_\varepsilon) + \mu((A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \setminus B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть условие теоремы выполнено. Имеем для любого $E \subset X$

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A_\varepsilon) + \mu^*(E \cap A'_\varepsilon).$$

Но легко проверить, что

$$E \cap B \subset (E \cap A_\varepsilon) \cup (B \bigtriangleup A_\varepsilon),\ E \cap B' \subset (E \cap A'_\varepsilon) \cup (B' \bigtriangleup A'_\varepsilon),$$

и $B' \triangle A'_\varepsilon = B \triangle A_\varepsilon$. Значит,

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B') \leq \mu^*(E \cap A_\varepsilon) + \varepsilon + \mu^*(E \cap A'_\varepsilon) + \varepsilon = \mu^*(E) + 2\varepsilon,$$

и осталось положить $\varepsilon \to 0$. $\square$

**Замечание**. Таким образом, если трактовать $\mu^*(A\Delta B)$ как расстояние между $A$ и $B$, в случае конечной меры $\mu^*$-измеримость приобретает следующий прозрачный смысл: множество $A \subset X$ $\mu^*$-измеримо, если его можно с любой степенью точности аппроксимировать элементарными множествами.

***Упражнение 1***. Пусть мера $\mu$ конечна. Проверьте, что отображение $(A, B) \mapsto \mu^*(A\Delta B)$ есть полуметрика на $\mathcal{P}(X)$, которая становится метрикой, если мы отождествим множества $A$ и $B$, для которых $\mu^*(A\Delta B) = 0$.*

**Замечание**. Отметим, что в наших построениях $\sigma$-аддитивной меры, определенной на $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}^*$, $\sigma$-аддитивность исходной меры использовалась лишь при доказательстве леммы 2. Таким образом, описанный выше процесс приводит к $\sigma$-аддитивной мере, определенной на $\sigma$-алгебре, содержащей $\mathcal{A}$, и в случае, когда исходная мера $\mu$ лишь конечно-аддитивна [1]

**Определения 5**. 1) Тройка $(X, \mathcal{B}, \mu)$, где $\mu$ — мера, определенная на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$, называется *пространством с мерой.*

2) В случае, когда $\mu(X) = 1$, мера $\mu$ называется *вероятностной*, а пространство $(X, \mathcal{B}, \mu)$ — *вероятностным пространством.*

3) Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ — пространство с мерой, $E \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}|_E := \{A \subset E : A \in \mathcal{B}\}$, $\mu|_E(A) := \mu(A)$ при $A \in \mathcal{B}|_E$. Тогда пространство с мерой $(E, \mathcal{B}|_E, \mu|_E)$ называется *подпространством пространства* $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

**Определение 6**. Мера $\mu$ называется *полной*, если из того, что $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$, следует, что любое подмножество $A$ множества $N$ тоже принадлежит $\mathcal{B}$ (и, стало быть, $\mu(A) = 0$).

**Упражнение 2***. Лебеговское продолжение любой меры полно. Докажите.

**Резюме**. Таким образом, всякая мера $\mu$, заданная первоначально на полуалгебре $\mathcal{S}$ подмножеств множества $X$, может быть единственным образом продолжена на $\sigma$-алгебру $\mathcal{A}^*$ всех $\mu^*$-измеримых множеств, и это продолжение полно.

---

[1] Применительно к подходу Колмогорова этот факт подчеркивал в своих лекциях Е. А. Горин [3].

## 2.4 Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой

В этом параграфе будет рассмотрен важный случай мер на числовой прямой. В основе дальнейшего изложения лежит следующее простое наблюдение. Пусть $\mu$ — конечная мера на прямой. Если мы рассмотрим функцию $F(x) := \mu((-\infty, x))$, то она не убывает и справедливо равенство

$$\mu([a,b)) = \mu((-\infty, b) \setminus (-\infty, a)) = F(b) - F(a).$$

**Определение 1**. Пусть $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция. *Мера Лебега-Стилтьеса* определяется на полуалгебре стрелок равенством

$$m_F([a,b)) = F(b) - F(a),\ m_F((-\infty, b)) = F(b) - F(-\infty).$$

При этом $F$ называется *функцией распределения меры* $m_F$ (или производящей функцией).

Ясно, что $m_F$ при $F(x) = x$ есть мера Лебега $m$ на прямой.

**Упражнение 1**. Докажите, что $m_F$ — конечно-аддитивная мера, а потому обладает свойством конечной полуаддитивности:

если $[a,b) = \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j)$, то

$$m_F([a,b)) \leq \sum_{j=1}^{n} m_F([a_j, b_j)).$$

Следующая теорема дает критерий $\sigma$-аддитивности меры Лебега-Стилтьеса. В частности, с ее помощью легко строятся примеры конечно-аддитивных, но не $\sigma$-аддитивных мер. Напомним, что функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется непрерывной слева, если она непрерывна слева в каждой точке, т. е. для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $F(x-0) = F(x)$.

**Теорема 1** (теорема о $\sigma$-аддитивности меры Лебега-Стилтьеса). *Мера $m_F$ $\sigma$-аддитивна тогда и только тогда, когда ее функция распределения $F$ непрерывна слева.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $m_F$ $\sigma$-аддитивна. Докажем, что функция $F$ непрерывна слева, используя определение Гейне. Если $x_n \to x$ возрастая, а число $a < x_n, x$, то $[a, x_n) \uparrow [a, x)$, а потому в силу свойства непрерывности меры снизу $m_F([a, x_n)) \to m_F([a, x))$, т. е. $F(x_n) \to F(x)$. Отсюда следует, что $F(x_n) \to F(x)$ для любой последовательности $x_n \to x - 0$. (В самом деле, если предположить, что это не так, т. е. найдется такая последовательность $x_n \to x - 0$, что $F(x_n)$ не сходится к $F(x)$, то для получения противоречия достаточно рассмотреть монотонно возрастающую подпоследовательность последовательности $x_n$).

Достаточность. Пусть функция $F$ непрерывна слева, и пусть $[a,b) = \sqcup_{j=1}^{\infty}[a_j,b_j)$. Тогда $[F(a),F(b)) \supset \cup_{j=1}^{n}[F(a_j),F(b_j))$ для любого $n$, причем промежутки $[F(a_j),F(b_j))$ могут иметь не более одной общей точки ($F$ неубывающая, сделайте чертеж). Поэтому

$$F(b) - F(a) \geq \sum_{j=1}^{n}(F(b_j) - F(a_j)).$$

Полагая здесь $n \to \infty$, получаем

$$m_F([a,b)) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m_F([a_j,b_j)).$$

Для доказательства обратного неравенства предположим сначала, что $-\infty < a < b < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$F(b) - F(b-\delta) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, найдутся такие $\delta_k > 0$, что

$$F(a_k) - F(a_k - \delta_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Поскольку отрезок $[a, b-\delta] \subset \cup_{k=1}^{\infty}(a_k - \delta_k, b_k)$, то по лемме Гейне-Бореля (о конечном покрытии) $[a,b-\delta] \subset \cup_{k=1}^{N}(a_k-\delta_k,b_k) \subset \cup_{k=1}^{N}[a_k-\delta_k,b_k)$ для некоторого $N$. В силу полуаддитивности $m_F$ получаем отсюда

$$m_F([a,b-\delta)) \leq \sum_{k=1}^{N} m_F([a_k - \delta_k, b_k)).$$

Следовательно,

$$F(b-\delta) - F(a) \leq \sum_{k=1}^{N}(F(b_k) - F(a_k - \delta_k)).$$

Комбинируя указанные неравенства, получаем

$$m_F([a,b)) = F(b) - F(a) = (F(b) - F(b-\delta)) + (F(b-\delta) - F(a)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{N}(F(b_k) - F(a_k - \delta_k)) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{N}((F(b_k) - F(a_k)) + (F(a_k) - F(a_k - \delta_k)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{N}(F(b_k) - F(a_k)) + \sum_{k=1}^{N}\frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^{\infty}(F(b_k) - F(a_k)).$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon$ и следует противоположное неравенство.

Наконец, если $a = -\infty$, то для любого $M > 0$ имеем $[-M, b) \subset \sqcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k)$. Рассуждая как выше, получаем $F(b) - F(-M) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_F([a_k, b_k))$, и остается положить $M \to \infty$. Случай $b = +\infty$ рассматривается аналогично. $\square$

**Следствие 1**. *Мера Лебега $\sigma$-аддитивна.*

**Определение 2**. Лебеговское продолжение меры $m_F$ (меры $m$) также называется мерой Лебега-Стилтьеса (соответственно мерой Лебега) и обозначается $m_F$ (соответственно, $m$).

**Определение 3**. $m^*$-измеримые множества называются *измеримыми по Лебегу* (или *измеримыми относительно меры Лебега*).

**Упражнения 2**. Докажите следующие утверждения.

1)* Любое одноточечное подмножество числовой прямой $m_F$-измеримо.

2) Мера Лебега счетного подмножества числовой прямой равна нулю.

3) $m_F((a, b)) = F(b) - F(a + 0)$, $m_F([a, b]) = F(b + 0) - F(a)$, $m_F((a, b]) = F(b + 0) - F(a + 0)$.

4) Мера $m_F$ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывна функция $F$ (напомним, что мера называется непрерывной, если мера каждого одноточечного подмножества равна нулю).

Любопытно, что обращение второго утверждения предыдущего упражнения неверно. Множество, доставляющее соответствующий пример («канторовское множество»), которое мы сейчас построим, представляет общематематический интерес.

**Пример 1**. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$ на три равные части точками $1/3$ и $2/3$ и обозначим через $C_1$ множество $[0, 1/3] \sqcup [2/3, 1]$, получающееся из $[0, 1]$ удалением среднего интервала $(1/3, 2/3)$ длины $1/3$. Получим замкнутое множество с $m(C_1) = 2/3$. Аналогично поступая с отрезками $[0, 1/3]$ и $[2/3, 1]$, получаем замкнутое множество $C_2$ с $m(C_2) = (2/3)^2$ и т. д. В результате будем иметь убывающую последовательность замкнутых множеств $C_n$ с $m(C_n) = (2/3)^n$. По определению *канторовское множество* $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. Оно получается из $[0,1]$ удалением последовательности интервалов $(1/3, 2/3)$, $(1/9, 2/9)$ и $(7/9, 8/9)$ и т. д. (их называют *смежными* для $C$). Ясно, что

$$m(C) = \lim_n m(C_n) = \lim_n (2/3)^n = 0.$$

Покажем, что $C$ имеет мощность континуума. Каждое число $x \in [0,1]$ может быть записано в троичной системе счисления, т. е. имеет разложение вида

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}, \tag{4.1}$$

где $a_j \in \{0, 1, 2\}$. Это представление (как и двоичное, десятичное и т. д.) не всегда однозначно. А именно, число, для которого $a_{n-1} < 2,\ a_n = a_{n+1} = \ldots = 2$ (т. е. с 2 в периоде), равно числу, у которого $a_n = a_{n+1} = \ldots = 0$ (т. е. с 0 в периоде), а $a_{n-1}$ увеличено на единицу (концы смежных интервалов являются такими числами). Условимся в таких случаях всегда рассматривать разложения с «хвостом двоек» (т. е. с 2 в периоде). Тогда $a_1 = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in (1/3, 2/3)$; $a_1 \neq 1,\ a_2 = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$, и т. д. (проверьте!). Поэтому канторовское множество состоит из тех $x \in [0,1]$, которые имеют троичное разложение (4.1) с $a_j \in \{0, 2\}$ при всех $j$. Положим $x_j = a_j/2$ и рассмотрим отображение

$$\varphi : C \to [0,1] : x \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}.$$

Оно сюръективно (каждое число из $[0,1]$ допускает подобное двоичное разложение). Значит, по лемме о сравнении мощностей (см. главу 1) $|C| \geq \mathfrak{c}$. Поскольку обратное неравенство очевидно, наше утверждение доказано.

Рассмотрим отображение $\varphi$ более подробно. Заметим, что если $x$ и $y$ имеют троичные разложения $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ и $y = \sum_{j=1}^{\infty} b_j 3^{-j}$, то $x < y$ тогда и только тогда, когда $a_j = b_j$ для $j < n$ и $a_n < b_n$ при некотором $n$. Поэтому, если точки $x, y \in C$ не являются концами смежных интервалов, то из $x < y$ следует $\varphi(x) < \varphi(y)$. Другими словами, $\varphi$ монотонно возрастает на множестве $C$, из которого удалены концы смежных интервалов, т. е. точки вида $p3^{-k}$. Если же $x, y \in C$ являются концами некоторого смежного интервала, то $\varphi(x) = \varphi(y)$, так как являются двумя двоичными разложениями одного и того же числа вида $q2^{-j}$. Продолжим $\varphi$ до отображения всего отрезка $[0,1]$ на себя, полагая $\varphi$

на каждом смежном интервале постоянным и равным значению на его концах. Возникающая в результате функция $\varphi$ (*функция Кантора*) будет неубывающей. А так как множество ее значений есть весь отрезок $[0, 1]$, — то и непрерывной (она не имеет скачков, а других точек разрыва у монотонной функции быть не может). График функции $\varphi$ иногда называют *канторовской лестницей.*

**Упражнение 3**. Постройте канторовскую лестницу на нескольких смежных интервалах.

**Замечания**. 1) Каждая из мер $m_F$ определена, вообще говоря, на своей $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}^*_F(\mathbb{R})$, зависящей от $F$ (при $F(x) = x$ будем писать $\mathcal{A}^*(\mathbb{R})$ вместо $\mathcal{A}^*_F(\mathbb{R})$). Вместе с тем, поскольку система $\mathcal{A}^*_F(\mathbb{R})$ содержит все стрелки, она, будучи $\sigma$-алгеброй, содержит и все борелевские множества (проверьте), которые, таким образом, оказываются «универсально измеримыми». Поэтому часто мерой Лебега-Стилтьеса называют сужение $m_F$ на $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

2) Меры, определенные на $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, называют *борелевскими* (на прямой; аналогично определяется борелевская мера на промежутке). Любая борелевская мера $\mu$ на $\mathbb{R}$ имеет вид $m_F$, где $F(x) = \mu([0, x))$, если $x \geq 0$, $F(x) = -\mu([x, 0))$, если $x < 0$; для конечной меры $\mu$ можно взять $F(x) = \mu((-\infty, x))$ (см. замечание в начале параграфа).

3) Если неубывающая непрерывная слева функция $F$ определена лишь на промежутке $I = [a, b)$, то, дословно повторяя предыдущие рассуждения, мы получим меру Лебега-Стилтьеса на $I$.

Установим одно полезное свойство меры Лебега-Стилтьеса, выражающее связь такой меры с естественной топологией числовой прямой.

**Теорема 2** (о регулярности меры Лебега- Стилтьеса). *Пусть $\mu = m_F$ есть мера Лебега-Стилтьеса на $\mathbb{R}$ с функцией распределения $F$. Тогда для любого борелевского $E \subset \mathbb{R}$*

*1) $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U$ открыто, $E \subset U\}$;*

*2) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K$ компактно, $K \subset E\}$*

(свойство 1) называют *внешней*, а свойство 2) — *внутренней регулярностью* меры $\mu$).

Доказательство. 1) Так как всякое отрытое множество на прямой есть объединение не более чем счетного набора интервалов, достаточно доказать, что

$$\mu(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu((a_j, b_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)\right\}$$

(инфимум берется по всевозможным покрытиям множества $E$ не более чем счетными наборами интервалов). Для доказательства обозначим правую часть через

$a(E)$ и заметим, что $\mu(E) \leq a(E)$ в силу счетной полуаддитивности меры $\mu$. С другой стороны,

$$\mu(E) = \mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j, b_j)) : E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [a_j, b_j) \right\},$$

где инфимум берется по всевозможным покрытиям множества $E$ не более чем счетными наборами стрелок. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие множества $E$ не более чем счетным набором стрелок $[a_j, b_j)$, что $\sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j, b_j)) < \mu(E) + \varepsilon$. Далее, в силу непрерывности слева функции распределения $F$ для любого $j$ найдется такое $\delta_j > 0$, что $F(a_j) - F(a - \delta_j) < \varepsilon/2^j$. Тогда $E \subset \cup_{j=1}^{\infty}(a_j - \delta_j, b_j)$ и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu((a_j - \delta_j, b_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j - \delta_j, a_j)) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j, b_j)) <$$

$$< \sum_{j=1}^{\infty} (F(a_j) - F(a - \delta_j)) + \mu(E) + \varepsilon < \mu(E) + 2\varepsilon,$$

откуда $a(E) \leq \mu(E)$ в силу произвольности $\varepsilon$.

2) В силу 1) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое открытое $U \supset E'$, что $\mu(U) < \mu(E') + \varepsilon/2$. Положим $C = U'$. Тогда $C$ есть замкнутое множество, содержащееся в $E$, причем $E \setminus C = C' \setminus E' = U \setminus E'$, а потому

$$\mu(E \setminus C) = \mu(E) - \mu(C) = \mu(U) - \mu(E') < \varepsilon/2,$$

откуда $\mu(C) > \mu(E) - \varepsilon/2$. Рассмотрим последовательность компактных множеств $K_n = C \cap [-n, n]$. Так как $K_n \uparrow C$, то в силу непрерывности меры снизу в этой последовательности найдется такой компакт $K \subset C$, что $\mu(K) > \mu(C) - \varepsilon/2$. Следовательно, $K \subset E$ и $\mu(K) > \mu(E) - \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon$ отсюда следует второе утверждение теоремы. $\square$

**Пример 2.** Дж. Витали показал (используя аксиому выбора), что существуют не $m^*$-измеримые множества. Отсюда, в частности, следует, что функция множества $m^*$ не является аддитивной на $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Конструкция Витали вкратце такова. Два числа из отрезка $I = [0, 1]$ назовем эквивалентными, если их разность рациональна. Образуем множество $V$, выбрав из каждого класса эквивалентности по одному элементу. Если $\{q_n\} = \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, то легко проверить (проверьте), что

$$[0, 1] \subset \bigsqcup_n (q_n + V) \subset [-1, 2].$$

Если бы множество $V$ было $m^*$-измеримо, то из левого включения следовало бы, что оно имеет положительную меру (в противном случае $1 = m([0,1]) \leq \sum_n m(q_n + V) = 0$). Но тогда $3 = m([-1,2]) \geq \sum_n m(q_n + V) = \infty$, — противоречие. Здесь мы воспользовались первым утверждением следующего упражнения.

**Упражнение 4***. Докажите, что для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathbb{R}$ и чисел $x, \lambda \in \mathbb{R}$ множества $x + A := \{x + a : a \in A\}$ и $\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$ тоже измеримы по Лебегу и справедливы равенства $m(x + A) = m(A), m(\lambda A) = |\lambda| m(A)$. Первое из этих равенств выражает свойство *трансляционной инвариантности* меры Лебега.

**Пример 3**. Найдем меру Лебега множества $A$ тех точек интервала $(0;1)$, в десятичной записи которых цифра тысячных не равна нулю. Каждое число $x \in A'$ имеет вид $x = 0,x_1x_20x_3\ldots = 0,x_1x_2 + 0,000x_3\ldots$. При этом множество $B = \{0,x_1x_2 : x_{1,2} = 0,\ldots,9\}$, образованное первыми слагаемыми, состоит из 100 элементов, а множество, образованное вторыми слагаемыми, есть $\{0,000x_3\ldots \in (0;1) : x_i = 0,\ldots,9\} = (0;0,001)$. Таким образом, $A' = \sqcup_{y \in B}(y + (0;0,001))$. Пользуясь аддитивностью и трансляционной инвариантностью меры Лебега, получаем теперь, что $m(A') = 100 \cdot 0,001 = 0,1,\ m(A) = 1 - m(A') = 0,9$.

***Замечание**. Доказано, что $m^*$-неизмеримое множество нельзя построить без использования аксиомы выбора. В то же время, для некоторых пространств с мерой неизмеримые множества легко построить конструктивно.

**Пример 4.** Пусть $X = [0,1]^2, \mathcal{B} = \{A \times [0,1] : A \in \mathcal{B}_{[0,1]}\}, \mu(A \times [0,1]) := m(A)$. Тогда множество $W = [0,1] \times \{1/2\}$ не $\mu^*$-измеримо (проверьте).*

**Упражнение 5***. Постройте меру Лебега на окружности по аналогии с построением меры Лебега на прямой.

**Упражнение 6.*** Пусть $\mu$ — конечная непрерывная мера Лебега-Стилтьеса на $\mathbb{R}$. Докажите, что $\mu$ принимает все значения из отрезка $[0, \mu(\mathbb{R})]$.

В заключение рассмотрим несколько важных примеров мер на прямой.

**Пример 5.** Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — возрастающая последовательность точек промежутка $[a,b)$, а числа $p_k > 0$ $(k = 1,\ldots,n)$. Легко проверить, что функция $H(x) := \sum_{k, x_k < x} p_k$ не убывает и непрерывна слева (функции такого типа называются *функциями скачков*). При этом мера, определяемая на полуалгебре стрелок, содержащихся в $[a,b)$, равенством

$$\mu_H([\alpha,\beta)) = H(\beta) - H(\alpha) = \sum_{k, x_k \in [\alpha,\beta)} p_k,$$

есть дискретная мера на $[a, b)$.

Класс мер Лебега-Стилтьеса, в некотором смысле противоположный предыдущему, доставляет следующий

**Пример 6.** Пусть функция $p$ интегрируема по Риману на $[a, b]$. В силу аддитивности интеграла, функция множеств, определяемая на полуалгебре стрелок, содержащихся в $[a, b)$, с помощью интеграла Римана

$$\mu([\alpha, \beta)) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)dx,$$

есть $m_F$, где $F(x) = \int_a^x p(t)dt$.

**Замечание.** Это частный случай меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Общий случай будет рассмотрен в следующей главе.

*Следующий пример показывает, что не каждую борелевскую меру на прямой удобно задавать ее функцией распределения (хотя каждая такая мера является мерой Лебега-Стилтьеса).

**Пример 7.** Пусть $s \geq 0, \delta > 0$. Для любого $A \subset \mathbb{R}$ положим

$$H^s_\delta(A) = \inf\{\sum_j m(I_j)^s : A \subset \cup_j I_j, m(I_j) \leq \delta\},$$

где инфимум берется по всевозможным не более чем счетным покрытиям множества $A$ стрелками $I_j$ длины меньше $\delta$. Так как отображение $\delta \mapsto H^s_\delta(A)$ не возрастает (почему?), существует предел

$$H^s(A) = \lim_{\delta \to +0} H^s_\delta(A).$$

Оказывается, сужение этой функции множества на $\sigma$-алгебру борелевских множеств является мерой. Эта мера называется *$s$-мерной мерой Хаусдорфа* на прямой. Аналогично определяется $s$-мерная мера Хаусдорфа на $\mathbb{R}^n$. Она служит для измерения подмножеств $\mathbb{R}^n$ малой размерности.

**Упражнения 7***. Докажите, что

1) $H^0$ — считающая мера;
2) $H^s(\lambda A) = \lambda^s H^s(A)$ $(\lambda > 0)$;
3) $H^s(x + A) = H^s(A)$;
4) $H^s = 0$ при $s > 1$.*

## 2.5 Дополнительные упражнения к главе 2

1*. Пусть $\mu$ – конечная мера. Докажите, что для любых счетных наборов $(A_i)$, $(B_i)$ $\mu$-измеримых множеств, для которых $B_i \subset A_i$, справедливы неравенства

$$\mu(\cup_i A_i) - \mu(\cup_i B_i) \leq \sum_i (\mu(A_i) - \mu(B_i)),$$

$$\mu(\cap_i A_i) - \mu(\cap_i B_i) \leq \sum_i (\mu(A_i) - \mu(B_i)).$$

2. Докажите свойство конечной полуаддитивности внешней меры.

3. Докажите свойства 1 и 2 внешней меры.

4*. Пусть множество $A \subset [a, b]$ измеримо (по Лебегу) и $m(A) = \alpha > 0$. Докажите, что существует такое подмножество $B \subset A$, что $m(B) = \alpha/2$.

5. Докажите, что мера $\mu_H$ из примера 4 §4 есть дискретная мера на $[a, b)$.

6. Доведите до конца рассуждение примера 5 §4.

7*. Докажите, что для конечной конечно-аддитивной меры, определенной на алгебре множеств, свойство непрерывности (сверху или снизу) влечет $\sigma$-аддитивность.

8. Докажите, что если $\mu^*(E) = 0$, то множество $E$ $\mu^*$-измеримо.

9*. Докажите, что для любого $m^*$-измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ найдется такое множество $G$ типа $G_\delta$, содержащее $E$, что $m(E) = m(G)$ (множество называется множеством типа $G_\delta$, если оно есть пересечение счетного числа открытых).

10*. Докажите, что все открытые и замкнутые множества на прямой являются борелевскими.

11. Докажите, что если для неубывающих функций $F$ и $G$ на прямой выполняется равенство $m_F = m_G$, то $F - G = \mathrm{const}$.

12. Приведите пример множества $E \subset \mathbb{R}$, для которого $m(\partial E) \neq 0$ (здесь $\partial E = \bar{E} \setminus \mathrm{int} E$ — граница множества $E$).

13. Докажите, что любое борелевское подмножество числовой прямой измеримо по Лебегу.

14. Пусть измеримые по Лебегу множества $A, B \subset [0, 1]$ таковы, что $m(A) + m(B) > 1$. Докажите, что $A \cap B \neq \emptyset$.

15. Докажите, что для любой монотонно возрастающей функции $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция $m_F$ конечно-аддитивна на полуалгебре стрелок.

16*. Доведите до конца следующее доказательство несчетности отрезка $[0, 1]$. Допустим противное: $(0, 1) = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Выберем положительное $\varepsilon < 1$ и окрестность $I_1 \subset (0,1)$ точки $a_1$ длины $<\varepsilon/2$, затем окрестность $I_2 \subset (0,1)$ точки $a_2$ длины $<\varepsilon/4$, и т. д. и рассмотрим объединение $\cup I_n$.

17. Существуют ли неограниченные подмножества числовой прямой конечной положительной меры Лебега?

18*. Пусть $F(t) = -[-t]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Докажите, что $m_F$ — дискретная мера, определенная на множестве всех подмножеств множества $\mathbb{R}$. Более того,

$$m_F(A) = \begin{cases} |A \cap \mathbb{Z}|, & \text{если множество } A \cap \mathbb{Z} \text{ конечно },\\ +\infty, & \text{если множество } A \cap \mathbb{Z} \text{ бесконечно,} \end{cases}$$

где прямые скобки обозначают количество элементов.

19. Пусть

$$\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ или } A' \text{ не более чем счетно }\}.$$

Положим

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ не более чем счетно,}\\ 0, & A' \text{ не более чем счетно.} \end{cases}$$

Докажите, что $\mathcal{B}$ есть $\sigma$-алгебра, а $\mu$ — $\sigma$-аддитивная мера.

20*. Докажите, что в любом измеримом по Лебегу подмножестве числовой прямой положительной меры найдутся две точки, разность которых рациональна.

21*. Пусть пространство с не сигма-конечной мерой $(X, \mathcal{B}, \mu)$ таково, что $\mu(A) < \infty$ при всех $A \in \mathcal{B}, A \neq X$. Докажите, что существует такое число $c > 0$, что $\mu(A) < c$ при всех $A \in \mathcal{B}, A \neq X$.

22*. Докажите, что для $\mu$-измеримых множеств $A$ и $B$ конечной меры справедливо неравенство

$$\mu(A)^2 + \mu(B)^2 \leq (\mu(A \triangle B) + \sqrt{2}\mu(A \cap B))^2.$$

23*. Докажите, что функция Кантора $\varphi$ удовлетворяет следующему тождеству ($x \in [0,1]$):

$$\varphi(x) + \varphi(1-x) = 1.$$

24*. Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастает и непрерывна слева. Докажите, что для любого борелевского $B \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$m_F(B) = m(F(B)).$$

25. Докажите, что отображение $\delta \mapsto H^s_\delta(A)$ (см. пример 7 в §4) не возрастает.

# Глава 3

# ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

*Я не понимаю, какой интерес может*
*представлять женщина для мужчины,*
*если она не знает интеграл Лебега.*
Настоящий студент-математик.

В данной главе будет определен интеграл Лебега функций, определенных на пространстве с мерой, и установлены его основные свойства.

## 3.1 Измеримые функции

Прежде чем переходить к построению интеграла Лебега, выясним, какие функции мы будем интегрировать.

Всюду ниже $(X, \mathcal{B}, \mu)$ есть пространство с $\sigma$-конечной мерой (модельный пример — пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{A}^*(\mathbb{R}), m)$). Множества из $\mathcal{B}$ будем называть *$\mu$-измеримыми* (измеримыми, если ясно, о какой мере идет речь). Для функции $f : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ через $X(f < c)$ будем обозначать множество $\{x \in X : f(x) < c\}$. Другими словами, $X(f < c) = f^{-1}((-\infty, c))$. Аналогичный смысл имеют выражения $X(f > c)$, $X(f \le c)$ и т. д.

**Определение 1**. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *$\mu$-измеримой* (измеримой, если ясно, о какой мере идет речь), если $X(f < c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$.

*Если $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, то измеримая функция на нем называется случайной величиной*.

Выделим важный класс функций на прямой, измеримых относительно меры Лебега.

**Определение 2**. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *борелевской*, если $X(f < c) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ для любого $c \in \mathbb{R}$.

**Упражнение 1**. Докажите, что

1) постоянная функция измерима;

2) непрерывная функция на прямой является борелевской;

3)* функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет борелевской тогда и только тогда, когда прообраз (при отображении $f$) любого борелевского множества является борелевским множеством.

**Теорема 1** (о равносильных определениях измеримости). *Для функции $f : X \to \mathbb{R}$ следующие утверждения равносильны:*

*1) $X(f < c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$;*

*2) $X(f \leq c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$;*

*3) $X(f > c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$;*

*4) $X(f \geq c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$.*

Доказательство проводится по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Например, докажем, что $1 \Rightarrow 2$. Для этого заметим, что $(f(x) \leq c) \iff (\forall n \in \mathbb{N}\ f(x) < c + 1/n)$. Следовательно,

$$X(f \leq c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X(f < c + 1/n) \in \mathcal{B}.$$

Утверждение $2 \Rightarrow 3$ следует из того, что

$$X(f > c) = (X(f \leq c))' \in \mathcal{B}.$$

Остальные импликации доказываются аналогично. $\square$

**Следствие 1**. *Если функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима, то измеримы также и все множества вида $X(a < f < b)$, $X(a \leq f \leq b)$, $X(a \leq f < b)$, $X(a < f \leq b)$, $X(f = b)$.*

**Упражнение 2.*** Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ $\mu$-измерима. Докажите, что прообраз $f^{-1}(B)$ борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ есть $\mu$-измеримое множество.

Класс измеримых функций, как правило, очень широк, в чем нас убеждают следующие результаты.

**Теорема 2** (о сохранении измеримости при композиции с непрерывной функцией). *Если $\Omega$ — открытое множество в $\mathbb{R}^2$, функция $F : \Omega \to \mathbb{R}$ непрерывна,* *а функции $f, g$ измеримы на $X$, причем $(f(x), g(x)) \in \Omega$ при каждом $x \in X$, то на $X$ измерима также и функция $F(f, g)$.*

Доказательство. Из определения непрерывной функции на языке окрестностей легко вывести, что для любого $c \in \mathbb{R}$ множество $F^{-1}((-\infty, c))$ открыто в $\Omega$ (а значит и в $\mathbb{R}^2$), а потому может быть представлено в виде объединения не более чем счетного числа прямоугольников вида $I_n \times J_n$, где $I_n, J_n$ — интервалы: $F^{-1}((-\infty, c)) = \cup_n I_n \times J_n$ (нужно взять достаточно малые прямоугольные окрестности точек этого множества вида $I \times J$, где интервалы $I, J$ имеют рациональные концы). Если теперь мы положим $h = F(f, g)$, то

$$X(h < c) = \{x \in X : F(f(x), g(x)) < c\} = \{x \in X : (f(x), g(x)) \in$$

$$\in \cup_n I_n \times J_n\} = \cup_n (f^{-1}(I_n) \cap g^{-1}(J_n)) \in \mathcal{B}. \square$$

**Следствия 2**. 1) (Сохранение измеримости при арифметических операциях над функциями.) *Семейство измеримых на $X$ функций образует алгебру относительно поточечных операций сложения и умножения функций, а также умножения функции на число.*

2) *Если функции $f, g$ измеримы, то измеримы также и функции* $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$. *В частности,*

3) *измеримы функции* $f^+ := \max\{f, 0\}$ *и* $f^- := -\min\{f, 0\}$ (положительная и отрицательная части $f$), *а также функция* $|f| = f^+ + f^-$.

**Упражнения 3**. 1) Докажите, что частное двух измеримых функций также есть измеримая функция при условии, что знаменатель нигде не обращается в нуль.

2)* Пусть функция $f$ измерима. Докажите, что композиция $D \circ f$, где $D$ — функция Дирихле, тоже измерима.

3)* Пусть функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелевские. Докажите, что композиция $f \circ \varphi$ тоже есть борелевская функция (а потому $m$-измерима).

Всюду далее через $\limsup_n f_n$ ($\liminf_n f_n$) мы будем обозначать верхний (соответственно нижний) пределы последовательности $f_n$.

**Теорема 3** (о сохранении измеримости при предельном переходе). *Если $(f_n)$ — последовательность функций, измеримых на $X$, то измеримы также функции*

$$g_1 = \sup_n f_n, \;\; g_2 = \inf_n f_n, \;\; g_3 = \limsup_n f_n, \;\; g_4 = \liminf_n f_n.$$

*В частности, измерима функция $g = \lim_n f_n$, если предел существует.*

Доказательство. Заметим, что для любого действительного $c$ неравенство $g_1(x) \le c$ равносильно тому, что $\forall n\ f_n(x) \le c$. Следовательно,

$$X(g_1 \le c) = \bigcap_{n=1}^{\infty} X(f_n \le c) \in \mathcal{B},$$

что доказывает измеримость $g_1$.

Измеримость $g_2$ теперь следует из легко проверяемого равенства $g_2(x) = -\sup_n(-f_n(x))$.

Для завершения доказательства сталось воспользоваться известными равенствами для верхнего и нижнего пределов

$$g_3(x) = \inf_n \sup_{k \ge n} f_k(x), g_4(x) = \sup_n \inf_{k \ge n} f_k(x).\square$$

**Упражнение 4**. Докажите, что производная дифференцируемой на некотором интервале числовой прямой функции измерима по Лебегу на этом интервале.

Далее нам понадобится следующий важный класс измеримых функций.

**Определение 3**. Функция $\varphi : X \to \mathbb{R}$ называется *простой*, если она измерима и множество ее значений конечно.

Важным примером простой функции является *индикатор множества* $A \subset X$ (в другой терминологии — характеристическая функция множества $A$), определяемый равенством

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

(индикатор пустого множества считается равным нулю).

**Упражнения 5**. Докажите

1) простоту индикатора измеримого множества (будет ли простой функцией индикатор неизмеримого множества?);

2) равенство $\chi_A \chi_B = \chi_{A \cap B}$;

3) равенство $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A \triangle B}$;

4) импликацию $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \chi_A + \chi_B = \chi_{A \sqcup B}$;

5) импликацию $A \supset B \Rightarrow \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_B$;

6) импликацию $A_n \uparrow A \Rightarrow \chi_A = \lim_n \chi_{A_n}$.

**Лемма 1** (о каноническом представлении простой функции). *Любая простая функция единственным образом представляется в виде*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(x), \qquad (1.1)$$

*где числа $a_i$ попарно различны, $A_i \in \mathcal{B}$, $X = \sqcup_{i=1}^n A_i$.*

Доказательство. Пусть $\{a_1, \dots, a_n\}$ есть множество значений функции $\varphi$, $A_i := X(\varphi = a_i)$. Тогда $A_i \in \mathcal{B}$, и $X = \sqcup_{i=1}^n A_i$. Кроме того, равенство (1.1) выполняется, поскольку при $x \in A_i$ обе его части равны $a_i$. Тем самым, существование представления (1.1) доказано.

Единственность. Если функция $\varphi$ имеет представление (1.1) (с соответствующими ограничениями на $a_i$ и $A_i$), то $\{a_i : i = 1, \dots, n\}$ есть ее множество значений, причем $A_i = X(\varphi = a_i)$ (проверьте!). $\square$

**Упражнения 6**. Докажите, что

1) простые функции образуют алгебру относительно поточечных операций сложения и умножения функций, а также умножения функции на число;

2) линейная комбинация индикаторов $\sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i}$, где числа $b_i$ попарно различны, а множества $B_i \subset X$ попарно не пересекаются, является простой функцией тогда и только тогда, когда $B_i \in \mathcal{B}$;

2) функция $\max\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ является простой вместе с функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Следующая теорема будет для нас служить основой всей теории интегрирования по Лебегу.

**Теорема 4** (об аппроксимации измеримых функций простыми). *Для любой неотрицательной измеримой функции $f$ на $X$ существует такая последовательность неотрицательных простых функций $\varphi_n^f$, что $\varphi_n^f(x) \uparrow f(x)$ поточечно на $X$.*

Доказательство. Для каждого натурального $n$ определим простую функцию $s_n^f$ на $X$ по следующему правилу (сделайте чертеж для случая, когда $f$ монотонно возрастает):

$$s_n^f(x) = \begin{cases} \frac{k}{n}, & \text{если } \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n} \ (k = 0, \dots, 2^n), \\ \frac{2^n+1}{n}, & \text{если } f(x) \ge \frac{2^n+1}{n}. \end{cases}$$

Тогда $0 \le s_n^f(x) \le f(x)$, причем, если $f(x) \in [0, (2^n+1)/n)$, то

$$0 \le f(x) - s_n^f(x) \le \frac{1}{n}.$$

Значит, для любого $x$ найдется такой номер $N$, что последнее неравенство справедливо при всех $n > N$.

Наконец положим $\varphi_n^f(x) = \max\{s_1^f(x), \dots, s_n^f(x)\}$. Тогда $\varphi_n^f$ — неубывающая последовательность простых функций, и $s_n^f(x) \le \varphi_n^f(x) \le f(x)$. Следовательно, для любого $x$ при достаточно больших $n$ выполняются неравенства

$$0 \le f(x) - \varphi_n^f(x) \le f(x) - s_n^f(x) \le 1/n,$$

откуда и следует утверждение теоремы. $\square$

**Упражнение 7**. Докажите, что построенная выше последовательность $\varphi_n^f$ простых функций сходится к $f$ равномерно, если $f$ ограничена.

**Определение 4**. Говорят, что некоторое свойство выполняется на $X$ $\mu$-*почти всюду* (сокращенно $\mu$-п.в.), если оно не выполняется лишь на множестве меры нуль.

В частности,

- говорят, что функции $f, g$ на $X$ *равны* $\mu$-*п.в.* (и пишут $f = g$ $\mu$-п.в.), если $\mu(X(f \neq g)) = 0$;

- говорят, что последовательность $f_n$ функций на $X$ *сходится к* $f$ $\mu$-*п.в.* (и пишут $f_n \to f\mu$-п.в.), если $\mu(X(f_n \not\to f)) = 0$.

**Упражнения 8**. Пусть $\mu$ – полная мера. Докажите следующие утверждения:

1)* если $f = g$ $\mu$-п.в., а функция $f$ измерима, то функция $g$ тоже измерима;

2)* если $f_n \to f\mu$-п.в., а функции $f_n$ измеримы, то функция $f$ тоже измерима.

Представляет интерес также следующий тип сходимости последовательности измеримых функций.

**Определение 5**. Для $\varepsilon > 0$ положим $A_n(\varepsilon) := X(|f_n - f| \geq \varepsilon)$. Говорят, что последовательность $f_n$ измеримых на $X$ функций *сходится к* $f$ *по мере* (пишут: $f_n \to f$ по мере $\mu$, а также $f_n \stackrel{\mu}{\to} f$), если $(\forall\varepsilon > 0)\mu(A_n(\varepsilon)) \to 0$ $(n \to \infty)$.

*В случае вероятностной меры вместо сходимости по мере говорят о *сходимости по вероятности.**

Между различными типами сходимости существуют интересные связи, из которых мы отметим следующие.

**Теорема 5** (теорема Егорова). *Пусть $\mu(X) < \infty$. Если последовательность измеримых на $X$ функций $f_n \to f\mu$-п.в., то для любого положительного $\varepsilon$ найдется такое измеримое $E_\varepsilon \subset X$, $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, что $f_n$ сходится к $f$ равномерно на $E'_\varepsilon$.*

Доказательство. Можно считать, что $f_n \to f$ всюду. Для натуральных $n$ и $k$ рассмотрим множество

$$E_n(k) := A_n(1/k) = \bigcup_{m \geq n} X(|f_m - f| \geq \frac{1}{k}).$$

Очевидно, что $E_{n+1}(k) \subset E_n(k)$.

Докажем, что $\forall k \cap_{n\geq 1} E_n(k) = \emptyset$. Допустим противное и выберем $x \in \cap_{n\geq 1} E_n(k)$. Тогда для любого $n$ найдется такое $m \geq n$, что $|f_m(x) - f(x)| \geq 1/k$. Следовательно, $f_n(x) \nrightarrow f(x)$ — противоречие.

Теперь в силу непрерывности меры сверху $\forall k \lim_{n\to\infty} \mu(E_n(k)) = 0 (n \to \infty)$. Поэтому для любого положительного $\varepsilon$ и для любого $k$ найдется такой номер $n(k)$, что $\mu(E_{n(k)}(k)) < \varepsilon/2^k$.

Рассмотрим множество

$$E_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n(k)}(k)$$

и покажем, что оно удовлетворяет заключению теоремы.

Сначала заметим, что

$$\mu(E_\varepsilon) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n(k)}(k)) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Теперь предположим, что $x \notin E_\varepsilon$. Тогда для любого $k$ выполняется $x \notin E_{n(k)}(k)$, т. е. $\forall k x \notin X(|f_m - f| \ge \frac{1}{k})$ при всех $m \ge n(k)$. Другими словами, $\forall k |f_m(x) - f(x)| < 1/k$ при всех $m \ge n(k)$, т. е. $\sup_{x\in E'_\varepsilon} |f_m(x) - f(x)| \to 0$ при $m \to \infty$.$\Box$

**Упражнение 9***. Докажите утверждение, обратное теореме Егорова.

Из теоремы Егорова легко вытекает

**Следствие 3**. *Пусть $\mu(X) < \infty$. Если $f_n \to f$ $\mu$-п.в., то $f_n \to f$ по мере $\mu$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем множество $E_\varepsilon$ в соответствии с теоремой Егорова. По этой теореме существует также такой номер $N_\varepsilon$, что $(\forall n > N_\varepsilon \forall x \in E'_\varepsilon)|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Следовательно, при $n > N_\varepsilon$ имеем $X(|f_n - f| \ge \varepsilon) \subset E_\varepsilon$, а потому $\mu(X(|f_n - f| \ge \varepsilon)) \to 0$ $(n \to \infty)$.$\Box$

**Упражнение 10***. Докажите, что условие конечности меры в следствии 3 является существенным.

Утверждение, обратное следствию 3, не верно, в чем нас убеждает следующий пример.

**Пример 1**. Пусть $X$ есть отрезок $[0,1]$, наделенный мерой Лебега $m$. Для каждого натурального $k$ разобьем $[0,1]$ на $k+1$ равных частей точками $j/k$, $j = 1,\dots,k$, положим

$$g_j^{(k)} = \chi_{[(j-1)/k, j/k]},\ j = 1,\dots,k$$

и образуем последовательность

$$(f_n) := (g_1^{(1)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)}, \dots, g_1^{(k)}, g_2^{(k)}, \dots, g_k^{(k)}, \dots).$$

Тогда $f_n \to f$ по мере $\mu$. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ имеем при $n \to \infty$

$$m(A_n(\varepsilon)) = m(\{x \in [0,1] : |f_n(x)| \ge \varepsilon\}) =$$

$$= m\left(\left[\frac{j-1}{k(n)}, \frac{j}{k(n)}\right]\right) = \frac{1}{k(n)} \to 0$$

(мы воспользовались тем, что $f_n = g_j^{(k)}$ при некотором $k = k(n)$, причем $k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$).

Но, с другой стороны, для любого $x \in [0,1]$ последовательность $(f_n(x))$ одержит бесконечно много нулей и единиц, а потому не сходится ни в одной точке.

В то же время, справедлива следующая

**Теорема 6** (Ф. Рисс). *Пусть $\mu(X) < \infty$. Если последовательность измеримых на $X$ функций $f_n$ сходится к функции $f$ по мере $\mu$, то у нее существует подпоследовательность, сходящаяся к $f$ $\mu$-п.в.*

Доказательство. Пусть множества $E_n(k)$ — те же, что и в теореме Егорова. В ходе доказательства упомянутой теоремы было установлено, что $\forall k$ $\mu(E_n(k)) \to 0 (n \to \infty)$. Следовательно, существует такой номер $n(k)$, что $\mu(E_{n(k)}(k)) < 2^{-k}$. Если мы положим $B_k := \cup_{m \geq k} E_{n(m)}(m)$, то

$$\mu(B_k) \leq \sum_{m=k}^{\infty} \mu(E_{n(m)}(m)) < \frac{1}{2^k}.$$

Покажем, что подпоследовательность $f_{n(k)}$ — искомая. Действительно, пусть точка $x$ из $X$ такова, что $f_{n(k)}(x)$ не стремится к $f(x)$. Тогда $|f_{n(k)}(x) - f(x)| \geq 1/k$, т.е. $x \in E_{n(k)}(k)$ для бесконечного множества номеров $k$. Но тогда $x \in \cap_{k=1}^{\infty} B_k$. Таким образом, $X(f_{n(k)} \nrightarrow f) \subset \cap_{k=1}^{\infty} B_k$. Осталось заметить, что, так как последовательность $B_k$ убывает, то

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = 0.\square$$

**Замечание**. Связь рассмотренных выше типов сходимости со сходимостью в среднем порядка $p$ будет изучена в параграфе, посвященном пространствам $L^p$.

**Замечание**. Функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ со значениями в расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}}$ (т. е. принимающая, возможно, и бесконечные значения) называется *измеримой*, если, в дополнение к условию $X(f < c) \in \mathcal{B}$ для любого $c \in \mathbb{R}$, выполняются также условия $X(f = +\infty) \in \mathcal{B}$, $X(f = -\infty) \in \mathcal{B}$.

Значительная часть доказанных выше теорем переносится и на такие функции (проверьте).

Всюду далее, если не оговорено противное, все функции будут считаться измеримыми.

## 3.2 Интеграл Лебега

Мы определим интеграл Лебега в три этапа.

### 3.2.1 Интегрирование неотрицательных простых функций

В этом разделе будут рассматриваться функции, у которых интегралы выражаются конечными суммами.

**Определение 1**. Пусть $\varphi$ — неотрицательная простая функция на $X$ с каноническим представлением

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

*Интеграл Лебега функции* $\varphi$ определяется равенством

$$\int\limits_X \varphi(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \tag{2.1}$$

(как обычно, мы считаем, что $0 \cdot (+\infty) := 0$, $c \cdot (+\infty) := +\infty$, если $c > 0$, $(+\infty) + (+\infty) := +\infty$, так что интеграл может равняться $+\infty$).

Используются также обозначения $\int_X \varphi d\mu$, $\int_X \varphi(x)\mu(dx)$, $\int \varphi d\mu$.

**Упражнение 1**. Докажите, что равенство (2.1) сохраняется и тогда, когда числа $a_i$ в представлении функции $\varphi$ не являются попарно различными (но по-прежнему $X = \sqcup_i A_i$).

Предыдущее определение обобщается следующим образом.

**Определение 2**. Пусть $\varphi$ — неотрицательная простая функция на $X$ с каноническим представлением

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}.$$

*Интеграл Лебега функции* $\varphi$ *по множеству* $E \in \mathcal{B}$ определяется равенством

$$\int\limits_E \varphi d\mu = \int\limits_X \varphi \chi_E d\mu.$$

В теории Лебега интегралы от простых функций играют роль интегральных сумм.

**Теорема 1** (свойства интеграла от неотрицательных простых функций). *Если функции $\varphi$, $\psi$ неотрицательные простые, $c \geq 0$, то*

*1)* $\int\limits_X c\varphi(x)d\mu(x) = c\int\limits_X \varphi(x)d\mu(x)$,

$\int\limits_X(\varphi+\psi)d\mu = \int\limits_X \varphi d\mu + \int\limits_X \psi d\mu$ *(положительная линейность);*

*2)* $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int\limits_X \varphi d\mu \leq \int\limits_X \psi d\mu$ *(монотонность);*

*3) функция множества* $\nu(E) := \int\limits_E \varphi d\mu$ *есть мера на* $\mathcal{B}$ *($\sigma$-аддитивность).*

Доказательство. 1) Первое равенство непосредственно следует из определения.

Пусть функции $\varphi$, $\psi$ имеют канонические представления

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i},\ \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}.$$

Рассматривая множества $C_{ij} := A_i \cap B_j$, получаем, как в доказательстве теоремы о продолжении меры с полуалгебры на порожденную ею алгебру, что $\mu(A_i) = \sum_j \mu(C_{ij})$, $\mu(B_j) = \sum_i \mu(C_{ij})$. Поэтому

$$\int\limits_X \varphi\mu = \sum_i a_i\mu(A_i) = \sum_i\sum_j a_i\mu(C_{ij});$$

$$\int\limits_X \psi\mu = \sum_j b_j\mu(B_j) = \sum_i\sum_j b_j\mu(C_{ij}).$$

Стало быть,

$$\int\limits_X \varphi d\mu + \int\limits_X \psi\mu = \sum_i\sum_j (a_i+b_j)\mu(C_{ij}).$$

С другой стороны, функция $\varphi+\psi$ проста и принимает на множестве $C_{ij}$ значение $a_i+b_j$. Следовательно, (см. упражнение 1)

$$\int\limits_X (\varphi+\psi)\mu = \sum_i\sum_j (a_i+b_j)\mu(C_{ij}).$$

Это доказывает 1).

2) Используя обозначения и формулы из доказательства свойства 1), имеем $\varphi \le \psi \Rightarrow a_i \le b_j$, если $C_{ij} \ne \emptyset$. Поэтому

$$\int\limits_X \varphi d\mu = \sum_i \sum_j a_i \mu(C_{ij}) \le \sum_i \sum_j b_j \mu(C_{ij}) = \int\limits_X \psi \mu.$$

3) Поскольку

$$\varphi \chi_E = \sum_i a_i \chi_{A_i} \chi_E = \sum_i a_i \chi_{A_i \cap E},$$

то функция множества

$$\nu(E) = \int\limits_E \varphi d\mu = \int\limits_X \varphi \chi_E d\mu = \sum_i a_i \mu(A_i \cap E)$$

является мерой как линейная комбинация мер с неотрицательными коэффициентами. □

При определении интеграла от функций общего вида далее отдельно будут рассмотрены случаи неотрицательных и знакопеременных функций (и это не удивительно, так как уже на примере интеграла Римана видно, что интегралы от функций этих классов имеют разный геометрический смысл).

### 3.2.2 Интегрирование неотрицательных измеримых функций

**Определение 3**. Пусть $f$ есть неотрицательная измеримая функция на $X$ (принимающая, возможно, значение $+\infty$), а $\varphi_n^f$ — последовательность простых функций, построенная при доказательстве теоремы об аппроксимации функции $f$ простыми. *Интегральные суммы Лебега* функции $f$ определим следующим образом:

$$S_n(f) = \int\limits_X \varphi_n^f d\mu.$$

**Определение 4**. *Интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции* $f$ на $X$ (принимающей, возможно, значение $+\infty$) определим как предел интегральных сумм:

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} S_n(f)$$

(используются также обозначения $\int_X f(x)d\mu(x)$, $\int_X f(x)\mu(dx)$ и $\int f d\mu$). Ясно, что предел (конечный или бесконечный) всегда существует в силу монотонности последовательности интегралов, выражающих интегральные суммы.

**Замечание.** Это определение согласовано с определением интеграла от неотрицательной простой функции. В самом деле, пусть $f$ есть неотрицательная простая функция с каноническим представлением $f = \sum_{i=1}^N a_i\chi_{A_i}$. По определению $\varphi_n^f|_{A_i} = k(n,i)/n$, где $k(n,i)/n \le a_i < (k(n,i)+1)/n$. Так как $a_i - 1/n < k(n,i)/n \le a_i$, то

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X \varphi_n^f d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^N \frac{k(n,i)}{n}\mu(A_i) = \sum_{i=1}^N a_i\mu(A_i).$$

**Замечание.** В явном виде для случая ограниченной функции интегральные суммы Лебега будут выписаны позже.

Положим также

$$\int\limits_E f d\mu := \int\limits_X f\chi_E d\mu \ (E \in \mathcal{B}).$$

**Определение 5**. Если $\int_E f d\mu < \infty$, то (неотрицательную) функцию $f$ называют *интегрируемой по Лебегу (суммируемой)* на множестве $E$.

Нам понадобятся следующие свойства введенного интеграла.

**Лемма 1**. *Если функции $f$, $g$ неотрицательны, а $E_1, E_2 \in \mathcal{B}$, то*

*1) $f \le g \Rightarrow \int\limits_X f d\mu \le \int\limits_X g d\mu$ (монотонность);*

*2) $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \int\limits_{E_1} f d\mu \le \int\limits_{E_2} f d\mu$.*

Доказательство. 1) Если для некоторого $x \in X$ выполняется неравенство $k/n \le g(x) < (k+1)/n$ $(k = 0, \ldots, 2^n)$, то и $f(x) < (k+1)/n$. Поэтому (см доказательство теоремы об аппроксимации) $s_n^f(x) \le k/n = s_n^g(x)$. Это же неравенство справедливо и при $g(x) \ge (2^n+1)/n$. Поэтому и $\varphi_n^f(x) \le \varphi_n^g(x)$, откуда следует первое свойство в силу монотонности интеграла от простых функций.

2) Это вытекает из 1) и очевидного неравенства $f\chi_{E_1} \le f\chi_{E_2}$.$\square$

Следующая теорема о предельном переходе под знаком интеграла очень полезна. В частности, из нее будет следовать положительная линейность интеграла от неотрицательных функций.

**Теорема 2** (теорема Б. Леви, или теорема о монотонной сходимости). *Если функции $f_n$ неотрицательны, и $f_n(x) \uparrow f(x)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu(x) = \int\limits_X f(x) d\mu(x).$$

Доказательство. Поскольку $f_n(x) \le f(x)$, то из монотонности интеграла следует, что числовая последовательность $\int_X f_n(x) d\mu(x)$ не убывает и не превосходит $\int_X f(x) d\mu(x)$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu(x) \le \int\limits_X f(x) d\mu(x),$$

причем предел (конечный или бесконечный) существует.

Докажем противоположное неравенство. С этой целью для любого положительного $a \in (0,1)$ и любой простой функции $\varphi$, удовлетворяющей неравенствам $0 \le \varphi \le f$, рассмотрим последовательность измеримых множеств $E_n = X(f_n - a\varphi \ge 0)$. Тогда $E_n \uparrow X$. В самом деле, если для некоторого $x \in X$ выполняется неравенство $\varphi(x) > 0$, то $a\varphi(x) < f(x)$, а тогда для некоторого $n$ будет и $a\varphi(x) < f_n(x)$, т. е. $x \in E_n$. Если же $\varphi(x) = 0$, то утверждение $x \in E_n$ очевидно. Монотонность $E_n$ следует из монотонности $f_n$. Теперь, используя отмеченные выше свойства интеграла, имеем

$$\int\limits_X f_n(x) d\mu(x) \ge \int\limits_{E_n} f_n(x) d\mu(x) \ge \int\limits_{E_n} a\varphi(x) d\mu(x) = a \int\limits_{E_n} \varphi(x) d\mu(x).$$

Учитывая непрерывность снизу меры $\nu : E \mapsto \int_E \varphi d\mu$, выводим отсюда, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu(x) \ge \lim_{n\to\infty} a \int\limits_{E_n} \varphi(x) d\mu(x) = a \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) =$$

$$= a\nu(X) = a \int\limits_X \varphi(x) d\mu(x).$$

Полагая в этом неравенстве $\varphi = \varphi_k^f$ и переходя к пределу сначала при $a \to 1$, а затем при $k \to \infty$, получаем нужное неравенство. $\square$

**Упражнение 2**. Докажите, что в теореме Б. Леви условие монотонности нельзя отбросить.

Из теоремы Б. Леви вытекает более удобное определение интеграла от неотрицательной функции.

**Следствие 1**. *Пусть функция $f$ неотрицательна, и $\varphi_n$ — такая последовательность неотрицательных простых функций, что $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$. Тогда*

$$\int\limits_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \varphi_n(x)d\mu(x).$$

**Следствие 2** (о положительной линейности интеграла от неотрицательной функции). *Для любых неотрицательных измеримых на $X$ функций $u_1$, $u_2$ и неотрицательных чисел $c_1$ и $c_2$*

$$\int\limits_X (c_1u_1(x) + c_2u_2(x))d\mu(x) = c_1 \int\limits_X u_1(x)d\mu(x) + c_2 \int\limits_X u_2(x)d\mu(x).$$

Доказательство. Пусть $\varphi_n$, $\psi_n$ — такие последовательности неотрицательных простых функций, что $\varphi_n \uparrow u_1$ и $\psi_n \uparrow u_2$. Тогда $c_1\varphi_n + c_2\psi_n \uparrow c_1u_1 + c_2u_2$, а потому

$$\int\limits_X (c_1u_1 + c_2u_2)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X (c_1\varphi_n + c_2\psi_n)d\mu = c_1 \int\limits_X u_1 d\mu + c_2 \int\limits_X u_2 d\mu.\square$$

Сформулируем теорему Б. Леви на языке рядов.

**Теорема 3** (теорема Б. Леви об интегрировании суммы ряда). *Если функции $u_n$ неотрицательны и измеримы на $X$, то*

$$\int\limits_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X u_n(x)d\mu(x).$$

Доказательство. В силу свойства (положительной) линейности, установленного выше, по индукции имеем для любого $n$

$$\int\limits_X (u_1 + \dots + u_n)d\mu = \int\limits_X u_1 d\mu + \dots + \int\limits_X u_n d\mu.$$

По причине неотрицательности членов ряда последовательность его частичных сумм $f_n = u_1 + \dots + u_n$ состоит из неотрицательных функций и не убывая стремится к его суме $f$. Следовательно, по теореме Б. Леви

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X u_n d\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int\limits_X u_n d\mu = \lim_{N\to\infty} \int\limits_X f_N d\mu = \int\limits_X f d\mu.\square$$

Сформулируем еще одну теорему о предельном переходе под знаком интеграла.

**Теорема 4** (лемма Фату). *Если функции $f_n$ неотрицательны и измеримы на $X$, то*

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \geq \int\limits_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu.$$

Доказательство. Как известно, для нижнего предела справедливо равенство

$$f(x) := \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x),$$

где $g_k(x) = \inf_{n\geq k} f_n(x)$. Так как $g_k(x) \uparrow f(x)$, то по теореме Б. Леви $\int_X g_k d\mu \to \int_X f d\mu$. Но $g_k \leq f_k$, а потому $\int_X g_k d\mu \leq \int_X f_k d\mu$. Следовательно, и

$$\lim_k \int_X g_k d\mu \leq \liminf_k \int_X f_k d\mu. \Box$$

Следующий результат может применяться для доказательства интегрируемости предела функциональной последовательности.

**Следствие 3**. *Если функции $f_n$ неотрицательны и интегрируемы на $X$, причем $f_n \to f$ п. в. и*

$$c = \sup_n \int\limits_X f_n d\mu < \infty,$$

*то функция $f$ интегрируема и $\int_X f d\mu \leq c$.*

**Упражнение 3**. Покажите на примере, что в утверждении леммы Фату может иметь место строгое неравенство.

**Замечания**. 1) В теоремах Б. Леви и лемме Фату условие неотрицательности функций можно заменить на неотрицательность почти всюду. Это легко следует из того, что интегралы от функций, равных почти всюду, совпадают (см. ниже следствие 2 неравенства Чебышева).

2) Часто интеграл Лебега от неотрицательной функции $f$ определяют как супремум интегралов от не превосходящих $f$ неотрицательных простых функций (см., например, [10]), а принятое в данных лекциях определение становится тогда следствием теоремы Б. Леви. Давая наше определение, мы хотели подчеркнуть, что эвристический принцип «интеграл — это предел интегральных сумм» справедлив и для интеграла Лебега.

### 3.2.3 Интегрирование знакопеременных измеримых функций

Напомним, что положительная и отрицательная части функции $f$ определяются равенствами $f^+(x) := \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) := -\min\{f(x), 0\}$. Легко проверить, что $f = f^+ - f^-$ (проверьте).

**Определение 6**. Измеримая функция $f$ на $X$ (принимающая, возможно, значение $+\infty$) называется *интегрируемой по Лебегу (суммируемой)* на $X$, если ее положительная и отрицательная части интегрируемы, т. е. $\int_X f^\pm d\mu < \infty$. В этом случае ее интеграл определяется равенством

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu$$

(используются также обозначения $\int_X f(x) d\mu(x)$, $\int_X f(x)\mu(dx)$ и $\int f d\mu$).

Поскольку каждое измеримое подмножество $E$ пространства $X$ само является пространством с мерой, можно говорить и о функциях, интегрируемых на множестве $E$. При этом, если измеримая функция $f$ на $E$ каким-либо образом продолжена до измеримой функции $f$ на $X$, то

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_X f \chi_E d\mu$$

(почему?).

*Если $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, а $f$ — случайная величина на $\Omega$, то интеграл $Ef := \int_\Omega f dP$ называется ее математическим ожиданием.*

Множество всех интегрируемых по Лебегу на $E$ функций обозначается $\mathcal{L}^1(E, \mu)$ (вместо $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ пишут еще $\mathcal{L}^1(\mu)$).

В случае, когда $E$ есть промежуток числовой прямой с концами $a$ и $b$, интеграл относительно меры Лебега $m$ по множеству $E$ обозначается $\int_a^b f(x)dx$, (или $(L)\int_a^b f(x)dx$, если хотят подчеркнуть, что речь идет именно об интеграле Лебега), а множество всех интегрируемых относительно меры Лебега на $E$ функций обозначается $\mathcal{L}^1(E)$ (например, $\mathcal{L}^1[a, b]$, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$).

**Упражнение 4***. Пусть мера $\mu$ полна, $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$. Докажите, что любая функция $h : N \to \mathbb{R}$ интегрируема на $N$ и $\int_N h d\mu = 0$.

**Упражнение 5***. Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ справедливо тождество (называемое *трансляционной инвариантностью интеграла*)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y)dm(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dm(x) \ (y \in \mathbb{R}).$$

**Теорема 5** (теорема о линейности интеграла). *Множество $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ относительно поточечного сложения функций и умножения их на скаляр является векторным пространством, и интеграл на нем обладает свойством линейности, а именно,*

$$\int\limits_X (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))d\mu(x) = c_1 \int\limits_X f_1(x)d\mu(x) + c_2 \int\limits_X f_2(x)d\mu(x)$$

*для любых $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ и любых чисел $c_1, c_2$.*

Для доказательства нам потребуется следующее свойство интеграла.

**Свойство 1** (свойство абсолютности интеграла Лебега). *Функция $f$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ одновременно со своим модулем.*

Доказательство свойства 1. Если $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, то и $f^\pm \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, а тогда $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ по свойству положительной линейности интеграла от неотрицательных функций.

Обратно, если $|f| \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, то из неравенств $f^\pm \le |f|$ и монотонности интеграла от неотрицательных функций следует, что $f^+,\ f^- \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$.$\square$

**Упражнение 6**. Докажите, что интеграл Римана не обладает свойством абсолютности.

Доказательство теоремы о линейности интеграла проведем в три шага.

1) Поскольку $|c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)| \le |c_1||f_1(x)| + |c_2||f_2(x)|$, то в силу установленных выше свойств интеграла от неотрицательных функций и свойства 1

$$\int\limits_X |c_1 f_1 + c_2 f_2| d\mu \le |c_1| \int\limits_X |f_1| d\mu + |c_2| \int\limits_X |f_2| d\mu < \infty,$$

т. е. $|c_1 f_1 + c_2 f_2| \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, а потому и $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$.

2) Равенство $\int_X cf(x)d\mu(x) = c\int_X f(x)d\mu(x)$ следует из того, что $(cf(x))^\pm = c(f(x))^\pm$ при $c > 0$ и $= (-c)(f(x))^\mp$ при $c < 0$.

3) Если $h = f + g$, где $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, то $h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-$, а тогда в силу линейности интеграла от неотрицательных функций

$$\int\limits_X h^+ d\mu + \int\limits_X f^- d\mu + \int\limits_X g^- d\mu = \int\limits_X f^+ d\mu + \int\limits_X g^+ d\mu + \int\limits_X h^- d\mu,$$

откуда $\int_X h d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.$\Box$

Имеют место также следующие важные свойства интеграла Лебега.

**Свойство 2** (свойство монотонности интеграла). *Пусть функции $f$ и $g$ интегрируемы и $f \le g$. Тогда* $\int\limits_X f d\mu \le \int\limits_X g d\mu$.

Доказательство. Поскольку $h := f - g \ge 0$, то и $\int_X h d\mu \ge 0$. Осталось воспользоваться линейностью интеграла. $\Box$

**Свойство 3**. *Если $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, то $|\int_X f d\mu| \le \int_X |f| d\mu$.*

Доказательство. Имеем с учетом линейности интеграла

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| = \left|\int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu\right| \le \int\limits_X f^+ d\mu + \int\limits_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu.\Box$$

**Свойство 4** (признак сравнения). *Пусть функция $g$ неотрицательна и интегрируема на $X$, а измеримая на $X$ функция $f$ удовлетворяет неравенству $|f| \le g$. Тогда функция $f$ тоже интегрируема на $X$.*

Доказательство. Так как $f^\pm \le g$, то $\int_X f^\pm d\mu \le \int_X g d\mu < \infty$. Поэтому и $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.$\Box$

**Упражнение 7**. Докажите, что аналогичный признак сравнения для интеграла Римана неверен.

**Свойство 5** (достаточное условие интегрируемости). *Если $\mu(X) < \infty$, а функция $f$ измерима и ограничена, $|f(x)| \le M$, то $f$ интегрируема на $X$, и справедлива оценка $|\int_X f d\mu| \le M\mu(X)$.*

Доказательство заключается в последовательном применении свойств 4, 3 и 2. $\Box$

**Свойство 6** (неравенство Чебышева). *Для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ и числа $c > 0$ справедливо неравенство*

$$\mu(X(|f| \ge c)) \le \frac{1}{c} \int\limits_X |f| d\mu.$$

Доказательство. Используя свойства интеграла от неотрицательных функций, имеем

$$\int_X |f|d\mu \geq \int_{X(|f|\geq c)} |f|d\mu \geq \int_{X(|f|\geq c)} cd\mu = c\mu(X(|f| \geq c)).\Box$$

**Следствие 4**. $\int_X |f|d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ п. в.

Доказательство. Необходимость. Заметим, что $X(f \neq 0) = \cup_n X(|f| > 1/n)$. По неравенству Чебышева $\mu(X(|f| > 1/n)) \leq n\int_X |f|d\mu = 0$ при любом натуральном $n$. Поэтому

$$\mu(X(f \neq 0)) \leq \sum_n \mu(X(|f| > 1/n)) = 0.$$

Достаточность. Пусть $f = 0$ п. в., и $N = X(f \neq 0)$. Тогда $X = N \sqcup N'$, и $\mu(N) = 0$. Следовательно, с учетом упражнения 4

$$\int_X |f|d\mu = \int_X (|f|\chi_N + |f|\chi_{N'})d\mu = \int_N |f|d\mu + \int_{N'} |f|d\mu = 0.\Box$$

**Следствие 5** (теорема об эквивалентных функциях). Если $f = g$ $\mu$-п. в., то $\int_X fd\mu = \int_X gd\mu$.

Действительно,

$$\left|\int_X fd\mu - \int_X gd\mu\right| \leq \int_X |f - g|d\mu = 0$$

по следствию 4. $\Box$

**Замечание.** Иногда функции $f$ и $g$, которые равны $\mu$-п. в., называют ($\mu$)-*эквивалентными*, а множества нулевой ($\mu$-)меры — ($\mu$)-*пренебрежимыми*, поскольку в вопросах ($\mu$-)измеримости и интегрирования (по мере $\mu$) этими множествами можно пренебречь (см., например, теорему об эквивалентных функциях, установленную выше).

**Пример 1**. Вычислим $\int_{\mathbb{R}} D(\cos x)dm(x)$, где $D$ — функция Дирихле. По определению функции Дирихле, $D(\cos x) = 1$, если $\cos x \in \mathbb{Q}$, и $= 0$, если $\cos x \notin \mathbb{Q}$. Но множество $\{x : \cos x \in \mathbb{Q}\}$ счетно как объединение счетного числа счетных множеств (проверьте это). Следовательно, $D(\cos x) = 0$ $m$-п. в., а потому в силу следствия 5 $\int_{\mathbb{R}} D(\cos x)dm(x) = 0$.

**Замечание**. Если функция $f$ задана лишь $\mu$-п. в., и мы продолжим ее на все множество $X$, то по следствию 5 интеграл от продолженной функции не будет зависеть от способа продолжения.

**Упражнения 8**. 1) Докажите, что любая функция $f : X \to \mathbb{R}$ интегрируема по мере Дирака $\delta_a$ $(a \in X)$ (см. пример 1 в главе 2) и вычислите $\int_X f d\delta_a$.

2)* Пусть $\mu$ — дискретная мера (см. пример 2 в главе 2). Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ справедливо равенство

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_n f(x_n)p_n.$$

**Упражнения 9**. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — измеримая функция. Докажите, что

1)* если $f > 0$ на множестве $E$ положительной меры, то $\int_E f d\mu > 0$;

2)* если $\int_E f d\mu \geq 0$ для любого измеримого множества $E$, то $f \geq 0$ $\mu$-п. в.

**Упражнение 10***. Пусть мера $\mu$ конечна, а множество $X$ есть объединение трех измеримых множеств $A, B, C$, причем каждая точка из $X$ принадлежит ровно двум из них. Докажите, что

$$\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) = 2\mu(X).$$

**Упражнение 11**. Покажите, что произведение двух интегрируемых функций может не быть интегрируемой функцией, но произведение измеримой и ограниченной функции на интегрируемую функцию интегрируемо. (Другое достаточное условие интегрируемости произведения дает неравенство Гёльдера, см. ниже §7).

Интеграл Лебега комплекснозначной функции $f = u + iv : X \to \mathbb{C}$ определяется по линейности. Таким образом, принимается следующее

**Определение 7.** Если вещественнозначные функции $u, v$ интегрируемы на $X$ по мере $\mu$, то функция $f = u + iv$ называется интегрируемой и

$$\int\limits_X f d\mu := \int\limits_X u d\mu + i \int\limits_X v d\mu.$$

При этом все свойства интеграла от вещественных функций, приведенные выше и выраженные равенствами, а также неравенствами, содержащими лишь модули, сохраняются (проверьте, например, свойство линейности).

Докажем следующее утверждение:

**Теорема 6**. *Модуль интегрируемой комплекснозначной функции $f$ также интегрируем, и справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq \int\limits_X |f| d\mu.$$

Доказательство. Утверждение об интегрируемости модуля сразу следует из неравенства $\sqrt{u^2+v^2} \leq |u|+|v|$. Для доказательства второго утверждения положим $I = \int_X f d\mu$ и рассмотрим полярное разложение $I = |I|e^{i\theta}$ (т. е. запишем число $I$ в показательной форме). Тогда

$$|I| = \int\limits_X e^{-i\theta} f d\mu$$

(мы внесли постоянный множитель под знак интеграла). Так как интеграл, стоящий в правой части, — вещественное число, то, пользуясь свойством монотонности интеграла от вещественных функций, имеем

$$|I| = \int\limits_X \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) d\mu \leq \int\limits_X |e^{-i\theta} f| d\mu = \int\limits_X |f| d\mu,$$

что и требовалось доказать. □

**Следствие 6** (оценка интеграла). *Если модуль комплекснозначной функции удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leq M$ и $\mu(X) < \infty$, то*

$$\left|\int\limits_X f d\mu\right| \leq M\mu(X).$$

В дальнейшем мы примем следующее соглашение. Если функция $f$ определена лишь на измеримом подмножестве $E$ пространства $X$ с мерой $\mu$, то будем считать ее равной нулю на $X \setminus E$. При этом $\int_X f d\mu = \int_E f d\mu$ (если интеграл существует), и большинство результатов, сформулированных ниже для $\int_X f d\mu$, легко переносятся на случай интегралов по подмножествам. Это с очевидностью следует из того, что измеримое подмножество само может рассматриваться как пространство с мерой.

## 3.3 Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла утверждают, если мы положим $I(f) = \int\limits_X f d\mu$, что соотношение $f_n \to f$ при определенных условиях влечет соотношение $I(f_n) \to I(f)$. Таким образом, каждая из них выражает некоторое свойство непрерывности отображения $I$, чем и объясняется их важность в теории интеграла.

Сначала заметим, что теореме Б. Леви можно придать следующую форму.

**Теорема 1** (теорема Б. Леви для интегрируемых функций). *Если $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, причем последовательность $f_n$ сходится к функции $f$ не убывая и*

$$\sup_n \int\limits_X f_n d\mu < \infty,$$

*то $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$* и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) d\mu(x) = \int\limits_X f(x) d\mu(x).$$

Доказательство. Заменяя $f_n$ на $f_n - f_1$, можем считать, что $f_n \geq 0$. Тогда по теореме Б. Леви для неотрицательных функций

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \sup_n \int\limits_X f_n d\mu < \infty.\Box$$

**Упражнение 1.** Сформулируйте и докажите аналог предыдущей теоремы для невозрастающей последовательности.

Следующий результат является одним из важнейших в теории интеграла.

**Теорема 2** (теорема Лебега о мажорированной сходимости). *Пусть функции $f_n$ на $X$ $\mu$-измеримы, причем $|f_n| \leq g$ при всех $n$ для некоторой функции $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.*

*Тогда справедливы неравенства*

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu \geq \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

*В частности, если $f_n \to f$ п. в., то $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ и*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu(x) = \int\limits_X f(x)d\mu(x).$$

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $f_n$ $\mu$-интегрируемы по признаку сравнения, и $g+f_n \geq 0, g-f_n \geq 0$. С учетом второго из этих неравенств по лемме Фату

$$\liminf_{n\to\infty}\int\limits_X (g-f_n)d\mu \geq \int\limits_X \liminf_{n\to\infty}(g-f_n)d\mu,$$

откуда

$$\int\limits_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu \geq \int\limits_X g d\mu - \int\limits_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu,$$

то есть

$$\limsup_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu \leq \int\limits_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Аналогично

$$\liminf_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu \geq \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Если еще $f_n \to f$ п. в., то $|f| \leq g$ п. в. Следовательно, $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, и $\limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n = f$ п. в. Теперь из доказанных неравенств следует последнее утверждение теоремы. $\square$

**Замечание**. Теоремы Лебега и Б. Леви не верны для интеграла Римана, так как предельная функция может быть не интегрируема по Риману, хотя все $f_n$ интегрируемы. Для построения соответствующего примера можно рассмотреть отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега и в качестве $f_n$ взять индикатор множества $\{q_1,\ldots,q_n\}$, где счетное множество $\{q_n : n = 1,2,...\} = \mathbb{Q}\cap[0,1]$. Читателю предлагается закончить это рассуждение.

**Следствие 1**. *Пусть $\mu(X) < \infty$. Если $f_n \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ и $f_n \to f$ равномерно на $X$, то $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ и*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu(x) = \int\limits_X f(x)d\mu(x).$$

Доказательство. Из определения равномерной сходимости следует, что для достаточно больших $n$ при всех $x$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| \leq 1$, откуда $|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f_n(x)| + 1$ и аналогично $|f_n(x)| \leq |f(x)| + 1$ при всех $x$. Первое из этих неравенств показывает, что $f$ интегрируема, а тогда второе позволяет применить теорему Лебега. □

**Замечание**. Следствие 1 поучительно сравнить с упражнениями 38 и 39, расположенными в конце главы.

**Замечание**. Если неотрицательная функция $f$ ограничена, а $\mu(X) < \infty$, то члены последовательности простых функций $s_n^f$, построенной при доказательстве теоремы об аппроксимации, при достаточно больших $n$ имеют каноническое представление

$$s_n^f = \sum_{k=0}^{2^n} \frac{k}{n} \chi_{X(k/n \leq f < (k+1)/n)},$$

причем эта последовательность равномерно сходится к $f$. По следствию 1

$$\int\limits_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{k}{n} \mu\left(X\left(\frac{k}{n} \leq f < \frac{k+1}{n}\right)\right).$$

Правую часть этого равенства можно трактовать как предел интегральных сумм (Лебега) функции $f$.

**Следствие 2** ( теорема о $\sigma$-аддитивности интеграла Лебега). *Если* $E_n \in \mathcal{B}$, $E = \sqcup_{n=1}^{\infty} E_n$*, то для любой функции* $f \in \mathcal{L}^1(E,\mu)$

$$\int\limits_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} f d\mu.$$

Доказательство. Так как $\sum_n f\chi_{E_n} = f\chi_E$, то последовательность частичных сумм этого ряда $S_N = \sum_{n=1}^N f\chi_{E_n}$ сходится к $f\chi_E$ поточечно на $X$. Кроме того, $|S_N| \leq |f| \sum_{n=1}^N \chi_{E_n} \leq |f|$. Теперь по теореме Лебега

$$\lim_N \int\limits_E S_N(x) d\mu(x) = \int\limits_E f(x) d\mu(x),$$

откуда и следует утверждение теоремы.□

**Теорема 3** (теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега). *Пусть* $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$*. Для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$*, что для любого измеримого множества* $E$ *с* $\mu(E) < \delta$ *выполняется неравенство* $\left|\int_E f d\mu\right| < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим конечную меру $\nu(E) := \int_E |f| d\mu$. Если мы положим $X_n = X(|f| \leq n)$, то $X_n \uparrow X$, а потому $\nu(X_n) \to \nu(X)$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N$, что $\nu(X'_N) = \nu(X) - \nu(X_N) < \varepsilon/2$. Пусть $\delta = \varepsilon/2N$. Если $\mu(E) < \delta$, то

$$\int\limits_{E\cap X_N} |f| d\mu \leq N\mu(E\cap X_N) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$\left|\int\limits_E f d\mu\right| \leq \int\limits_{E\cap X_N} |f| d\mu + \int\limits_{E\cap X'_N} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \nu(X'_n) < \varepsilon.\square$$

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится

**Лемма 1** (лемма о почти всюду конечности интегрируемой функции). *Если $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$, то $\mu(\{x : g(x) = \infty\}) = 0$.*

Доказательство. Пусть $E = \{x : g(x) \neq \infty\}$. Тогда $|g(x)| \geq N\chi_{E'}(x)$ для любого $N$, а потому $\int_X |g| d\mu \geq N\mu(E')$. Отсюда следует, что $\mu(E') = 0.\square$

**Теорема 4** (теорема Лебега об интегрировании суммы ряда). *Если $u_n \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |u_n| d\mu < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится п. в. к интегрируемой функции $S$ и*

$$\int\limits_X S d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X u_n d\mu.$$

Доказательство. Пусть $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ (возможно, $g(x) = +\infty$ при некоторых $x$). По теореме Б. Леви об интегрировании суммы ряда

$$\int\limits_X g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_X |u_n| d\mu < \infty.$$

Следовательно, $g \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится на множестве $E = \{x : g(x) \neq \infty\}$. Но $\mu(E') = 0$ по лемме о почти всюду конечности интегрируемой функции, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится п. в. к некоторой функции $S$, причем $|S| \leq g$, а потому $S \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$. Наконец, частичные суммы $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$ удовлетворяет неравенствам $|S_N| \leq g$, и утверждение теоремы следует из теоремы Лебега, примененной к последовательности $S_n$. $\square$

*Отметим одно применение теоремы Лебега к исследованию интегралов, зависящих от параметра.

**Теорема 5** (теорема о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра). *Пусть $(X,\mu)$ — пространство с мерой, $U$ — область в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $f(t,x)$ — функция на $U\times X$, суммируемая при каждом фиксированном $t\in U$ и дифференцируемая при каждом фиксированном $x\in X$. Если для некоторой функции $g\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$ при всех $t\in U, x\in X$ выполняется неравенство $|\partial f(t,x)/\partial t|\le g(x)$, то функция $F(t)=\int_X f(t,x)d\mu(x)$ дифференцируема на $U$ и*

$$F'(t)=\int\limits_X \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}d\mu(x).$$

Доказательство будем проводить для вещественнозначной функции $f$ и интервала $U$ (комплексный случай рассматривается аналогично). По теореме Лагранжа при всех $t,t_0\in U$ имеем

$$\left|\frac{f(t,x)-f(t_0,x)}{t-t_0}\right|\le\sup_{\xi\in U}\left|\frac{\partial f(\xi,x)}{\partial t}\right|\le g(x).$$

Следовательно, для любой последовательности $U\ni t_n\to t_0$ по теореме Лебега существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(t_n)-F(t_0)}{t_n-t_0}=\lim_{n\to\infty}\int\limits_X\frac{f(t_n,x)-f(t_0,x)}{t_n-t_0}d\mu(x)$$

$$=\int\limits_X\lim_{n\to\infty}\frac{f(t_n,x)-f(t_0,x)}{t_n-t_0}d\mu(x).\Box*$$

**Пример 1.** Вычислим интеграл

$$F(t)=\int_0^\pi\log(1+t\cos x)dx\ (|t|<1).$$

Проверим выполнение условий предыдущей теоремы для функции $f(t,x)=\log(1+t\cos x)$ и интервала $U=(-k,k),\ 0<k<1$. Имеем

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}=\frac{\cos x}{1+t\cos x},$$

причем при $t \in U$

$$\left|\frac{\cos x}{1 + t\cos x}\right| \le \frac{1}{1-k}.$$

Следовательно, теорема 5 применима, а потому

$$F'(t) = \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + t\cos x}dx.$$

Вычисляя последний интеграл с помощью универсальной подстановки $y = \mathrm{tg}(x/2)$, получим $F'(t) = \pi t^{-1}(1 - (1-t^2)^{-1/2})$ $(t \neq 0)$. А так как $F(0) = 0$, то

$$F(t) = \int_0^t \frac{\pi}{x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \pi\int_0^t \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}dx =$$

$$= \pi\int_0^t \frac{-x^2}{x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}dx = -\pi\int_0^t \frac{xdx}{1-x^2+\sqrt{1-x^2}}.$$

Сделав в последнем интеграле подстановку $x = \sin y$, получаем окончательно

$$F(t) = \pi\log\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{2}.$$

**Упражнения 2**. 1) Представьте сумму абсолютно сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^\infty a_n$ в виде $\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(x)dm(x)$, где $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

2) Пусть функция $f$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$, и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Найдите

а)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx$,

б)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\sin nx dx$.

3)* Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности интеграла Лебега, зависящего от параметра.

4)* Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\infty(1+x/n)^{-n}\sin(x/n)dx$.

## 3.4 Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

Интегралы Лебега и Римана согласованы в следующем смысле.

**Теорема 1** (о сравнении интеграла Лебега с собственным интегралом Римана). *Если функция* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *интегрируема по Риману, то* $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$ *и* $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dm(x)$.

Доказательство. Для каждого разбиения $P = \{x_k\}$ отрезка $[a,b]$ рассмотрим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу (обозначения стандартные)

$$\overline{S}(P) = \sum_k M_k \Delta x_k, \ \underline{S}(P) = \sum_k m_k \Delta x_k.$$

Они являются интегралами Лебега (и Римана) от простых функций

$$\overline{f}(P) = \sum_k M_k \chi_{[x_{k-1}x_k]}, \ \underline{f}(P) = \sum_k m_k \chi_{[x_{k-1}x_k]}.$$

Выберем теперь последовательность $P_n$ разбиений отрезка $[a,b]$ так, что мелкость $\lambda(P_n) \to 0$, и $P_{n+1}$ есть измельчение $P_n$. Вместо $\overline{S}(P_n)$, $\underline{S}(P_n)$, $\overline{f}(P_n)$, $\underline{f}(P_n)$ будем писать $\overline{S}_n, \underline{S}_n$, $\overline{f}_n$, $\underline{f}_n$ соответственно.

Так как $P_{n+1}$ есть измельчение $P_n$, то

$$\underline{f}_n \le \underline{f}_{n+1} \le f \le \overline{f}_{n+1} \le \overline{f}_n.$$

Следовательно, существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n =: \overline{f} \ge f, \ \lim_{n\to\infty} \underline{f}_n =: \underline{f} \le f.$$

Поскольку последовательности $(\overline{f}_n), (\underline{f}_n)$ ограничены (в силу ограниченности $f$), то по теореме Лебега

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \overline{f}_n dm = \int_{[a,b]} \overline{f} dm, \ \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \underline{f}_n dm = \int_{[a,b]} \underline{f} dm.$$

Будучи пределами сумм Дарбу, левые (а потому и правые) части этих равенств совпадают с интегралом Римана $\int_a^b f(x)dx$. Стало быть, $\int_{[a,b]}(\overline{f} - \underline{f})dm = 0$, откуда по следствию из неравенства Чебышева $\overline{f} = \underline{f}$ п. в. Но тогда эти функции совпадают и с $f$ п. в. Следовательно, $f$ интегрируема по Лебегу, и $\int_{[a,b]} f dm = \int_{[a,b]} \overline{f} dm = \int_a^b f(x)dx.\Box$

Доказанная теорема показывают, что интеграл Римана поглощается интегралом Лебега. Поэтому вместо $\int_{[a,b]} f(x)dm(x)$, как правило, пишут $\int_a^b f(x)dx$.

**Теорема 2** (критерий Лебега интегрируемости по Риману). *Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена, и мера множества ее точек разрыва равна нулю.*

Доказательство. Воспользуемся обозначениями из доказательства предыдущей теоремы, а также установленными в процессе этого доказательства фактами. Критерий Коши непрерывности функции показывает, что функция $f$ непрерывна в точке $x$, не совпадающей с элементами разбиений $P_n$, тогда и только тогда, когда $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$. Следовательно, если $f$ интегрируема по Риману на $[a,b]$, то (она ограничена и) множество ее точек разрыва имеет лебегову меру нуль.

Обратно, если $f$ ограничена и мера множества ее точек разрыва равна нулю, то $\overline{f}(x) = \underline{f}(x)$ п. в. Тогда, как показано в доказательстве предыдущей теоремы,

$$\lim_n \overline{S}_n = \int_{[a,b]} \overline{f} dm = \int_{[a,b]} \underline{f} dm = \lim_n \underline{S}_n,$$

а потому $f$ интегрируема по Риману на $[a,b]$ по критерию Дарбу. □

**Теорема 3** (теорема о сравнении интеграла Лебега с несобственным интегралом Римана). *Пусть $I$ — (конечный или бесконечный) промежуток числовой прямой. Если несобственный интеграл Римана $\int_I f(x)dx$ сходится абсолютно, то $f \in \mathcal{L}^1(I)$ и $\int_I f(x)dx = \int_I f(x)dm(x)$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $I = [a, \infty)$. Последовательность $g_n := |f|\chi_{[0,n]} \uparrow |f|$, а потому по теореме Б. Леви

$$\int_I |f| dm = \lim_n \int_I g_n dm = \lim_n \int_0^n |f| dm = \int_0^\infty |f(x)| dx < \infty.$$

Следовательно, $f \in \mathcal{L}^1(I)$ и, применяя теорему Лебега к последовательности $h_n := f\chi_{[0,n]}$, которая мажорированно сходится к $f$, получаем

$$\int_I f dm = \lim_n \int_I h_n dm = \lim_n \int_0^n f(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx.$$

Для конечного промежутка доказательство проводится аналогично. □

**Замечание**. Теорема, аналогичная предыдущей, для условно сходящегося несобственного интеграла неверна. Например, интеграл $\int_0^\infty f(x)dx$, в котором $f = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}\chi_{[n,n+1)}$, существует как условно сходящийся несобственный интеграл Римана, но $\int_{\mathbb{R}_+} f(x)dx$ не существует в смысле Лебега (воспользуйтесь свойством абсолютности). Таким образом, интеграл Лебега на прямой не поглощает условно сходящийся несобственный интеграл Римана.

*В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли так определить интеграл, чтобы он включал в себя в качестве частных случаев как интеграл Лебега, так и условно сходящийся несобственный интеграл Римана. Такой интеграл удалось построить в середине XX века Р. Хенстоку и Я. Курцвейлю. Любопытно, что его конструкция в случае прямой лишь немногим сложнее конструкции интеграла Римана. Приведем ее.

Любую функцию $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$ будем называть *калибровочной*. Разбиение $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ назовем $\delta$-согласованным, если $[x_{k-1}, x_k] \subset [\xi_k - \delta(\xi_k), \xi_k + \delta(\xi_k)]$.

**Определение 1.** Число $A$ называется *$HK$-интегралом* (или *интегралом Хенстока-Курцвейля*) функции $f$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается $(\mathcal{HK}) \int_a^b f$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая калибровочная функция $\delta_\varepsilon$, что для любого $\delta_\varepsilon$-согласованного разбиения $P$ отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_k$ соответствующие римановы интегральные суммы $\sigma(f, P, \xi)$ удовлетворяют неравенству $|\sigma(f, P, \xi) - A| < \varepsilon$.

Для интеграла Хенстока-Курцвейля справедлив следующий вариант формулы Ньютона-Лейбница:

**Теорема 4.** *Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех его точках за исключением не более чем счетного множества $C$. Тогда ее производная (которую мы считаем равной нулю на $C$) $HK$-интегрируема на $[a, b]$ и*

$$(\mathcal{HK}) \int_a^b f' = f(b) - f(a).$$

**Пример 1.** Производная функции $f(x) = x^2 \sin(x^{-2})$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$ не интегрируема по Лебегу на $[0, 1]$ (см. дополнительное упражнение 40 к главе 3), но она $HK$-интегрируема на $[0, 1]$ в силу предыдущей теоремы.

**Упражнения 1**. Докажите, что

1)* если у функции существует интеграл Римана, то у нее существует и интеграл Хенстока-Курцвейля и они совпадают;

2)* функция Дирихле $HK$-интегрируема на $[0, 1]$.

Следует отметить, что теория интеграла Хенстока-Курцвейля для функций на абстрактных множествах пока очень сложна, так что $HK$-интеграл ни в коей мере не отменяет интеграл Лебега.*

## 3.5 Интеграл Стилтьеса

**Определение 1**. Пусть функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ не убывает и непрерывна слева, $m_F$ — мера Лебега-Стилтьеса с функцией распределения $F$. Тогда интеграл $\int_A f dm_F$, ($A \subset [a, b]$ — борелевское множество) называется *интегралом Лебега-Стилтьеса* и обозначается

$$\int\limits_A f dF$$

(в этом контексте функцию $F$ иногда называют *интегрирующей*).

Это понятие обобщается на случай не обязательно монотонных интегрирующих функций ограниченной вариации.

**Определение 2**. Пусть функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Для разбиения $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ отрезка $[a, b]$ положим

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})|.$$

Функцию $F$ будем называть *функцией ограниченной вариации* (или *функцией с ограниченным полным изменением*) на $[a, b]$, если числа $S(P)$ ограничены в совокупности. В этом случае число

$$V_a^b(F) = \sup_P S(P),$$

где супремум распространяется на всевозможные разбиения $P$ отрезка $[a, b]$, называют *вариацией* (или *полным изменением*) функции $F$ на $[a, b]$.

Класс таких функций обозначим $BV[a, b]$.

**Упражнения 1**. Докажите, что

1) $V_a^b(f + g) \le V_a^b(f) + V_a^b(g)$;

2) $BV[a, b]$ есть векторное пространство (относительно обычных операций над функциями);

3)* $V_a^b(f) = V_a^d(f) + V_d^b(f)$ $(a < d < b)$ (*аддитивность вариации*).

Класс функций ограниченной вариации описывает следующая

**Теорема 1** (теорема Жордана). *Функция $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ будет функцией с ограниченным полным изменением тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух неубывающих на отрезке $[a, b]$ функций.*

Таким образом, по теореме Жордана класс $BV[a,b]$ совпадает с классом функций, имеющих разложение $F = F_1 - F_2$, где функции $F_i$ определены на $[a,b]$ и не убывают (*разложение Жордана функции* $F$).

Доказательство. Достаточность сразу следует из утверждения 2) упражнения 1 и того очевидного факта, что каждая монотонная функция на $[a,b]$ имеет ограниченную вариацию.

Необходимость. Положим

$$F_1(x) := V_a^x(F) \ (a < x \le b), \ F_1(a) := 0.$$

Функция $F_1$ не убывает в силу свойства аддитивности вариации (см. упражнение 1). Рассмотрим функцию

$$F_2(x) := F_1(x) - F(x).$$

Теорема будет доказана, если показать, что функция $F_2$ тоже не убывает. Но если $a \le x < y \le b$, то, снова применяя свойство аддитивности вариации, имеем

$$F_2(y) := F_1(y) - F(y) = F_1(x) + V_x^y(F) - F(y).$$

Следовательно,

$$F_2(y) - F_2(x) = V_x^y(F) - (F(y) - F(x)) \ge 0,$$

поскольку рассмотрение тривиального разбиения $\{x, y\}$ отрезка $[x,y]$ дает

$$V_x^y(F) \ge F(y) - F(x). \ \Box$$

**Упражнение 2***. Проверьте, что функция $f(x) = \sin(1/x)$, $f(0) = 0$ не принадлежит $BV[0,1]$, но *на интервале* $(0,1)$ может быть представлена в виде разности двух возрастающих функций.

Понятие интеграла Лебега-Стилтьеса обобщается на случай интегрирующей функции ограниченной вариации.

**Определение 3**. Если интегрирующая функция является функцией ограниченной вариации с разложением Жордана $F = F_1 - F_2$, где функции $F_i$ не убывают и непрерывны слева на $[a,b]$, то по определению полагают

$$\int_A f dF = \int_A f dF_1 - \int_A f dF_2$$

при условии, что интегралы в правой части имеют смысл (проверьте корректность этого определения).

В случае $A = [a, b)$ вместо $\int_{[a,b)} fdF$ иногда пишут $\int_a^{b-} fdF$. Заметим, что этот интеграл совпадает с $\int_{[a,b]} fdF$, только если $f(b)m_F(\{b\}) = 0$, так как

$$\int_{[a,b]} fdF = \int_{[a,b)} fdF + f(b)m_F(\{b\})$$

(докажите последнее равенство).

Обозначим через $K[a, b]$ класс функций $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, представимых в виде $F = F_1 - F_2$, где функции $F_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ не убывают, непрерывны слева и имеют на отрезке $[a, b]$ конечное (или пустое) множество точек разрыва, а вне этого множества ограниченную производную.

Далее нам понадобится следующая

**Лемма 1.** *Пусть $F$ есть неубывающая непрерывная слева функция на $[a, b)$ с ограниченной производной $F'$, существующей всюду на $[a, b)$, за исключением разве что конечного множества точек. Тогда для любого борелевского множества $A \subset [a, b)$ имеем*

$$m_F(A) = \int\limits_A F' dm.$$

Доказательство. В самом деле, меры, стоящие в правой и левой частях этого равенства, совпадают на стрелках в силу формулы Ньютона-Лейбница. Следовательно, они совпадают и на всех борелевских подмножествах $A \subset [a, b)$ по теореме о единственности продолжения меры.□

**Теорема 2** (теорема о вычислении интеграла Лебега-Стилтьеса). *Пусть функция $F \in K[a, b]$ имеет на промежутке $[a, b)$ конечное (или пустое) множество точек разрыва $\{x_k\}$, $h_k$ — величина скачка функции $F$ в точке $x_k$. Тогда для любой $m_F$-интегрируемой борелевской функции $f$ на $[a, b)$*

$$\int\limits_{[a,b)} fdF = \int\limits_{[a,b)} f(x)F'(x)dx + \sum_k f(x_k)h_k. \tag{5.1}$$

Доказательство. Пусть $H(x) = \sum_{k, x_k < x} h_k$ — функция скачков. Тогда мера $m_H$ — дискретная (см. главу 2), а потому

$$\int\limits_{[a,b)} fdH = \sum_k f(x_k)h_k.$$

Предположим, что $F$ не убывает, и пусть $G = F - H$. Тогда $G$ есть неубывающая непрерывная функция на $[a, b)$ с ограниченной производной $G' = F'$, существующей всюду на $[a, b)$, за исключением разве что конечного множества точек. Для любого борелевского множества $A \subset [a, b)$ имеем (см. лемму 1)

$$m_G(A) = \int\limits_A F' dm.$$

Отсюда по линейности следует, что для любой неотрицательной простой борелевской функции $\varphi$

$$\int\limits_{[a,b)} \varphi dG = \int\limits_{[a,b)} \varphi(x) F'(x) dx.$$

Если функция $f$ неотрицательна, то, аппроксимируя ее простыми, получаем для $f$ аналогичное равенство в силу теоремы Б. Леви. Поскольку $F = G + H$, равенство (5.1) доказано для неотрицательных $f$. Доказательство для знакопеременных $f$ получается переходом к положительной и отрицательной части. Наконец, представление $F = F_1 - F_2$ сводит случай $F \in K[a, b]$ к уже рассмотренному. $\square$

Наряду с интегралом Лебега-Стилтьеса бывает полезен и интеграл Римана-Стилтьеса, который определяется аналогично интегралу Римана.

**Определение 4**. Пусть функции $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Для разбиения $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ промежутка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$ определим интегральные суммы Римана-Стилтьеса следующим образом:

$$\sigma(f, P, F) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(F(x_k) - F(x_{k-1})). \tag{5.1}$$

Положим $\lambda(P) = \max_k(x_k - x_{k-1})$. Если предел $\lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f, P, F)$ существует (и не зависит от выбора отмеченных точек $\xi_k$), то он называется *интегралом Римана-Стилтьеса функции $f$ с интегрирующей функцией $F$ по $[a, b]$* и обозначается $\int_a^b f dF$.

**Теорема 3** (теорема о связи интегралов Лебега-Стилтьеса и Римана-Стилтьеса). *Если функция $f$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $F \in BV[a, b]$ непрерывна слева, то интеграл Римана-Стилтьеса функции $f$ существует и совпадает с соответствующим интегралом Лебега-Стилтьеса.*

Доказательство. Для каждого разбиения $P$, описанного выше, рассмотрим простую функцию, определяемую равенствами $f_P(x) := f(\xi_k)$ при $x \in [x_{k-1}, x_k)$.

Тогда для интеграла Лебега-Стилтьеса имеем $\int_a^b f_{P_n} dF = \sigma(f, P_n, F)$. Если последовательность $P_n$ разбиений такова, что $\lambda(P_n) \to 0$, то последовательность $f_{P_n}$ равномерно сходится к функции $f$ по причине равномерной непрерывности последней. Но тогда по следствию теоремы Лебега последовательность интегралов $\int_a^b f_{P_n} dF$ сходится к интегралу Лебега-Стилтьеса $\int_a^b f dF$. А с другой стороны, ее предел по определению есть интеграл Римана-Стилтьеса функции $f$ с интегрирующей функцией $F$. $\square$

**Упражнение 3.*** Пусть $F(x) = x^2$. Приведите пример функции, для которой существует интеграл Лебега-Стилтьеса на $[0, 1]$ относительно $F$, но не существует интеграл Римана-Стилтьеса на $[0, 1]$ относительно $F$.

Отметим одно полезное свойство интеграла Римана-Стилтьеса.

**Теорема 4** (теорема об интегрировании по частям в интеграле Римана-Стилтьеса). *Пусть функции $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Если один из интегралов*

$$\int_a^b f dg \text{ и } \int_a^b g df$$

*существует, то существует и другой; при этом*

$$\int_a^b f dg = fg|_a^b - \int_a^b g df.$$

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из следующего тождества (и аналогичного тождества, которое получится, если поменять местами $f$ и $g$):

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(g(x_k) - g(x_{k-1})) =$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{k=0}^{n} g(x_k)(f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)),$$

где положено дополнительно $\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$. Чтобы это увидеть, достаточно заметить, что $\xi_0 = a \le \xi_1 \le \cdots \le \xi_{n+1} = b$ также представляет собой разбиение отрезка $[a, b]$, причем $\xi_i \le x_i \le \xi_{i+1}$, и $\max_i |\xi_{i+1} - \xi_i| \le 2 \max_i |x_{i+1} - x_i|$.$\square$

## 3.6 Замена переменной в интеграле Лебега

Понятие измеримой функции может быть обобщено следующим образом.

**Определение 1**. Пусть $X$ и $Y$ есть множества, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ — $\sigma$-алгебры их подмножеств соответственно. Отображение $g : X \to Y$ называется *измеримым*, если $g^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ для любого $A \in \mathcal{C}$.

С помощью измеримого отображения можно «пересадить» меру с $X$ на $Y$.

**Определение 2**. Пусть к тому же $(X, \mathcal{B}, \mu)$ есть пространство с $\sigma$-конечной мерой. Для измеримого отображения $g : X \to Y$ определим меру $\mu g^{-1}$ на $\mathcal{C}$ равенством $(\mu g^{-1})(A) = \mu(g^{-1}(A)),\ A \in \mathcal{C}$. Эта мера называется *образом меры* $\mu$ *при отображении* $g$ (и обозначается иногда $g(\mu)$).

**Упражнение 1**. Докажите, что $\mu g^{-1}$ действительно является мерой.

Следующая теорема бывает полезна при преобразовании интегралов (в частности, в теории вероятностей).

**Теорема 1** (теорема о замене переменной в интеграле). *Пусть* $(X, \mathcal{B})$ *и* $(Y, \mathcal{C})$ *есть множества с фиксированными* $\sigma$*-алгебрами своих подмножеств,* $g : X \to Y$ *— измеримое отображение. Пусть* $\sigma$*-конечная мера* $\mu$ *на* $\mathcal{B}$ *такова, что ее образ* $\nu = \mu g^{-1}$ *также* $\sigma$*-конечен. Тогда для любой неотрицательной борелевской функции* $f$ *на* $Y$

$$\int\limits_X f(g(x))d\mu(x) = \int\limits_Y f(y)d\nu(y). \tag{6.1}$$

Доказательство проводится в три шага. 1) $f = \chi_A,\ A \in \mathcal{C}$. Этот случай оставляем читателю в качестве упражнения.

2) Функция $f$ — (неотрицательная) простая. В силу линейности интеграла этот случай сразу следует из предыдущего.

3) Если теперь $f$ — произвольная неотрицательная борелевская функция на $Y$, то выберем последовательность $\varphi_n$ неотрицательных простых функций на $Y$, не убывая сходящуюся к $f$. Тогда последовательность композиций $\varphi_n \circ g$ не убывая сходится к $f \circ g$, и доказательство завершается применением теоремы Б. Леви. □

**Замечание**. Доказанное равенство остается справедливым и без предположения о неотрицательности функции $f$, если дополнить его утверждением, что из существования интеграла в одной его части вытекает существование интеграла в другой.

Одним из следствий предыдущей теоремы является формула замены переменных в интеграле по $n$-мерной мере Лебега. Приведем этот результат в случае $n = 1$.

**Следствие 1** (о замене переменной в интеграле по мере Лебега). *Пусть функция $g$ отображает интервал $I_2$ на интервал $I_1$ и обладает ограниченной производной $g'(x) > 0$. Тогда для любой неотрицательной борелевской функции $f$ на интервале $I_1$*

$$\int\limits_{I_1} f(y)dy = \int\limits_{I_2} f(g(x))g'(x)dx. \tag{6.2}$$

Доказательство. Применяя предыдущую теорему к парам $(I_1, \mathcal{B}_{I_1})$, $(I_2, \mathcal{B}_{I_2})$ и $\sigma$-конечной мере $\mu = m_g$, получаем

$$\int\limits_{I_2} f(g(x))dg(x) = \int\limits_{I_1} f(y)d\nu(y). \tag{6.3}$$

Но $\nu = m_g g^{-1} = m$. В самом деле, для любой стрелки $[a, b) \subset I_1$ справедливо равенство $m_g(g^{-1}([a, b))) = g(g^{-1}(b)) - g(g^{-1}(a)) = m([a, b))$, а потому меры $\nu$ и $m$ совпадают на элементах $\sigma$-алгебры $\mathcal{B}_{I_1}$ (см. теорему о единственности продолжения меры). Стало быть, правая часть (6.3) совпадает с левой частью (6.2). Для завершения доказательства осталось применить к левой части (6.3) теорему о вычислении интеграла Лебега-Стилтьеса. □

*Общая форма теоремы о замене переменной в интеграле Лебега приведена в [1], §12.*

## 3.7 Пространства $L^p$

В этом параграфе будут введены классы функций, весьма полезные в математическом анализе (см., например, доказательство теоремы Радона-Никодима в §8) и его приложениях.

**Определение 1**. Пусть $p \in [1, \infty)$. Говорят, что функция $f$ на $X$ принадлежит $\mathcal{L}^p(X, \mu)$, если она измерима и $f^p \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$. При этом полагают

$$\|f\|_p = \left( \int\limits_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

(левая часть читается «норма $f$ в пространстве $\mathcal{L}^p$»).

Вместо $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ пишут также $\mathcal{L}^p(\mu)$ (или $\mathcal{L}^p(X)$, если ясно, о какой мере идет речь), а норму элемента $f$ пространства $\mathcal{L}^p$ обозначают еще $\|f\|_{L^p(\mu)}$.

Важную роль в теории пространств $L^p$ играют неравенства Гёльдера и Минковского, которые мы сейчас установим. Для этого нам необходима

**Лемма 1** (неравенство Юнга). *Если $a,b \geq 0$ и $0<\alpha<1$, то*

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b,$$

*причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$.*

Доказательство. При $b=0$ неравенство Юнга очевидно. В противном случае, полагая $t=a/b$, сводим его к неравенству $t^\alpha - \alpha t \leq 1-\alpha$. Но с помощью производной легко проверить, что функция $t^\alpha - \alpha t$ строго возрастает при $0<t<1$ и строго убывает при $t>1$, достигая максимума $1-\alpha$ при $t=1$.□

Как уже отмечалось, произведение интегрируемых функций не всегда интегрируемо. Однако имеет место

**Теорема 1** (неравенство Гёльдера). *Пусть $p\in(1,\infty)$, $1/p+1/q=1$. Если $f\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$ и $g\in\mathcal{L}^q(X,\mu)$, то произведение $fg\in\mathcal{L}^1(X,\mu)$ и справедливо неравенство*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q,$$

*причем равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $c_1|f|^p = c_2|g|^q$ п. в. для постоянных $c_1,c_2$, не равных нулю.*

Доказательство. Интерес представляет случай $\|f\|_p\|g\|_q \neq 0$ (почему?). Полагая в этом случае в неравенстве Юнга

$$a=\left|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\right|^p,\ b=\left|\frac{g(x)}{\|g\|_q}\right|^q,\ \alpha=1/p,$$

получаем неравенство

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\int_X |f|^p d\mu} + \frac{|g(x)|^q}{q\int_X |g|^q d\mu},$$

после почленного интегрирования которого имеем

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

При этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a=b$, т. е. $\|g\|_q^q|f|^p = \|f\|_p^p|g|^q$.□

**Замечания**. 1). В теории пространств $L^p$ неотрицательные числа $p, q$, удовлетворяющие равенству $1/p + 1/q = 1$, носят название *сопряженных показателей*.

2) При $p = 2$ неравенство Гёльдера называется *неравенством Коши-Буняковского* (или неравенством Шварца).

**Упражнение 1.*** Докажите, что $\mathcal{L}^p(X, \mu) \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$, если $1 \le p$ и мера $\mu$ конечна.

**Упражнение 2.** Докажите, что ни одно из пространств $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ и $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ не содержится в другом.

**Теорема 2** (неравенство Минковского). *Пусть $p \in [1, \infty)$ и $f, g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$. Тогда*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $f + g \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, поскольку

$$|f + g|^p \le (2 \max(|f|, |g|))^p \le 2^p(|f|^p + |g|^p).$$

Неравенство Минковского очевидно, если $p = 1$ или $f + g = 0$ п. в. В противном случае запишем очевидное неравенство

$$|f + g|^p \le |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1},$$

проинтегрируем его почленно и, применив к каждому слагаемому в правой части неравенство Гёльдера, получим ($(p - 1)q = p$)

$$\int\limits_X |f + g|^p d\mu \le \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q =$$

$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left( \int\limits_X |f + g|^p d\mu \right)^{1/q}.$$

Другими словами,

$$\|f + g\|_p^p \le (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f + g\|_p^{p/q},$$

откуда сразу следует доказываемое неравенство.$\square$

**Замечание**. Одновременно мы показали, что $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ является векторным пространством.

**Упражнение 3.** Если $X=\mathbb{N}$, а $\mu$ — считающая мера, пространство $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ обозначается $l_p$. Запишите неравенства Гёльдера и Минковского для этого случая.

Смысл неравенства Минковского в том, что функция

$$\rho(f,g)=\|f-g\|_p \ (f,g\in\mathcal{L}^p(X,\mu))$$

удовлетворяет *неравенству треугольника*

$$\rho(f,g)\le\rho(f,h)+\rho(h,g)$$

при $f,g,h\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$. Очевидно также, что $\rho(f,g)=\rho(g,f)$ и $\rho(f,f)=0$. Однако она не является метрикой, так как из равенства $\rho(f,g)=0$ следует лишь, что $f=g$ п. в. Чтобы исправить ситуацию, введем подпространство

$$\mathcal{N}(X,\mu)=\{f:f=0\ \mu\text{ -п. в. }\}$$

пространства $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ и рассмотрим факторпространство

$$L^p(X,\mu):=\mathcal{L}^p(X,\mu)/\mathcal{N}(X,\mu).$$

Другими словами, мы перестаем различать $\mu$-эквивалентные функции из $\mathcal{L}^p(X,\mu)$. Элементами $L^p(X,\mu)$ являются классы эквивалентности $\tilde f=\{g\in\mathcal{L}^p(X,\mu):g\sim f\}$ элементов $f\in\mathcal{L}^p(X,\mu)$. Если теперь мы положим $\|\tilde f\|_p:=\|f\|_p$, $\rho_p(\tilde f,\tilde g)=\|\tilde f-\tilde g\|_p$, то получим метрику на $L^p(X,\mu)$ (более того, это метрическое пространство полно, что будет доказано позднее).

Отметим, что, хотя элементы из $L^p(X,\mu)$ не являются функциями (в частности, для них не определено значение в точке), ряд свойств обычных функций они сохраняют. Например, их можно складывать и умножать на числа, а при $p=1$ можно корректно определить интеграл

$$\int\limits_E \tilde f d\mu:=\int\limits_E f d\mu.$$

Впрочем, допуская вольность речи, элементы из $L^p(X,\mu)$ называют функциями, если это не приводит к недоразумениям.

**Определение 6.** Линейную комбинацию индикаторов стрелок будем называть *ступенчатой функцией*.

**Теорема 3**. *Пусть $1 \leq p < \infty$. Следующие множества являются всюду плотными в пространстве $L^p[a,b]$:*

*1) векторное пространство $ST[a,b]$ ступенчатых функций, определенных на $[a,b]$;*

*2) векторное пространство $C[a,b]$ функций, непрерывных на $[a,b]$.*

Доказательство. 1) Покажем сначала, что в $L^p[a,b]$ плотно векторное пространство $S[a,b]$ простых функций. Рассмотрим произвольную неотрицательную функцию $f \in L^p[a,b]$. По теореме об аппроксимации существует такая последовательность $\varphi_n \in S[a,b]$, что $0 \leq \varphi_n \uparrow f$. Поскольку $(f-\varphi_n)^p \leq (f+\varphi_n)^p \leq (2f)^p$, причем $(2f)^p \in L^1[a,b]$, можно применить теорему Лебега о мажорированной сходимости и получить

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (f-\varphi_n)^p dm = \int_a^b \lim_{n\to\infty} (f-\varphi_n)^p dm = 0,$$

а потому $\varphi_n \to f$ в пространстве $L^p[a,b]$. Случай знакопеременной функции $f \in L^p[a,b]$ сводится к рассмотренному ввиду разложения $f = f^+ - f^-$: если $\varphi_n \to f^+$ и $\psi_n \to f^-$, то $\varphi_n - \psi_n \to f^+ - f^-$.

Теперь для доказательства утверждения 1) достаточно показать, что индикатор $\chi_A$ измеримого множества $A \subset [a,b]$ можно сколь угодно хорошо аппроксимировать функциями из $ST[a,b]$ в метрике $L^p[a,b]$. А это утверждение прямо следует из критерия Валле-Пуссена. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ выберем элементарное множество $B_\varepsilon \subset [a,b]$ так, что $m(A \triangle B_\varepsilon) < \varepsilon^p$. Тогда $\chi_{B_\varepsilon} \in ST[a,b]$ и $|\chi_A - \chi_{B_\varepsilon}| = \chi_{A\triangle B_\varepsilon}$, а потому $\|\chi_A - \chi_{B_\varepsilon}\|_p < \varepsilon$.

2) С учетом 1) достаточно убедиться, что индикатор $\chi_E$ стрелки $E \subset [a,b]$, можно сколь угодно хорошо аппроксимировать функциями из $C[a,b]$ в метрике $L^p[a,b]$. Но это почти очевидно. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ выберем отрезок $F$ и интервал $U$ так, чтобы $F \subset E \subset U$ и $m(U \setminus F) < \varepsilon$. Пусть функция $g \in C[a,b]$ такова, что $0 \leq g \leq 1$, $g|F = 1$ и $g|U' = 0$. Тогда $|g - \chi_E| \leq \chi_{U\setminus F}$, а потому $\int_a^b |g-\chi_E|^p dm < \varepsilon$, что и завершает доказательство теоремы.$\square$

Дополним теорию пространств $L^p(X,\mu)$ рассмотрением предельного случая $p = \infty$.

**Определение 7.** Говорят, что измеримая функция $f$ на $X$ *существенно ограничена сверху*, если для некоторой константы $c$ имеем $f(x) \leq c$ $\mu$-п. в. При этом *существенная верхняя грань функции* $f$ определяется как

$$\operatorname{esssup} f = \inf\{c : f(x) \leq c \ \mu\text{-п. в. }\}$$

Аналогично определяются существенно ограниченные снизу функции и $\operatorname{essinf} f$. Функция называется *существенно ограниченной*, если она существенно ограничена как сверху, так и снизу.

**Определение 8.** Определим пространство $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ как множество всех существенно ограниченных функций на $X$, т. е. таких измеримых функций $f$ на $X$, для которых
$$\|f\|_\infty := \operatorname{esssup}|f| < \infty.$$

**Упражнение 4.** Докажите, что $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ есть векторное пространство относительно поточечных операций сложения функций и умножения на скаляр.

По причинам, уже отмечавшимся выше, удобно отождествлять функции из $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$, совпадающие почти всюду, т. е. рассматривать факторпространство
$$L^\infty(X,\mu) := \mathcal{L}^\infty(X,\mu)/\mathcal{N}(X,\mu).$$

Как и в случае $p<\infty$, для $\tilde f, \tilde g \in L^\infty(X,\mu)$ полагают
$$\|\tilde f\|_\infty := \|f\|_\infty,\ \rho_\infty(\tilde f,\tilde g) := \|\tilde f - \tilde g\|_\infty.$$

**Упражнение 5.** Проверьте аксиомы метрики для $\rho_\infty$.

**Упражнение 6.** Докажите следующий аналог неравенства Гёльдера: если $f\in L^1(X,\mu)$, а $g\in L^\infty(X,\mu)$, то $fg\in L^1(X,\mu)$ и $\|fg\|_1 \le \|f\|_1\|g\|_\infty$.

Свяжем сходимость в $L^p(X,\mu)$ с другими типами сходимости. Для этого нам потребуется обобщение неравенства Чебышева.

**Теорема 4** ( $L^p$-неравенство Чебышева). *Пусть $f\in L^p(X,\mu)$, $1\le p<\infty$. Тогда для любого $c>0$ справедливо следующее неравенство*:
$$\mu(X(|f|\ge c)) \le \frac{\|f\|_p^p}{c^p}.$$

Доказательство. В самом деле,
$$\|f\|_p^p \ge \int\limits_{X(|f|\ge c)} |f|^p d\mu \ge c^p\mu(X(|f|\ge c)).\square$$

**Следствие 1**. *Если последовательность $f_n\in L^p(X,\mu)$ сходится к функции $f$ в пространстве $L^p(X,\mu)$, то $f_n$ сходится к $f$ и по мере $\mu$.*

Доказательство. Это следует из того, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu(X(|f_n - f| > \varepsilon)) \le \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\varepsilon^p}.\square$$

**Следствие 2**. *Пусть $\mu(X) < \infty$. Если последовательность $f_n \in L^p(X, \mu)$ сходится к функции $f$ в пространстве $L^p(X, \mu)$, то $f_n$ содержит подпоследовательность, которая сходится к $f$ $\mu$-п.в.*

Доказательство следствия 2 является комбинацией следствия 1 и теоремы Ф. Рисса из §1. $\square$

## 3.8 Знакопеременные меры и теорема Радона-Никодима

Часто бывает полезно следующее обобщение понятия меры.

**Определение 1**. Пусть $\mu_1,\ \mu_2$ — две конечные меры, определенные на одной и той же $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Функция множества, определенная равенством

$$\nu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)\ (A \in \mathcal{B}), \tag{8.1}$$

называется *знакопеременной мерой (зарядом)*.

**Замечание**. Ясно, что заряд является $\sigma$-аддитивной вещественнозначной функцией, определенной на $\sigma$-алгебре. Можно доказать, что справедливо и обратное утверждение, т. е. (8.1) — общий вид всех $\sigma$-аддитивных вещественнозначных функций, определенных на $\sigma$-алгебре.

Разумеется, разложение (8.1) не единственно, но, как мы покажем ниже, существует единственное разложение, в котором меры $\mu_1,\ \mu_2$ сосредоточены на непересекающихся множествах (см. определение 2 ниже). В этом случае разложение (8.1) называется *разложением Жордана заряда $\nu$*.

**Определение 2**. Говорят, что мера $\mu$ на множестве $X$ *сосредоточена на измеримом множестве* $E$, если $\mu(E') = 0$.

(Говоря образно, это означает, что $\mu$ «живет» на $E$.)

**Определение 3**. Меры $\mu_1,\ \mu_2$, определенные на одной и той же $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$, называются *взаимно сингулярными* (пишут $\mu_1 \perp \mu_2$), если эти меры сосредоточены на дизъюнктных множествах (т. е. $X$ разбивается на такие измеримые множества $X_1$ и $X_2$, что $\mu_1(X_2) = \mu_2(X_1) = 0$).

Следующее упражнение дает пример меры, взаимно сингулярной с мерой Лебега.

**Упражнение 1***. Докажите, что $m_\varphi \perp m$, где $\varphi$ — функция Кантора (см. главу 2), $m$ — мера Лебега на $[0, 1]$.

Следующее свойство мер является в некотором смысле противоположным взаимной сингулярности.

**Определение 4**. Пусть мера $\mu$ задана на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Заряд $\nu$, определенный на $\mathcal{B}$, называется *абсолютно непрерывным относительно* $\mu$ (пишут $\nu \ll \mu$), если из того, что $\mu(E) = 0$, следует, что $\nu(E) = 0$ (т. е. $\nu$ обладает не меньшим запасом пренебрежимых множеств, чем $\mu$).

Покажем, что абсолютная непрерывность действительно является разновидностью непрерывности.

**Лемма 1** ($\varepsilon - \delta$-условие абсолютной непрерывности). *Пусть ограниченная мера $\nu$ и мера $\mu$ заданы на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Условие $\nu \ll \mu$ равносильно тому, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $\mu(E) < \delta$ влечет неравенство $\nu(E) < \varepsilon$.*

Доказательство. Достаточность. Если $\mu(E) = 0$, то $\varepsilon - \delta$-условие влечет $\nu(E) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$.

Необходимость. Предположим, с целью получить противоречие, что $\nu \ll \mu$, но $\varepsilon - \delta$-условие не выполнено. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого натурального $n$ существует такое множество $E_n \in \mathcal{B}$, что $\mu(E_n) < 1/2^n$, но $\nu(E_n) \geq \varepsilon$. Положим $F_k = \cup_{n=k}^{\infty} E_n$, $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k$. Тогда $\mu(F_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \mu(E_n) = 2^{1-k}$, а потому $\forall k \mu(F) \leq 2^{1-k}$, т. е. $\mu(F) = 0$. С другой стороны, $\nu(F_k) \geq \varepsilon$, и в силу непрерывности меры сверху $\nu(F) = \lim_k \nu(F_k) \geq \varepsilon$. Это противоречит условию $\nu \ll \mu$.$\square$

**Упражнение 2**. Докажите, что если $\nu \ll \mu$ и $\nu \perp \mu$, то $\nu = 0$.

Примеры зарядов, абсолютно непрерывных относительно $\mu$, дают интегралы $\nu(E) = \int_E f d\mu$ при фиксированной функции $f$, рассматриваемые как функция множества. Важная теорема Радона-Никодима утверждает, что других примеров нет. Мы докажем эту теорему с помощью теоремы Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в пространстве $L^2$. [1]

[1]Идея этого доказательства принадлежит Дж. фон Нейману.

**Определение 5.** Пусть $\mu$ —мера на $X$. Отображение $f : L^2(\mu) \to \mathbb{R}$ называется *линейным функционалом*, если

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y \in L^2(\mu)$.

Линейный функционал $f$ называется *ограниченным*, если существует такое $C > 0$, что $|f(x)| \le C\|x\|_{L^2(\mu)}$ при всех $x \in L^2(\mu)$.

Следующий результат описывает все линейные ограниченные функционалы в $L^2(\mu)$.

**Теорема 1** (теорема Ф. Рисса об общем виде линейного функционала в $L^2$). *Для любого линейного ограниченного функционала $f$ в $L^2(\mu)$ существует единственный элемент $x_0 \in L^2(\mu)$, такой, что*

$$f(x) = \int\limits_X x x_0 d\mu$$

*при всех $x \in L^2(\mu)$.*

Доказательство этой теоремы будет дано в курсе функционального анализа несколько позже.

**Теорема 2** (теорема Радона-Никодима для мер). *Пусть $\nu$ и $\mu$ — $\sigma$-конечные меры, заданные на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Если $\nu$ абсолютно непрерывна относительно $\mu$, то на $X$ существует такая единственная с точностью до $\mu$-эквивалентности функция $y \ge 0$, что*

$$\nu(A) = \int\limits_A y d\mu \ (A \in \mathcal{B}). \tag{8.2}$$

Доказательство. Из $\sigma$-конечности мер, беря пересечения, выводим существование такого разбиения $X = \sqcup X_n$, что $\nu(X_n) < \infty$ и $\mu(X_n) < \infty$. Следовательно, рассматривая сужения на $X_n$, меры $\nu$ и $\mu$ можно считать конечными. Введем (конечную) меру $\rho := \mu + \nu$. Тогда $L^2(\rho) \subset L^1(\rho) \subset L^1(\nu)$. Рассмотрим линейный функционал

$$f(x) = \int\limits_X x d\nu \ (x \in L^2(\rho)).$$

Он ограничен в $L^2(\rho)$, так как по неравенству Коши-Буняковского

$$|f(x)| \le \|x\|_{L^2(\nu)} \|1\|_{L^2(\nu)} \le C\|x\|_{L^2(\rho)}.$$

По теореме Ф. Рисса об общем виде линейного функционала существует такая функция $x_0 \in L^2(\rho)$, что

$$\int\limits_X x d\nu = \int\limits_X x x_0 d\rho \ (x \in L^2(\rho)).$$

Полагая здесь $x = \chi_E$, имеем

$$\int\limits_E x_0 d\rho = \nu(E) \geq 0$$

для любого $E \in \mathcal{B}$, откуда $x_0 \geq 0$ $\rho$-п. в., а значит и $\mu$-п. в.

Далее,

$$\int\limits_E d\rho \geq \nu(E) = \int\limits_E x_0 d\rho,$$

а потому $\int_E (1 - x_0) d\rho \geq 0$. Следовательно, $x_0 \leq 1$ $\rho$-п. в., а потому и $\mu$-п. в.

Положим $X_0 := X(x_0 = 1)$. Тогда

$$\mu(X_0) = \rho(X_0) - \nu(X_0) = \int\limits_{X_0} d\rho - \int\limits_{X_0} x_0 d\rho = 0.$$

Поэтому и $\nu(X_0) = 0$, т. е. $x_0 \neq 1$ $\nu$-п. в.

Теперь для любой измеримой функции $x \geq 0$

$$\int\limits_X x d\nu = \int\limits_X x x_0 d\rho = \int\limits_X x x_0 d\nu + \int\limits_X x x_0 d\mu,$$

т. е.

$$\int\limits_X x(1 - x_0) d\nu = \int\limits_X x x_0 d\mu.$$

Полагая в последнем равенстве $x = \frac{1}{1 - x_0} \chi_E$, получим окончательно

$$\nu(E) = \int\limits_E y d\mu,$$

где $y = \frac{x_0}{1 - x_0} \geq 0$ $\mu$-п. в. Единственность $y$ с точностью до $\mu$-эквивалентности очевидна. $\square$

Мы используем теорему Радона-Никодима для доказательства теоремы о разложении Жордана. Нам потребуются также следующие естественные обобщения понятий последовательности и предела последовательности.

**Определение 6.** Пусть $\Lambda$ — линейно упорядоченное множество, $M$ — не пустое множество. Отображение $a : \Lambda \to M$ будем называть *обобщенной последовательностью точек из* $M$ и обозначать $(a_l)_{l\in\Lambda}$.

**Определение 7.** Число $b$ называется *пределом обобщенной числовой последовательности*[2] $(a_l)_{l\in\Lambda}$, если для любого положительного $\varepsilon$ найдется такой элемент $L \in \Lambda$, что при всех $l \geq L$ справедливо неравенство $|a_l - b| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{l\in\Lambda} a_l = b$.

**Замечание.** Частными случаями этого понятия, помимо предела числовой последовательности, являются также односторонние пределы функций действительного переменного, а также пределы таких функций в $\pm\infty$.

Читатель легко проверит, что основные свойства пределов числовых последовательностей, связанные с арифметическими операциями и неравенствами, остаются справедливыми и для обобщенных числовых последовательностей. В частности, отметим следующее обобщение теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности, доказательство которого ничем не отличается от классического (проведите это доказательство!).

**Лемма 2.** *Всякая монотонная ограниченная обобщенная числовая последовательность имеет предел.*

Нам понадобится также достаточное условие равенства повторных пределов.

**Лемма 3** (о равенстве повторных пределов). *Пусть $(a_l(n))_{l\in\Lambda}$ — обобщенная числовая последовательность, зависящая от натурального параметра $n$. Если предел $a_l := \lim\limits_{n\to\infty} a_l(n)$ существует равномерно по $l \in \Lambda$ и существуют пределы $\lim\limits_{l\in\Lambda} a_l = b$ и $\lim\limits_{l\in\Lambda} a_l(n) = b(n)$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty} b(n) = b$. Таким образом, при указанных условиях*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{l\in\Lambda} a_l(n) = \lim_{l\in\Lambda} \lim_{n\to\infty} a_l(n).$$

Доказательство. Отмеченная в условии равномерная сходимость по $l \in \Lambda$ означает, что для любого положительного $\varepsilon$ найдется такое натуральное $N$, что

[2]Это частный случай понятия предела по базе, известного из курса математического анализа (см., например, [5]), а также понятия предела направленности в топологическом пространстве.

при всех $n \geq N$ и при всех $l \in \Lambda$ справедливо неравенство $|a_l(n) - a_l| < \varepsilon$. Переходя в этом неравенстве к пределу по $l \in \Lambda$, получаем, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|b(n) - b| \leq \varepsilon$. $\square$

Теперь мы готовы установить обещанный результат.

**Теорема 3** (о разложении Жордана знакопеременной меры). *Для любого заряда $\nu$ существуют и единственны такие взаимно сингулярные меры $\nu^+$ и $\nu^-$, что*

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

Доказательство. Существование. Пусть заряд $\nu$ задан на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Обозначим через $M$ множество пар $(\mu_1, \mu_2)$, состоящих из мер, определенных на $\mathcal{B}$, и таких, что $\nu = \mu_1 - \mu_2$, и определим в $M$ частичный порядок по правилу

$$(\mu_1, \mu_2) \leq (\mu_1', \mu_2') := \mu_i(A) \geq \mu_i'(A) \text{ при всех } A \in \mathcal{B} \ (i = 1, 2).$$

Полученное частично упорядоченное множество удовлетворяет условиям леммы Цорна. В самом деле, пусть $\{(\mu_{1l}, \mu_{2l}) : l \in \Lambda\}$ — линейно упорядоченное подмножество множества $M$. По лемме 2 для любого $A \in \mathcal{B}$ существует предел $\lim\limits_{l \in \Lambda} \mu_{il}(A)$, который мы обозначим $\mu_i(A)$ $(i = 1, 2)$. Покажем, что функция множества $\mu_i$ $\sigma$-аддитивна, т. е. является мерой. Пусть $A_k \in \mathcal{B}$, $A = \sqcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда

$$\mu_i(A) = \lim_{l \in \Lambda} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_{il}(A_k) \ (i = 1, 2). \tag{8.3}$$

Заметим, что пределы $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu_{il}(A_k) = \mu_{il}(A)$ $(i = 1, 2)$ существуют равномерно по $l \in \Lambda$. Это следует из того, что при всех $l \leq l'$ справедливо неравенство

$$\mu_{il'}(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu_{il'}(A_k) = \mu_{il'}\left(\bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \leq$$

$$\leq \mu_{il}\left(\bigsqcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = \mu_{il}(A) - \sum_{k=1}^{n} \mu_{il}(A_k).$$

Таким образом, применяя в правой части (8.3) лемму 3, получаем

$$\mu_i(A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \lim_{l \in \Lambda} \mu_{il}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_i(A) \ (i = 1, 2).$$

Ясно, что множество $\{(\mu_{1l}, \mu_{2l}) : l \in \Lambda\}$ ограничено сверху парой $(\mu_1, \mu_2)$, принадлежащей $M$.

В силу леммы Цорна множество $M$ содержит максимальный элемент, который мы обозначим $(\nu^+, \nu^-)$. Покажем, что $\nu^+ \perp \nu^-$. Положим $\lambda := \nu^+ + \nu^-$. Так как $\nu^\pm \ll \lambda$, то по теореме Радона-Никодима найдутся такие $\lambda$-интегрируемые функции $y^\pm \geq 0$, что

$$\nu^\pm(A) = \int\limits_A y^\pm d\lambda \ (A \in \mathcal{B}).$$

Пусть $Y^\pm := X(y^\pm > 0),\ Y := Y^+ \cap Y^-,\ z := (1/2)\min(y^+\chi_Y, y^-\chi_Y)$. Если мы предположим, что $\lambda(Y) > 0$, и рассмотрим меру

$$\rho(A) := \int\limits_A z d\lambda \ (A \in \mathcal{B}),$$

то пара $(\nu^+ - \rho, \nu^- - \rho)$ принадлежит $M$ и будет больше пары $(\nu^+, \nu^-)$ (относительно порядка, введенного в $M$), что противоречит максимальности последней. Следовательно, $\nu^\pm(Y) = 0$. Осталось заметить, что мера $\nu^+$ сосредоточена на множестве $Y^+$, а мера $\nu^-$ — на множестве $Y^-$.

Единственность. Пусть $\nu = \mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2$, где $X = F \sqcup E,\ \mu_1(E) = \mu_2(F) = 0$, и $X = P \sqcup N,\ \nu_1(N) = \nu_2(P) = 0$. Тогда $P \setminus F \subset P$ и $P \setminus F \subset E$. Следовательно,

$$\nu(P \setminus F) = \nu_1(P \setminus F) \geq 0,$$

и

$$\nu(P \setminus F) = -\mu_2(P \setminus F) \leq 0,$$

т. е. $\nu(P \setminus F) = 0$. Аналогично доказывается, что $\nu(F \setminus P) = 0$. Поэтому для любого $A \in \mathcal{B}$

$$\mu_1(A) = \mu_1(A \cap F) = \nu(A \cap F) = \nu(A \cap P) = \nu_1(A),$$

и аналогично $\mu_2(A) = \nu_2(A)$.□

**Следствие 1** (Г. Хан). *Существует такое разбиение множества $X$ на множества $X^\pm \in \mathcal{B}$, что $\nu(P) \geq 0$ при всех измеримых $P \subset X^+$ и $\nu(N) \leq 0$ при всех измеримых $N \subset X^-$. При этом*

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap X^+),\ \nu^-(E) = -\nu(E \cap X^-) \ (E \in \mathcal{B}).$$

Разложение $X = X^+ \sqcup X^-$ называется *разложением Хана*, отвечающим заряду $\nu$.

Доказательство. Пусть $X^{\pm}$ — такие дизъюнктные измеримые множества, что $\nu^+(X^-) = \nu^-(X^+) = 0$. Если $E \in \mathcal{B}$, то

$$\nu^+(E) = \nu^+(E \cap X^+) = \nu(E \cap X^+) + \nu^-(E \cap X^+) = \nu(E \cap X^+).$$

Аналогично доказывается, что $\nu^-(E) = -\nu(E \cap X^-)$. Из этих равенств вытекают остальные утверждения следствия. □

В разложении Жордана заряда $\nu$ меры $\nu^+$ и $\nu^-$ называют *положительной и отрицательной частями заряда* $\nu$ соответственно.

**Упражнение 3***. Докажите, что

$$\nu^+(E) = \sup\{\nu(A) : A \subset E, A \in \mathcal{B}\},$$
$$\nu^-(E) = -\inf\{\nu(A) : A \subset E, A \in \mathcal{B}\}.$$

**Теорема 4** (теорема Радона-Никодима для зарядов) . *Пусть $\nu$ есть заряд, а $\mu$ — $\sigma$-конечная мера, заданные на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B}$ подмножеств множества $X$. Если $\nu$ абсолютно непрерывен относительно $\mu$, то существует такая единственная с точностью до эквивалентности функция $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, что*

$$\nu(A) = \int\limits_A f d\mu \ (A \in \mathcal{B}). \tag{8.4}$$

Доказательство будет сразу следовать из теоремы 2, если показать, что $\nu^{\pm} \ll \mu$ вместе с $\nu$. Но если $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) = 0$, то и $\mu(A^{\pm}) = 0$, где $A^{\pm} := A \cap X^{\pm}$. С учетом разложениям Жордана имеем $0 = \nu(A^+) = \nu^+(A^+) = \nu^+(A)$, так как $A = A^+ \sqcup A^-$. Аналогично доказывается, что $\nu^-(A) = 0$. □

**Замечания**. 1) В случае выполнения равенства (8.4) функция $f$ называется *плотностью заряда* $\nu$ относительно меры $\mu$, а также *производной Радона-Никодима*, и обозначается $d\nu/d\mu$, а само равенство записывается в символическом виде так: $d\nu = f d\mu$.

2) В процессе доказательства теоремы 4 было установлено, что $\nu^{\pm} \ll \mu$ одновременно с $\nu$. Отсюда сразу следует, что лемма 1 остается справедливой и в случае, когда мера $\nu$ знакопеременная.

Определение интеграла Лебега-Стилтьеса с немонотонной интегрирующей функцией очевидным образом переносится на случай заряда: если $f \in \mathcal{L}^1(X, \nu^+) \cap \mathcal{L}^1(X, \nu^-)$, то

$$\int\limits_X f d\nu := \int\limits_X f d\nu^+ - \int\limits_X f d\nu^-.$$

Читатель легко проверит, что

$$\left| \int\limits_X f d\nu \right| \leq \int\limits_X |f| d|\nu|,$$

где $|\nu| := \nu^+ + \nu^-$ — так называемая *вариация заряда* $\nu$.

## 3.9 Теория дифференцирования Лебега

Возникает вопрос: при каких условиях на функцию распределения $F$ мера Лебега-Стилтьеса $m_F$ будет абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $m$? Для ответа на него введем следующее важное понятие.

**Определение 1**. Функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого дизъюнктного набора интервалов $(a_j, b_j)(j = 1, \ldots, n)$ условие $\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$ влечет $\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon$.

Аналогично определяется абсолютная непрерывность функции $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, нужно лишь дополнительно потребовать, чтобы $(a_j, b_j) \subset [a, b]$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Совокупность всех абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций будем обозначать $AC[a, b]$.

**Упражнения 1**. Докажите следующие свойства абсолютно непрерывных функций:

1) $AC[a, b]$ есть векторное пространство (относительно обычных операций над функциями), содержащее все функции, удовлетворяющие на $[a, b]$ условию Липшица.

2) Абсолютно непрерывная функция равномерно непрерывна.

3)* $AC[a, b] \subset BV[a, b]$.

**Теорема 1** (теорема об абсолютной непрерывности меры Лебега-Стилтьеса). *Мера Лебега-Стилтьеса $m_F$ с функцией распределения $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $m$ тогда и только тогда, когда $F$ абсолютно непрерывна.*

Доказательство. Если $m_F \ll m$, то абсолютная непрерывность функции $F$ следует из $\varepsilon - \delta$-условия абсолютной непрерывности, примененного к множествам $E = \cup_{j=1}^{N}[a_j, b_j)$.

Для доказательства обратного утверждения возьмем борелевское $E$ с $m(E) = 0$. Пусть $\varepsilon$ и $\delta$ взяты из определения абсолютной непрерывности функции $F$. В силу свойства внешней регулярности меры Лебега-Стилтьеса существует такое открытое $U \supset E$, что $m(U) < \delta$ и такие открытые $U \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset E$, что $m_F(U_j) \to m_F(E)$. Каждое $U_j$ есть дизъюнктное объединение не более чем счетного семейства интервалов $(a_j^k, b_j^k)$, причем $m(U_j) < \delta$. Значит, для любого натурального $N$

$$\sum_{k=1}^{N} m_F((a_j^k, b_j^k)) = \sum_{k=1}^{N} (F(b_j^k) - F(a_j^k)) < \varepsilon.$$

Полагая $N \to \infty$, получаем $m_F(U_j) \leq \varepsilon$, а потому и $m_F(E) \leq \varepsilon$, что влечет $m_F \ll m$.□

Примеры абсолютно непрерывных функций нам доставляет следующая лемма (на самом деле, как показывает теорема 2, доказываемая ниже, других примеров абсолютно непрерывных функций нет).

**Лемма 1**. *Пусть $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$. Интеграл с переменным верхним пределом*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

*является абсолютно непрерывной функцией.*

Доказательство легко вытекает из свойства абсолютной непрерывности интеграла. В самом деле, для любого дизъюнктного набора интервалов $(a_j, b_j) \subset [a,b] (j = 1, \ldots, n)$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} |F(b_j) - F(a_j)| \leq \int\limits_{\sqcup_j [a_j, b_j)} |f(t)|dt,$$

и осталось применить упомянутое свойство. □

Понятие абсолютной непрерывности играет ключевую роль в решении вопроса о справедливости формулы Ньютона-Лейбница, т. е. равенства

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a), \qquad (NL)$$

для интеграла Лебега.

В общем случае это равенство неверно, даже если $F$ почти всюду дифференцируема. Для примера достаточно взять в качестве $F$ функцию Кантора $\varphi$, для которой, очевидно, $\varphi' = 0$ п. в., но $\varphi(1) - \varphi(0) = 1$.

Но имеет место следующая

**Теорема 2** (основная теорема математического анализа для интеграла Лебега). *Для функции* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *следующие утверждения равносильны:*

*1)* $F \in AC[a, b]$*;*

*2)* $F$ *дифференцируема п. в. на* $[a, b]$*,* $F' \in \mathcal{L}^1[a, b]$ *и при всех* $x \in [a, b]$ *справедлива формула* (NL).

Доказательство. Утверждение 2)$\Rightarrow$ 1) следует из леммы 1.

Доказательство обратной импликации можно провести, например, по такой схеме. Поскольку в силу 1) $m_F \ll m$ по теореме 1, то по теореме Радона-Никодима найдется такая функция $f \in \mathcal{L}^1[a, b]$, что

$$m_F([a, x)) = F(x) - F(a) = \int\limits_{[a,x)} f(t)dt.$$

Теперь утверждение 1)$\Rightarrow$ 2) вытекает из следующего результата, являющегося аналогом теоремы о дифференцировании интеграла Римана с переменным верхним пределом (теоремы И. Барроу).

**Теорема 3** (теорема Лебега о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом). *Если* $f \in \mathcal{L}^1[a, b]$*, то*

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{[a,x)} f(t)dt = f(x) \text{ п. в.}$$

Доказательство последней теоремы требует определенной подготовки. Мы проведем его с помощью так называемой максимальной функции Харди-Литтлвуда, имеющей и самостоятельный интерес.

**Определение 2**. Измеримая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называется *локально интегрируемой*, если она интегрируема (по Лебегу) на любом отрезке.

Векторное пространство всех локально интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций будем обозначать $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Ясно, что $L^1[a, b] \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (как обычно, мы считаем функцию $f$ из $L^1[a, b]$ равной нулю на $\mathbb{R} \setminus [a, b]$).

**Определение 3**. Пусть $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$. *Максимальная функция Харди-Литтлвуда функции* $f$ определяется равенством

$$Mf(x) = \sup_{x \in I} \frac{1}{m(I)} \int\limits_I f(t)dt,$$

где супремум распространяется на всевозможные интервалы $I$, содержащие точку $x$.

**Упражнения 2**. 1) Вычислите $M\chi_{(0,h)}$.

2)* Докажите, что $M|f| \notin L^1(\mathbb{R})$, если $f \in L^1(\mathbb{R}),\ f \neq 0$.

**Лемма 2**. *Пусть* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. *Для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *множество* $\mathbb{R}(Mf > \lambda)$ *открыто. В частности, максимальная функция Харди-Литтлвуда* $Mf$ *измерима.*

Доказательство. Если $x_0 \in \mathbb{R}(Mf > \lambda)$, то

$$\sup_{x_0 \in I} \frac{1}{m(I)} \int\limits_I f(t)dt > \lambda + \varepsilon$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Следовательно, найдется такой интервал $I_0$, содержащий точку $x_0$, что

$$\frac{1}{m(I_0)} \int\limits_{I_0} f(t)dt > \lambda.$$

Тогда для любого $x \in I_0$ справедливо неравенство

$$Mf(x) \geq \frac{1}{m(I_0)} \int\limits_{I_0} f(t)dt > \lambda,$$

откуда следует, что $I_0 \subset \mathbb{R}(Mf > \lambda)$.$\square$

**Лемма 3** (лемма Витали). *Пусть* $\{I_1, \dots, I_n\}$ *- семейство интервалов. Существует его дизъюнктное подсемейство* $\{J_1, \dots, J_m\}$, *такое, что*

$$\sum_{j=1}^m m(J_j) \geq \frac{1}{2} m\left(\bigcup_{k=1}^n I_k\right).$$

Доказательство. Рассуждая по индукции, можно заменить семейство $\{I_1, \dots, I_n\}$ таким его подсемейством с тем же самым объединением, что никакой интервал $I_k$ не содержится в объединении остальных. Пусть $I_k$ в этом семействе имеет вид $(a_k, b_k)$; перенумеруем эти интервалы так, чтобы

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n.$$

Тогда $b_{k+1} > b_k$, так как в противном случае $I_{k+1} \subset I_k$. Кроме того, $a_{k+1} > b_{k-1}$, так как иначе $I_k \subset I_{k-1} \cup I_{k+1}$. Значит, интервалы с четными и интервалы с нечетными номерами образуют подсемейства без попарных пересечений. Но

$$\sum_{k \text{ четно}} m(I_k) + \sum_{k \text{ нечетно}} m(I_k) \geq m\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right),$$

и в качестве $\{J_j\}$ мы выбираем интервалы с четными или нечетными номерами, в зависимости от того, какая из сумм больше. □

**Теорема 4** (максимальная теорема Харди-Литтлвуда). *Если* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *то для любого* $\lambda > 0$ *справедливо неравенство*

$$m(\{t \in \mathbb{R} : Mf(t) > \lambda\}) \leq (2/\lambda)\|f\|_1.$$

Доказательство. Множество $E_\lambda = \mathbb{R}(Mf > \lambda)$ измеримо по лемме 2. Для любого $t \in E_\lambda$ найдется интервал $I$, содержащий точку $t$, для которого

$$\frac{1}{m(I)} \int\limits_I f(s)ds > \lambda,$$

то есть,

$$m(I) < \frac{1}{\lambda} \int\limits_I f(s)ds. \tag{9.1}$$

Пусть $K$ — компактное подмножество множества $E_\lambda$. Покроем $K$ конечным набором интервалов $I_1, \ldots, I_n$, удовлетворяющих (9.1). Применение леммы Витали к $\{I_1, \ldots, I_n\}$ даст нам попарно не пересекающиеся интервалы $J_1, \ldots, J_m$, удовлетворяющие (9.1) и такие, что

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \leq 2\sum_{j=1}^{m} m(J_j).$$

Теперь

$$m(K) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) \leq 2\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\lambda} \int\limits_I f(s)ds \leq \frac{2}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)ds.$$

Осталось воспользоваться тем, что в силу регулярности меры Лебега

$$m(E_\lambda) = \sup\{m(K) : K \text{ компактно}, K \subset E_\lambda\}.\square$$

**Замечание.** Оценки вроде той, которая получена в максимальной теореме Харди-Литтлвуда, называются оценками слабого типа и играют важную роль в современном анализе.

**Упражнения 3**.* 1) Докажите, что если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то $Mf(t) < \infty$ п.в.

2) Докажите, что постоянная в максимальной теореме Харди-Литтлвуда — наилучшая из возможных.

Доказательство теоремы 3. Нам будет удобно ввести следующее обозначение для среднего значения функции $f$ на промежутке с концами $x$ и $x+h$:

$$A_h f(x) := \frac{1}{h} \int\limits_x^{x+h} f(t)dt,$$

где $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R},\ h \neq 0$.

Из леммы 1 следует, что функция $x \mapsto A_h f(x)$ абсолютно непрерывна, а потому измерима. Кроме того, ясно, что

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{[a,x)} f(t)dt = \lim_{h \to 0} A_h f(x),$$

если предел существует.

Поскольку пространство $C[a,b]$ всюду плотно в $L^1[a,b]$ (см. теорему 3 в §7), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая непрерывная на $[a,b]$ функция $g$, что

$$\int\limits_a^b |g(y) - f(y)|dy < \varepsilon.$$

Далее, по теореме Кантора для любого $\delta > 0$ найдется такое число $h > 0$, что $|g(y) - g(x)| < \delta$, если $|x - y| < h$. Тогда

$$|A_h g(x) - g(x)| = \frac{1}{h} \left| \int\limits_x^{x+h} (g(y) - g(x))dy \right| \leq \delta.$$

Следовательно, $A_h g(x) \to g(x)$ при $h \to 0$. С другой стороны,

$$|A_h f(x) - f(x)| = |A_h(f-g)(x) + (A_h g - g)(x) + (g-f)(x)| \leq$$

$$\leq |A_h(f-g)(x)| + |(A_h g - g)(x)| + |f-g|(x).$$

Поскольку $|A_h(f-g)(x)| \le M|f-g|(x)$, выводим отсюда, что

$$\limsup_{h\to 0} |A_h f(x) - f(x)| \le M|f-g|(x) + |f-g|(x). \tag{9.2}$$

Положим для $\lambda > 0$

$$E_\lambda = \{x : \limsup_{h\to 0} |A_h f(x) - f(x)| > \lambda\}$$

(верхний предел можно заменить обычным, в котором $h$ стремится к 0, пробегая некоторую последовательность, а потому $E_\lambda$ измеримо). Пусть также

$$F_\lambda = \{x : |f-g|(x) > \lambda\}.$$

Из формулы (9.2) следует, что

$$E_\lambda \subset F_{\lambda/2} \cup \{x : M|f-g|(x) > \lambda/2\}.$$

Но

$$(\lambda/2) m(F_{\lambda/2}) \le \int\limits_{F_{\lambda/2}} |g(x) - f(x)| dx < \varepsilon,$$

а по максимальной теореме

$$m(\{x : M|f-g|(x) > \lambda/2\}) < \frac{2}{\lambda/2} \int\limits_a^b |g(x) - f(x)| dx < \frac{4\varepsilon}{\lambda},$$

так что

$$m(E_\lambda) < \frac{2\varepsilon}{\lambda} + \frac{4\varepsilon}{\lambda}.$$

В силу произвольности $\varepsilon$, отсюда следует, что $m(E_\lambda) = 0$. Таким образом, для любого $\lambda > 0$

$$\limsup_{h\to 0} |A_h f(x) - f(x)| \le \lambda \text{ п. в.}$$

В частности, для любого натурального $k$ существует такое $N_k \subset [a,b]$ нулевой меры, что при всех $x \notin N_k$ выполняется неравенство

$$\limsup_{h\to 0} |A_h f(x) - f(x)| \le \frac{1}{k}.$$

Поэтому при $x \notin \cup_{k=1}^\infty N_k$

$$\limsup_{h\to 0} |A_h f(x) - f(x)| = 0,$$

и осталось заметить, что $m(\cup_{k=1}^{\infty} N_k) = 0.\square$

**Замечание.** Из основной теоремы математического анализа для интеграла Лебега, в частности, следует, что функция Кантора $\varphi \notin AC[0,1]$, хотя является равномерно непрерывной и имеет ограниченную вариацию на $[0,1]$.

* Теорема Лебега о дифференцировании позволяет вычислять производную Радона-Никодима $d\nu/dm$ с помощью некоторого обобщенного процесса дифференцирования.

**Следствие 1.** *Пусть борелевская мера $\nu$ на прямой абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $m$. Тогда*

$$\frac{d\nu}{dm}(x) = \lim_{h\to+0} \frac{\nu([x-h,x+h])}{2h} \text{ п.в.}$$

Доказательство. Пусть $f = d\nu/dm$, т.е. $\nu(E) = \int_E f dm,\ h > 0$. Тогда

$$\frac{\nu([x-h,x+h])}{2h} = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{2}(A_h f(x) + A_{-h} f(x)).$$

Поэтому

$$\frac{\nu([x-h,x+h])}{2h} \to f(x)\ (h \to +0) \text{ п.в.}$$

в силу теоремы 3. $\square$

**Замечание**. Следствие 1 обобщается в двух направлениях. Во-первых, мера $m$ может быть заменена любой борелевской мерой $\mu$, относительно которой мера $\nu$ абсолютно непрерывна. Во-вторых, система отрезков $[x-h, x+h]$ может быть заменена любой системой множеств $U_h(x)$, которая «правильно» стягивается к точке $x$ в том смысле, что

1) $U_h \subset (x-h, x+h)$; и

2) существует такое число $a > 0$, не зависящее от $h$, что $\mu(U_h) \geq a\mu((x-h, x+h))$.

Таким образом, при этих условиях

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\nu(U_h)}{\mu(U_h)}\ \mu\text{-п.в.}$$

(подробности см. в [16]).

Для формулировки еще одного важного следствия теоремы 3 введем следующее понятие.

**Определение 4**. Пусть $E$ — измеримое множество на прямой. *Плотностью множества $E$ в точке $x$* называется число

$$D_E(x) = \lim_{h\to+0} \frac{m(E\cap[x-h,x+h])}{2h},$$

если предел существует.

**Упражнение 4**. Вычислите $D_{(0,1)}(x)$.

**Определение 5**. Точка $x$ называется *точкой плотности* (*точкой разрежения*) множества $E$, если $D_E(x)=1$ (соответственно $D_E(x)=0$).

**Следствие 2** (теорема Лебега о точках плотности). *Пусть $E$ — измеримое множество на прямой. Почти все точки множества $E$ являются точками плотности, а почти все точки множества $E'$ — точками разрежения множества $E$.*

Доказательство. Ясно, что мера $m_E(A)=m(A\cap E)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега $m$ и имеет плотность $\chi_E$. Поэтому

$$\lim_{h\to+0} \frac{m(E\cap[x-h,x+h])}{2h} = \chi_E \ \text{ п.в.}$$

по следствию 1. Применяя только что доказанное утверждение к множеству $E'$, заключаем, что

$$\lim_{h\to+0} \frac{m(E'\cap[y-h,y+h])}{2h} = 1 \text{ для п.в. } y\in E'.$$

Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$\frac{m(E\cap[y-h,y+h])}{2h} + \frac{m(E'\cap[y-h,y+h])}{2h} = 1$$

при всех действительных $y$ и $h>0$.$\square$

**Упражнение 5***. Существует ли такое измеримое множество $E$ на прямой, что $m(E\cap[a,b])=(b-a)/2$ для любого отрезка $[a,b]$?

В заключение сформулируем еще один замечательный результат о дифференцировании, принадлежащий Лебегу.

**Теорема 5** (А. Лебег). *Любая монотонная функция на прямой почти всюду дифференцируема.**

Доказательство этой теоремы см., например, в [7].

## 3.10 Произведение мер и теорема Фубини

Как определить меру Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$, исходя из меры Лебега $m$ на прямой $\mathbb{R}$? Мотивируясь формулой площади прямоугольника, естественно рассмотреть систему подмножеств плоскости вида $A \times B$, где $A$ и $B$ — измеримые по Лебегу подмножества $\mathbb{R}$, и положить $m_2(A \times B) := m(A)m(B)$. Оказывается, $m_2$ является мерой на полуалгебре этих «обобщенных прямоугольников», и можно применить процесс продолжения меры, описанный в главе 2. Аналогично строится мера Лебега $m_3$ в $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ и т. д., а также на торе, цилиндрических поверхностях и прочих прямых произведениях, так что целесообразно сразу рассмотреть общую схему.

Для этого нам понадобится следующая простая

**Лемма 1**. *Пусть $\mathcal{S}_i$ — полуалгебра подмножеств множества $X_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда система множеств*

$$\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{S}_i,\ i = 1, 2\}$$

*есть полуалгебра подмножеств множества $X_1 \times X_2$.*

Доказательство сводится к простой проверке для $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ аксиом полуалгебры с помощью тождеств

$$(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2),$$

$$(A \times B)' = (A \times B') \sqcup (A' \times B) \sqcup (A' \times B'). \square$$

**Замечание**. Система $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ может не быть даже алгеброй и в том случае, когда $\mathcal{S}_i$ $(i = 1, 2)$ являются сигма-алгебрами (приведите пример). Это еще один аргумент в пользу введения понятия полуалгебры.

**Теорема 1** (теорема-определение произведения мер). *Пусть $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ — пространства с мерой. Определим функцию $\mu_1 \times \mu_2$ на полуалгебре $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ следующим образом:*

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\ (A_i \in \mathcal{B}_i,\ i = 1, 2).$$

*Тогда она будет мерой. Лебеговское продолжение этой меры обозначается $\mu_1 \otimes \mu_2$ и называется* произведением мер *$\mu_1$ и $\mu_2$.*

Доказательство. Достаточно проверить $\sigma$-аддитивность функции множества $\mu_1 \times \mu_2$, т. е. справедливость равенства

$$(\mu_1 \times \mu_2)(A \times B) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_1 \times \mu_2)(A_n \times B_n),$$

если $A \times B = \sqcup_{n=1}^{\infty}(A_n \times B_n)$ и $A, A_n \in \mathcal{B}_1,\ B, B_n \in \mathcal{B}_2$. Для этого заметим, что $\chi_{A\times B} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n\times B_n}$ и $\chi_{A\times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y)$, а потому

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x)\chi_{B_n}(y).$$

Почленно интегрируя это равенство сначала по $x$, а затем по $y$ (что законно по теореме Б. Леви об интегрировании суммы ряда), получаем требуемое. $\square$

Сейчас мы можем сформулировать две важные теоремы о переходе от двойного интеграла к повторному.

**Теорема 2** (теорема Фубини-Тонелли). *Пусть* $(X_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$ — *пространства с сигма-конечными мерами.*

1 (Тонелли). *Если функция* $f$ *на* $X_1 \times X_2$ *неотрицательна и* $\mu_1 \otimes \mu_2$*-измерима, то*

$$\int\limits_{X_1\times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{X_1} \left( \int\limits_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) =$$

$$= \int\limits_{X_2} \left( \int\limits_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2), \tag{9.1}$$

*причем утверждение теоремы включает измеримость п. в. внутренних интегралов (как функций, заданных интегралами, зависящими от параметра).*

2 (Фубини). *Если* $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$, *то справедливо равенство* (9.1), *причем утверждение теоремы включает существование и интегрируемость п. в. внутренних интегралов (как функций, заданных интегралами, зависящими от параметра).*

Доказательство. 1. С целью доказательства теоремы Тонелли обозначим через $V$ множество всех вещественнозначных $\mu_1 \otimes \mu_2$-измеримых функций, для которых справедливо заключение этой теоремы. Тогда $V$ есть вещественное векторное пространство, содержащее пределы монотонных последовательностей своих неотрицательных элементов по теореме Б. Леви.

Будем сначала предполагать, что меры $\mu_i$ конечны. Положим

$$\mathcal{E} = \{A \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 : \chi_A \in V\}$$

и покажем, что

$$\mathcal{E} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2. \tag{9.2}$$

Для этого установим ряд свойств системы $\mathcal{E}$.

1) $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{E}$.

Действительно, $\chi_{A_1 \times A_2} \in V$ при $A_i \in \mathcal{B}_i$, так как с помощью равенства $\chi_{A_1 \times A_2} = \chi_{A_1}\chi_{A_2}$ легко убедиться, что (9.1) справедливо при $f = \chi_{A_1 \times A_2}$. В частности, мы доказали, что $X := X_1 \times X_2 \in \mathcal{E}$.

2) Если $A, B \in \mathcal{E}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{E}$.

Это сразу следует из того, что $\chi_{B \setminus A} = \chi_B - \chi_A$, а $V$ является векторным пространством.

3) Система $\mathcal{E}$ замкнута относительно перехода к дополнениям, что непосредственно вытекает из 1) и 2).

4) Система $\mathcal{E}$ содержит объединения возрастающих последовательностей своих элементов, т. е. если $A_n \in \mathcal{E}$, $A_n \uparrow A$, то $A \in \mathcal{E}$.

В самом деле, $V$ содержит пределы монотонных последовательностей своих элементов, а $\chi_{A_n} \uparrow \chi_A$.

5) Система $\mathcal{E}$ содержит конечные дизъюнктные объединения своих элементов, т. е. если множества $A_i \in \mathcal{E}$ попарно не пересекаются, то $A := \sqcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{E}$.

Действительно, $\chi_A = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \in V$.

Теперь свойства 3) и 4) показывают, что $\mathcal{E}$ является монотонным классом. С другой стороны, в силу свойств 1) и 5) и теоремы об алгебре, порожденной полуалгеброй, $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) \subset \mathcal{E}$. Следовательно, применяя теорему о монотонных классах, имеем

$$\mathcal{E} \supset \mathcal{M}(\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)) = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2,$$

откуда сразу следует (9.2).

Опять используя тот факт, что $V$ есть вещественное векторное пространство, содержащее пределы монотонных последовательностей своих элементов, получаем из (9.2), что $V$ содержит все простые функции, а с учетом теоремы об аппроксимации и все неотрицательные измеримые функции, что доказывает теорему Тонелли для конечных мер.

Случай $\sigma$-конечных мер сводится к уже рассмотренному следующим образом. Множество $X_1 \times X_2$ можно представить в виде объединения дизъюнктной последовательности прямоугольников вида $Y_n \times Z_n$, имеющих конечную меру.

Остается записать (9.1) для этих прямоугольников, сложить полученные равенства и воспользоваться $\sigma$-аддитивностью интеграла Лебега.

2. Если теперь $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$, то применим теорему Тонелли к функциям $f^{\pm} \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$, запишем соответствующие этим функциям равенства (9.1) и вычтем их почленно. $\square$

**Следствие 1** (принцип Кавальери). *Для множества $E \in \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$ положим*

$$E_x = \{y \in X_2 : (x, y) \in E\}, E^y = \{x \in X_1 : (x, y) \in E\}.$$

*Тогда*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(E) = \int\limits_{X_1} \mu_2(E_x) d\mu_1(x) = \int\limits_{X_2} \mu_1(E^y) d\mu_2(y).$$

Доказательство. Достаточно применить теорему Тонелли к функции $\chi_E$.$\square$

**Замечание**. Если хотя бы одна из мер не $\sigma$-конечна, теоремы Фубини и Тонелли могут не выполняться. В качестве соответствующего контрпримера можно взять $X_1 = X_2 = [0,1]$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$, $\mu_1 = m, \mu_2$ — считающая мера, $f = \chi_D$, где $D = \{(x, x) : x \in [0,1]\}$.

**Упражнение 1.*** Проверьте.

**Упражнение 2***. Пусть $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu_1 = \mu_2$ — считающая мера. Положим $f(m,n) = 1$, если $m = n$, $f(m,n) = -1$, если $m = n + 1$, и $f(m,n) = 0$ в остальных случаях. Тогда $f \notin \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$, но повторные интегралы существуют и равны. Докажите.

**Замечание**. Теоремы Фубини и Тонелли часто применяются в следующей ситуации. Допустим, что нам нужно изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int_{X_1} \left( \int_{X_2} f d\mu_2 \right) d\mu_1$. Тогда сначала мы используем теорему Тонелли, чтобы доказать (путем перехода к повторному), что $\int_{X_1 \times X_2} |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty$, а затем применяем теорему Фубини к $\int_{X_1 \times X_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2)$.

*Приведем типичный пример, важный для гармонического анализа.

**Определение 1**. Если функции $f, g \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R})$, то их *сверткой* называется функция

$$f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dm(y),$$

если интеграл существует.

**Теорема 3**. *Свертка функций $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ определена п. в. и принадлежит $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Рассмотрим двойной интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dm(y)dm(x).$$

Он существует, поскольку в силу теоремы Тонелли существует интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)g(x-y)|dm(y)dm(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)g(x)|dm(y)dm(x) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(y)|dm(y) \int\limits_{\mathbb{R}} |g(x)|dm(x)$$

(мы воспользовались трансляционной инвариантностью интеграла по мере Лебега и измеримостью подинтегральной функции, см. упражнение 4 ниже). Значит, по теореме Фубини существует и интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (f * g)(x)dm(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left( \int\limits_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dm(y) \right) dm(x).$$

**Упражнение 3**. Докажите, что свертка функций из $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ обладает переместительным, сочетательным и распределительным свойствами.

**Упражнение 4***. Убедитесь, что в доказательстве существования свертки, приведенном выше, функция $(x; y) \mapsto f(y)g(x-y)$ $m_2$-измерима.

**Упражнение 5***. Докажите, что для любых $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Вооружившись этими фактами, докажем следующий результат.

**Теорема 4** (о единственности инвариантной меры). *Мера Лебега в классе борелевских мер определяется свойством трансляционной инвариантности однозначно с точностью до числового множителя.*

Доказательство. Если $\mu$ — трансляционно инвариантная борелевская мера на прямой, то для любого борелевского $A$ конечной $\mu$-меры

$$\mu(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{y+A}(x)d\mu(x) \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(y)dm(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left( \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{y+A}(x)\chi_{[0,1]}(y)dm(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} (\chi_A * \chi_{[0,1]})(x)dm(y) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left( \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{y+[0,1]}(x)d\mu(x) \right) \chi_A(y)dm(y) = \mu([0,1])m(A).$$

Читателю предлагается восстановить детали предыдущей выкладки.$\square$*

## 3.11 Дополнительные упражнения к главе 3

1. Докажите оставшиеся недоказанными импликации в теореме 1 §1.

2. Докажите следствие 1 теоремы 1 §1.

3. Выразите индикаторы множеств

$$1)\ A \cap B,\ 2) \cap_i A_i,\ 3)\ A \cup B,$$

$$4) \cup_i A_i,\ 5)\ A \setminus B,\ 6)\ A \triangle B$$

через индикаторы множеств $A, B, A_i$.

4*. Будет ли измерима функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на пространстве с мерой $X$, если известно, что множества $X(f < a)$ измеримы

а) для любого рационального $a$;

б) для любого целого $a$?

5. Известно, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима на каждом конечном интервале. Докажите, что она измерима на $\mathbb{R}$.

6*. О функции $f : X \to \mathbb{R}$ известно, что для любого действительного $c$ множество $X(f = c)$ измеримо. Следует ли отсюда измеримость функции $f$?

7. Докажите, что функция $\varphi = \sum_{n=1}^{4} n^2 \chi_{[0,1+1/n]}$ является простой и, пользуясь определением интеграла от неотрицательных простых функций, вычислите $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm$.

8. Докажите первое свойство интеграла от неотрицательных простых функций.

9. Докажите, что все свойства интеграла от вещественнозначных функций, выраженные равенствами, а также неравенствами, содержащими лишь модули, остаются справедливыми и для комплекснозначных функций.

10*. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$. Вычислите $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} f dm$.

11*. Приведите пример измеримой по Лебегу функции на прямой, которая не ограничена на любом интервале.

12. Докажите, что теоремы Лебега и Б. Леви не верны для интеграла Римана, так как предельная функция может быть не интегрируема по Риману, хотя все подинтегральные функции интегрируемы.

13*. Пусть $f \in L^1(\mu)$. Докажите, что для любых $\mu$-измеримых множеств $A, B$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{A\cap B} f d\mu \right| \leq \left( \int\limits_A |f| d\mu \int\limits_B |f| d\mu \right)^{1/2}.$$

14*. Пусть $f$ и $g$ — неотрицательные $\mu$-измеримые функции, $h = \max\{f, g\}$. Докажите, что для любого $c \geq 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{X(h>c)} h d\mu \leq \int\limits_{X(f>c)} f d\mu + \int\limits_{X(g>c)} g d\mu.$$

15*. Пусть $f \in L^1([0,1])$, $\int_{[0,1]} f dm = c$. Докажите, что $\int_{[0,x]} f dm = c/2$ для некоторого $x \in [0,1]$.

16*. Докажите, что интеграл $\int_0^\infty f(x)dx$ с подинтегральной функцией $f = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}\chi_{[n,n+1)}$ существует как условно сходящийся несобственный интеграл Римана, но не существует в смысле Лебега.

17*. Докажите, что функция $f(x) = m(E \cap [0,x])$ непрерывна на $\mathbb{R}$, если множество $E$ измеримо и имеет конечную меру Лебега.

18. Пусть $\nu$ есть некоторый заряд, $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Докажите, что

$$\left| \int\limits_X f d\nu \right| \leq \int\limits_X |f| d|\nu|.$$

19. Докажите следующие равенства между множествами:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

$$(A \times B)' = (A \times B') \sqcup (A' \times B) \sqcup (A' \times B').$$

20*. Покажите на примере, что прямое произведение сигма-алгебр может не быть алгеброй множеств.

21. Дано измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^2, m_2(E) = 1$ и действительное число $\lambda$. Чему равно $m_2(\lambda E)$?

22*. Докажите, что для любых вещественнозначных $\mu$-интегрируемых функций $u$ и $v$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_X u d\mu\right)^2 + \left(\int\limits_X v d\mu\right)^2 \leq \left(\int\limits_X \sqrt{u^2+v^2} d\mu\right)^2.$$

23. Будет ли функция $\sin(1/x)$ интегрируема по Лебегу на множестве $(0,1)$?

24. Пусть $f(x) = \chi_{[0,1)} - \chi_{[1,2)}$, $u_n(x) = f(x-n+1)$ $(n \geq 1)$, $u_0 = -\chi_{[0,1)}$. Проверьте, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) dx \neq \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} u_n(x) dx.$$

25*. Докажите следующее обобщение теоремы Лебега. Пусть $f_n, g_n, f, g \in L^1(\mu)$, причем $|f_n| \leq g_n$ п. в. при всех $n$ и $\int\limits_X g_n d\mu \to \int\limits_X g d\mu$. Тогда $\int\limits_X f_n d\mu \to \int\limits_X f d\mu$.

26*. Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx$.

27*. Пусть $\varphi$ — функция Кантора. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \varphi(x) dx$.

28*. Вычислите интеграл Лебега-Стилтьеса

$$\int\limits_0^1 x d\varphi(x),$$

где $\varphi$ — функция Кантора.

29*. а) Докажите, что каждая монотонная функция $g$ на прямой является борелевской.

б) Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, причем $F' > 0$. Докажите, что для любого борелевского $B \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$m(F(B)) = \int\limits_B F'(t) dt.$$

30*. При каких значениях параметра $\alpha$ следующий интеграл существует либо в смысле Лебега, либо как (собственный или несобственный) интеграл Римана:

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}dx?$$

31. Пусть $X = \mathbb{R}, \ F = \chi_{(0,+\infty)}$. Докажите, что $F \in L^1(m_F)$, хотя множество точек разрыва функции $F$ имеет положительную $m_F$-меру.

32*. Пусть функция $F$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет непрерывную и суммируемую на интервале $(a, b)$ производную. Докажите, что

$$F(b) - F(a) = \int\limits_a^b F'(t)dt.$$

33*. При каких $\alpha, \beta > 0$ функция $f(x) = x^{-\alpha}|\log x|^{-\beta}$ принадлежит $L^1[0, 1]$?

34*. Выяснить, имеет ли место включение $f \in L^1(E, \mu)$, если:

а) $E = [2, +\infty), \ \mu = m, \ f(x) = \log\cos(\pi/2x)$;

б) $E = (0, 1] \times (0, 1], \ \mu = m_2, \ f(x, y) = \frac{1}{\sin x \sin y}$;

в) $E = [1, +\infty), \ \mu = m, \ f(x) = \frac{2^{-x}}{[x]}$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа).

35*. Пусть $F$ — возрастающая непрерывная слева на $\mathbb{R}$ функция. Найдите предел последовательности $\int_{[0,1]} x^n dF(x)$ $(n \to \infty)$ (эта последовательность называется *последовательностью моментов функции* $F$).

36*. Пусть $f \in L^1(0, +\infty)$. Докажите, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x+t}dx = o\left(\frac{1}{t}\right) \ (t \to +\infty).$$

37*. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\lambda}{1-x}\log\frac{1}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda+n)^2} \ (\lambda > -1).$$

38. Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx,$$

но последовательность $(f_n)_{n\ge 1}$ не сходится равномерно на промежутке $(0,1)$.

39. Пусть $f_n(x)=\frac{1}{n}e^{-x/n}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)dx \ne \int_0^\infty (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx,$$

но последовательность $(f_n)_{n\ge 1}$ сходится равномерно на промежутке $[0,\infty)$.

40*. Докажите, что функция $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x^2}$ $(x\ne 0)$, $f(0)=0$ дифференцируема в каждой точке из $[0,1]$, но ее производная не интегрируема относительно меры Лебега на $[0,1]$.

41*. Пусть $f\in L^1(\mu)$,

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\le n\\ 0, & |f(x)|>n.\end{cases}$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu.$$

42*. Пусть $f\in L^1(\mu)$,

$$\overline{f}_n(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|\le n\\ n, & |f(x)|>n.\end{cases}$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \overline{f}_n d\mu=\int_X f d\mu.$$

43*. Пусть $f\in L^1(\mu)$. Докажите, что $\mu(X(|f|\ge n))=o(1/n)$ $(n\to\infty)$.

44*. Пусть функция $f$ $\mu$-измерима, $E_n=X(n-1\le f<n)$. Докажите, что $f\in L^1(\mu)$, если и только если сходится ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|\mu(E_n)$.

# СПИСОК ВСЕХ УПРАЖНЕНИЙ

### Глава 1 Элементы теории множеств

#### 1.1 Множества, отношения и отображения

**Упражнение 1**. Докажите следующие соотношения для отображения $f : X \to Y$ и множеств $E, E_i \subset Y, F_i \subset X$:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(E_i),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(E_i),$$

$$f^{-1}(E') = (f^{-1}(E))',$$

$$f\left(\bigcup_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(F_i),$$

$$f\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(F_i).$$

**Упражнения 2**. 1) Проверьте, что композиция отображений обладает сочетательным свойством: если $f : X \to Y,\ g : Y \to Z,\ h : Z \to T$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2) Будет ли композиция отображений $f, g : X \to X$ обладать переместительным свойством: $g \circ f = f \circ g$?

3) Пусть отображение $f : X \to Y$ обратимо. Чему равны композиции $f^{-1} \circ f$ и $f \circ f^{-1}$?

**Упражнения 3**. *Симметрическая разность* множеств $A$ и $B$ определяется как

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Докажите, что
1) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;
2) $B' \triangle A' = B \triangle A$;
3) $E \cap B \subset (E \cap A) \cup (B \triangle A)$
для любых множеств $A, B, E \subset X$.

### 1.2 Счетные и несчетные множества

**Упражнения 1**. Докажите, что
1) $\{2, 3, \ldots\} \sim \mathbb{N}$;
2) любые два интервала (отрезка) эквивалентны между собой;
3) $(-\pi/2, \pi/2) \sim \mathbb{R}$;
4) отношение $X \sim Y$ рефлексивно, симметрично и транзитивно;
5) $A \sim A_1, B \sim B_1 \Rightarrow A \times B \sim A_1 \times B_1$.
**Упражнения 2**. Докажите, что
1) множество, эквивалентное счетному, также счетно;
2) объединение конечного и счетного множества счетно;
3)* объединение двух счетных множеств счетно ;
4) множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно.
**Упражнения 3**. Докажите, что
1)* объединение конечного семейства счетных множеств счетно;
2)* объединение счетного семейства не пустых конечных множеств счетно.

### Дополнительные упражнения к главе 1

1. Докажите распределительные законы для операций объединения и пересечения:
1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
2. Докажите, что для произвольного семейства множеств $A_i$ справедливы равенства:
1) $(\cup_i A_i) \cap B = \cup_i (A_i \cap B)$,
2) $(\cap_i A_i) \cup B = \cap_i (A_i \cup B)$.
3. Докажите правила де Моргана.
4. Докажите включения

$$(\cup_i A_i) \setminus (\cup_i B_i) \subset \cup_i (A_i \setminus B_i),$$

$$(\cap_i A_i) \setminus (\cap_i B_i) \subset \cup_i (A_i \setminus B_i).$$

5. Докажите, что множество, наделенное отношением эквивалентности, есть дизъюнктное объединение своих классов эквивалентности.

6*. Приведите пример частично упорядоченного множества, имеющего несколько максимальных элементов.

7. Покажите на примере, что включение в формуле (1.5) может быть строгим.

8. Докажите, что отображение $f : X \to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда уравнение $f(x) = y$ при каждом $y \in Y$ имеет единственное решение в множестве $X$.

9. Рассмотрим отображение $f : X \to Y$.

а) Докажите, что равенство $f(f^{-1}(A)) = A$ выполняется при всех $A \subset Y$ тогда и только тогда, когда отображение $f$ сюръективно;

б)* Докажите, что равенство $f(A') = f(A)'$ выполняется при всех $A \subset X$ тогда и только тогда, когда отображение $f$ биективно.

10*. Докажите, что если множество на прямой есть объединение попарно не пересекающихся интервалов, то множество этих интервалов не более чем счетно.

11*. Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

12*. Пусть $A$ — такое подмножество числовой прямой, что каждое его не пустое подмножество имеет наименьший элемент. Докажите, что $A$ не более чем счетно.

13*. Докажите счетность множества всех конечных подмножеств счетного множества $X$.

14*. Пусть $A$ — такое подмножество множества неотрицательных действительных чисел, что множество всевозможных конечных сумм его элементов ограничено. Докажите, что $A$ не более чем счетно.

15*. Пусть множество $A$ счетно, а множество $B$ бесконечно. Докажите, что $|A \cup B| = |B|$.

16*. Докажите, что если $|X_i| = |X|$, то $|\prod_{i \in I} X_i| = |X^I|$.

17*. Докажите, что декартово произведение счетного семейства счетных множеств имеет мощность континуума.

18*. Рассмотрев отображение $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (m, n) \mapsto 2^{m-1}(2n - 1)$, дайте новое доказательство следствия 1 основной теоремы теории счетных множеств.

19*. Рассмотрим следующее доказательство теоремы Кантора о несчетности интервала $(0, 1)$. Допустим противное: $(0, 1) = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Выберем отрезок $I_1 \subset (0, 1)$, не содержащий $a_1$; затем выберем отрезок $I_2 \subset I_1$, не содержащий $a_2$; и т. д. Приведите принятое допущение к противоречию.

## Глава 2 Элементы теории меры

### 2.1 Системы множеств

**Упражнение 1**. Докажите следующие свойства алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств множества $X$:

1) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;

2) $B_1, B_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow B_1 \setminus B_2 \in \mathcal{A}$;

3) $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cap_{j=1}^{n} B_j,\ \cup_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{A}$.

**Упражнения 2**. Пусть $\mathcal{B}$ — $\sigma$-алгебра. Докажите, что

1) $B_n \in \mathcal{B} \Rightarrow \cap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$;

2) пересечение любого семейства $\sigma$-алгебр подмножеств множества $X$ само является $\sigma$-алгеброй.

3) если для алгебры $\mathcal{B}$ условие 2 определения 2 выполняется только для *дизъюнктных* систем $B_n$, то $\mathcal{B}$ будет $\sigma$-алгеброй.

**Упражнение 3**. Докажите, что $\sigma$-алгебра борелевских множеств $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ совпадает с

а)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех интервалов;

б)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех открытых множеств из $\mathbb{R}$;

в)* $\sigma$-алгеброй, порожденной системой всех отрезков.

**Упражнение 4**. Докажите, что $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ есть наименьшая (по включению) алгебра, содержащая полуалгебру $\mathcal{S}$.

**Упражнение 5.** Пусть $\mathcal{S}$ — полуалгебра множеств. Докажите, что $\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathcal{S})) = \mathcal{B}(\mathcal{S})$.

**Упражнение 6.** * Пусть $\mathcal{E}$ — система подмножеств множества $X, A \subset X$. Докажите, что $\mathcal{B}(\mathcal{E}) \cap A = \mathcal{B}(\mathcal{E} \cap A)$.

**Упражнения 7.** Докажите, что

1)* каждая $\sigma$-алгебра является монотонным классом, но обратное неверно;

2) если монотонный класс является алгеброй, то он является также и $\sigma$-алгеброй;

3) пересечение любого семейства монотонных классов является монотонным классом.

### 2.2 Меры. Свойства мер

**Упражнения 1**. Докажите, что

1)* для любой (конечно- или $\sigma$-)аддитивной меры $\mu$ справедливо равенство $\mu(\emptyset) = 0$;

2) каждая $\sigma$-аддитивная мера конечно-аддитивна;

3) линейная комбинация конечного числа мер с неотрицательными коэффициентами является мерой;

4) для любого $E \in \mathcal{S}$ функция на полуалгебре $\mathcal{S}$, задаваемая формулой $\nu(A) = \mu(A \cap E)$, является мерой.

**Упражнение 2**. Проверьте выполнение условия $\sigma$-аддитивности для меры Дирака и дискретной меры.

**Упражнение 3**. Определите $B_n \downarrow B$ по аналогии с $B_n \uparrow B$.

**Упражнение 4.** Докажите, что если $\mu_1, \mu_2$ — две конечные меры, определенные на $\sigma$-алгебрах $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ соответственно, то система $\{A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$ является монотонным классом.

**Упражнения 5.** Пусть $\mu$ — конечная мера на $X$. Докажите следующие утверждения.

1)* Множество $X_1 := \{x \in X : \mu(\{x\}) > 0\}$ не более чем счетно.

2) Положим $X_1 = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}, p_n = \mu(\{x_n\})$ и обозначим через $\mu_d$ дискретную меру, отвечающую этим последовательностям. Тогда разность $\mu_c = \mu - \mu_d$ является непрерывной мерой.

**Упражнение 6.** Обобщите результат предыдущего упражнения на $\sigma$-конечные меры.

**Упражнение 7.** Докажите, что для меры $\mu$ на алгебре $\mathcal{A}$ и любых $A, B \in \mathcal{A}$ справедливо неравенство $\mu(A \cap B) \leq \sqrt{\mu(A)\mu(B)}$. Верно ли это неравенство для меры, определенной лишь на полуалгебре?

**Упражнение 8**. Пусть $X = \{a, b\}$. Определим функцию $\mu$ на $\sigma$-алгебре $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$ следующим образом: $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(\{a\}) = 1,\ \mu(\{b\}) = +\infty,\ \mu(X) = +\infty$. Докажите, что $\mu$ есть мера и она не $\sigma$-конечна.

### 2.3 Продолжение мер

**Упражнение 1***. Пусть мера $\mu$ конечна. Проверьте, что отображение $(A, B) \mapsto \mu^*(A \Delta B)$ есть полуметрика на $\mathcal{P}(X)$, которая становится метрикой, если мы отождествим множества $A$ и $B$, для которых $\mu^*(A \Delta B) = 0$.

**Упражнение 2***. Лебеговское продолжение любой меры полно. Докажите.

## §4 Меры Лебега и Лебега-Стилтьеса на прямой

**Упражнение 1**. Докажите, что мера Лебега-Стилтьеса $m_F$ конечно-аддитивна, а потому обладает свойством конечной полуаддитивности:

если $[a, b) = \bigcup_{j=1}^{n} [a_j, b_j)$, то

$$m_F([a, b)) \leq \sum_{j=1}^{n} m_F([a_j, b_j)).$$

**Упражнения 2**. Докажите следующие утверждения.

1)* Любое одноточечное подмножество числовой прямой $m_F$-измеримо.

2) Мера Лебега счетного подмножества числовой прямой равна нулю.

3) $m_F((a,b)) = F(b) - F(a+0)$, $m_F([a,b]) = F(b+0) - F(a)$, $m_F((a,b]) = F(b+0) - F(a+0)$.

4) Мера $m_F$ непрерывна тогда и только тогда, когда непрерывна функция $F$ (мера называется непрерывной, если мера каждого одноточечного подмножества равна нулю).

**Упражнение 3**. Постройте канторовскую лестницу на нескольких смежных интервалах.

**Упражнение 4***. Докажите, что для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathbb{R}$ и чисел $x, \lambda \in \mathbb{R}$ множества $x + A := \{x + a : a \in A\}$ и $\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}$ тоже измеримы по Лебегу и справедливы равенства $m(x + A) = m(A), m(\lambda A) = |\lambda| m(A)$. (Первое из этих равенств выражает свойство *трансляционной инвариантности* меры Лебега.)

**Упражнение 5***. Постройте меру Лебега на единичной окружности по аналогии с построением меры Лебега на прямой.

**Упражнение 6.*** Пусть $\mu$ — конечная непрерывная мера Лебега-Стилтьеса на $\mathbb{R}$. Докажите, что $\mu$ принимает все значения из $[0, \mu(\mathbb{R})]$.

**Упражнения 7***. Докажите следующие свойства меры Хаусдорфа:

1) $H^0$ — считающая мера;

2) $H^s(\lambda A) = \lambda^s H^s(A)$ $(\lambda > 0)$;

3) $H^s(x + A) = H^s(A)$;

4) $H^s = 0$ при $s > 1$.

### Дополнительные упражнения к главе 2

1*. Пусть $\mu$ – конечная мера. Докажите, что для любых счетных наборов $(A_i)$, $(B_i)$ $\mu$-измеримых множеств, для которых $B_i \subset A_i$, справедливы неравенства

$$\mu(\cup_i A_i) - \mu(\cup_i B_i) \le \sum_i (\mu(A_i) - \mu(B_i)),$$

$$\mu(\cap_i A_i) - \mu(\cap_i B_i) \le \sum_i (\mu(A_i) - \mu(B_i)).$$

2. Докажите свойство конечной полуаддитивности внешней меры.

3. Докажите свойства 1 и 2 внешней меры.

4*. Пусть множество $A \subset [a,b]$ измеримо (по Лебегу) и $m(A) = \alpha > 0$. Докажите, что существует такое подмножество $B \subset A$, что $m(B) = \alpha/2$.

5. Докажите, что мера $\mu_H$ из примера 4 §4 есть дискретная мера на $[a, b)$.

6. Доведите до конца рассуждение примера 5 §4.

7*. Докажите, что для конечной конечно-аддитивной меры, определенной на алгебре множеств, свойство непрерывности (сверху или снизу) влечет $\sigma$-аддитивность.

8. Докажите, что если $\mu^*(E) = 0$, то множество $E$ $\mu^*$-измеримо.

9*. Докажите, что для любого $m^*$-измеримого множества $E \subset \mathbb{R}$ найдется такое множество $G$ типа $G_\delta$, что $m(E) = m(G)$ (множество называется множеством типа $G_\delta$, если оно есть пересечение счетного числа открытых).

10*. Докажите, что все открытые и замкнутые множества на прямой являются борелевскими.

11. Докажите, что если для неубывающих функций $F$ и $G$ на прямой выполняется равенство $m_F = m_G$, то $F - G = \mathrm{const}$.

12. Приведите пример множества $E \subset \mathbb{R}$, для которого $m(\partial E) \neq 0$ (здесь $\partial E = \bar{E} \setminus \mathrm{int} E$ — граница множества $E$).

13. Докажите, что любое борелевское подмножество числовой прямой измеримо по Лебегу.

14. Пусть измеримые по Лебегу множества $A, B \subset [0,1]$ таковы, что $m(A) + m(B) > 1$. Докажите, что $A \cap B \neq \emptyset$.

15. Докажите, что для любой монотонно возрастающей функции $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция $m_F$ конечно-аддитивна на полуалгебре стрелок.

16*. Доведите до конца следующее доказательство несчетности отрезка $[0,1]$. Допустим противное: $(0,1) = \{a_1, a_2, \ldots\}$. Выберем положительное $\varepsilon < 1$ и окрестность $I_1 \subset (0,1)$ точки $a_1$ длины $<\varepsilon/2$, затем окрестность $I_2 \subset (0,1)$ точки $a_2$ длины $<\varepsilon/4$, и т. д. и рассмотрим объединение $\cup I_n$.

17. Существуют ли неограниченные подмножества числовой прямой конечной положительной меры Лебега?

18*. Пусть $F(t) = -[-t]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Докажите, что $m_F$ — дискретная мера, определенная на множестве всех подмножеств множества $\mathbb{R}$. Более того,

$$m_F(A) = \begin{cases} |A \cap \mathbb{Z}|, & \text{множество } A \cap \mathbb{Z} \text{ конечно },\\ +\infty, & \text{множество } A \cap \mathbb{Z} \text{ бесконечно}, \end{cases}$$

где прямые скобки обозначают количество элементов.

19. Пусть

$$\mathcal{B} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ или } A' \text{ не более чем счетно }\}.$$

Положим

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & A \text{ не более чем счетно},\\ 0, & A' \text{ не более чем счетно}. \end{cases}$$

Докажите, что $\mathcal{B}$ есть $\sigma$-алгебра, а $\mu$ — $\sigma$-аддитивная мера.

20*. Докажите, что в любом измеримом по Лебегу подмножестве числовой прямой положительной меры найдутся две точки, разность которых рациональна.

21*. Пусть пространство с не сигма-конечной мерой $(X, \mathcal{B}, \mu)$ таково, что $\mu(A) < \infty$ при всех $A \in \mathcal{B}, A \neq X$. Докажите, что существует такое число $c > 0$, что $\mu(A) < c$ при всех $A \in \mathcal{B}, A \neq X$.

22*. Докажите, что для $\mu$-измеримых множеств $A$ и $B$ конечной меры справедливо неравенство

$$\mu(A)^2 + \mu(B)^2 \leq (\mu(A \triangle B) + \sqrt{2}\mu(A \cap B))^2.$$

23*. Докажите, что функция Кантора $\varphi$ удовлетворяет следующему тождеству ($x \in [0, 1]$):

$$\varphi(x) + \varphi(1 - x) = 1.$$

24*. Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ строго возрастает и непрерывна слева. Докажите, что для любого борелевского $B \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$m_F(B) = m(F(B)).$$

25. Докажите, что отображение $\delta \mapsto H^s_\delta(A)$ (см. пример 7 в §4) не возрастает.

## Глава 3 Интеграл Лебега

### 3.1 Измеримые функции

**Упражнение 1**. Докажите, что

1) постоянная функция измерима;

2) непрерывная функция на прямой является борелевской;

3)* функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будет борелевской тогда и только тогда, когда прообраз (при отображении $f$) любого борелевского множества является борелевским множеством.

**Упражнение 2.*** Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ $\mu$-измерима. Докажите, что прообраз $f^{-1}(B)$ борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$ есть $\mu$-измеримое множество.

**Упражнения 3**. 1) Докажите, что частное двух измеримых функций также есть измеримая функция при условии, что знаменатель нигде не обращается в нуль.

2)* Пусть функция $f$ измерима. Докажите, что композиция $D \circ f$, где $D$ — функция Дирихле, тоже измерима.

3)* Пусть функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелевские. Докажите, что композиция $f \circ \varphi$ тоже есть борелевская функция (а потому $m$-измерима).

**Упражнение 4**. Докажите, что производная дифференцируемой на некотором интервале числовой прямой функции измерима по Лебегу на этом интервале.

**Упражнения 5**. Докажите

1) простоту индикатора измеримого множества;

2) равенство $\chi_A \chi_B = \chi_{A\cap B}$;

3) равенство $|\chi_A - \chi_B| = \chi_{A\triangle B}$;

4) импликацию $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \chi_A + \chi_B = \chi_{A\sqcup B}$;

5) импликацию $A \supset B \Rightarrow \chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_B$;

6) импликации $A_n \uparrow A$ ( или $A_n \downarrow A) \Rightarrow \chi_A = \lim_n \chi_{A_n}$.

**Упражнения 6**. Докажите, что

1) простые функции образуют алгебру относительно поточечных операций сложения и умножения функций, а также умножения функции на число;

2) линейная комбинация индикаторов $\sum_{i=1}^n b_i \chi_{B_i}$, где числа $b_i$ попарно различны, а множества $B_i \subset X$ попарно не пересекаются, является простой функцией тогда и только тогда, когда $B_i \in \mathcal{B}$.

2) функция $\max\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ является простой вместе с $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

**Упражнение 7**. Докажите, что построенная в доказательстве теоремы об аппроксимации последовательность $\varphi_n^f$ простых функций сходится к $f$ равномерно, если $f$ ограничена.

**Упражнения 8**. Пусть $\mu$ – полная мера. Докажите следующие утверждения:

1)* если $f = g$ $\mu$-п.в., а функция $f$ измерима, то функция $g$ тоже измерима;

2)* если $f_n \to f\mu$-п.в., а функции $f_n$ измеримы, то функция $f$ тоже измерима.

**Упражнение 9***. Докажите утверждение, обратное теореме Егорова.

**Упражнение 10***. Докажите, что условие конечности меры в следствии 3 является существенным.

### 3.2 Интеграл Лебега

**Упражнение 1**. Докажите, что равенство (2.1) сохраняется и тогда, когда числа $a_i$ в представлении функции $\varphi$ не являются попарно различными.

**Упражнение 2**. Докажите, что в теореме Б. Леви условие монотонности нельзя отбросить.

**Упражнение 3**. Покажите на примере, что в утверждении леммы Фату может иметь место строгое неравенство.

**Упражнение 4***. Пусть мера $\mu$ полна, $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$. Докажите, что любая функция $h : N \to \mathbb{R}$ интегрируема на $N$ и $\int_N h d\mu = 0$.

**Упражнение 5***. Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ справедливо тождество (называемое *трансляционной инвариантностью интеграла*)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y)dm(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dm(x) \ (y \in \mathbb{R}).$$

**Упражнение 6**. Докажите, что интеграл Римана не обладает свойством абсолютности.

**Упражнение 7**. Докажите, что признак сравнения для интеграла Римана неверен.

**Упражнения 8**. 1) Докажите, что любая функция $f : X \to \mathbb{R}$ интегрируема по мере Дирака $\delta_a$ $(a \in X)$ (см. пример 1 в главе 2) и вычислите $\int_X f d\delta_a$.

2)* Пусть $\mu$ — дискретная мера (см. пример 2 в главе 2). Докажите, что для любой функции $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ справедливо равенство

$$\int\limits_X f d\mu = \sum_n f(x_n)p_n.$$

**Упражнения 9**. Докажите, что

1)* если функция $f > 0$ на множестве $E$ положительной меры, то $\int_E f d\mu > 0$;

2)* если $\int_E f d\mu \geq 0$ для любого измеримого множества $E$, то $f \geq 0$ $\mu$-п. в.

**Упражнение 10***. Пусть мера $\mu$ конечна, а множество $X$ есть объединение трех измеримых множеств $A, B, C$, причем каждая точка из $X$ принадлежит ровно двум из них. Докажите, что

$$\mu(A) + \mu(B) + \mu(C) = 2\mu(X).$$

**Упражнение 11**. Покажите, что произведение двух интегрируемых функций может не быть интегрируемой функцией, но произведение измеримой и ограниченной функции на интегрируемую функцию интегрируемо.

### 3.3 Предельный переход под знаком интеграла Лебега

**Упражнение 1.** Сформулируйте и докажите аналог теоремы Б. Леви для невозрастающей последовательности.

**Упражнения 2**. 1) Представьте сумму абсолютно сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в виде $\int\limits_{\mathbb{R}_+} f(x)dm(x)$, где $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$.

2) Пусть функция $f$ непрерывна на $\mathbb{R}_+$, и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$. Найдите

а)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)dx$, б)* $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\sin nx dx$.

3)* Сформулируйте и докажите теорему о непрерывности интеграла Лебега, зависящего от параметра.

4)* Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\infty (1+x/n)^{-n}\sin(x/n)dx$.

### 3. 4. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

**Упражнения 1**. Докажите, что

1)* если у функции существует интеграл Римана, то у нее существует и интеграл Хенстока-Курцвейля и они совпадают;

2)* функция Дирихле $HK$-интегрируема на $[0,1]$.

### 3. 5 Интеграл Стилтьеса

**Упражнения 1**. Докажите, что

1) $V_a^b(f+g)\le V_a^b(f)+V_a^b(g)$;

2) $BV[a,b]$ есть векторное пространство (относительно обычных операций над функциями);

3)* $V_a^b(f)=V_a^d(f)+V_d^b(f)$ $(a<d<b)$ (*аддитивность вариации*).

**Упражнение 2***. Проверьте, что функция $f(x)=\sin(1/x)$, $f(0)=0$ не принадлежит $BV[0,1]$, но *на интервале* $(0,1)$ может быть представлена в виде разности двух возрастающих функций.

**Упражнение 3.** Пусть $F(x)=x^2$. Приведите пример функции, для которой существует интеграл Лебега-Стилтьеса на $[0,1]$ относительно $F$, но не существует интеграл Римана-Стилтьеса на $[0,1]$ относительно $F$.

### 3.6 Замена переменной в интеграле Лебега

**Упражнение 1**. Пусть $\mu$ — мера на множестве $X$, множество $Y$ наделено сигма-алгеброй своих подмножеств, и $g: X\to Y$ — измеримое отображение. Докажите, что функция множества $\mu g^{-1}$ является мерой на $Y$.

### 3.7 Пространства $L^p$

**Упражнение 1.*** Докажите, что $\mathcal{L}^p(X,\mu)\subset\mathcal{L}^1(X,\mu)$, если $1\le p$ и мера $\mu$ конечна.

**Упражнение 2.** Докажите, что ни одно из пространств $L^1(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R})$ не содержится в другом.

**Упражнение 3.** Если $X=\mathbb{N}$, а $\mu$ — считающая мера, пространство $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ обозначается $l_p$. Запишите неравенства Гёльдера и Минковского для этого случая.

**Упражнение 4.** Докажите, что $\mathcal{L}^\infty(X,\mu)$ есть векторное пространство относительно поточечных операций сложения функций и умножения на скаляр.

**Упражнение 5.** Для $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^\infty(X, \mu)$ положим $\rho_\infty(\tilde{f}, \tilde{g}) := \|\tilde{f} - \tilde{g}\|_\infty$. Проверьте аксиомы метрики для $\rho_\infty$.

**Упражнение 6.** Докажите следующий аналог неравенства Гёльдера: если $f \in L^1(X, \mu)$, а $g \in L^\infty(X, \mu)$, то $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

### 3.8 Знакопеременные меры и теорема Радона-Никодима

**Упражнение 1***. Докажите, что $m_\varphi \perp m$, где $\varphi$ — функция Кантора (см. главу 2), $m$ — мера Лебега на $[0, 1]$.

**Упражнение 2**. Для мер $\nu$ и $\mu$ на $X$ докажите, что если $\nu \ll \mu$ и $\nu \perp \mu$, то $\nu = 0$.

**Упражнение 3***. Докажите, что для положительной и отрицательной части заряда $\nu$ на сигма-алгебре $\mathcal{B}$ справедливы равенства

$$1)\ \nu^+(E) = \sup\{\nu(A) : A \subset E, A \in \mathcal{B}\},$$

$$2)\ \nu^-(E) = -\inf\{\nu(A) : A \subset E, A \in \mathcal{B}\}.$$

### 3.9 Теория дифференцирования Лебега

**Упражнения 1**. Докажите следующие свойства абсолютно непрерывных функций:

1) $AC[a, b]$ есть векторное пространство (относительно обычных операций над функциями), содержащее все функции, удовлетворяющие на $[a, b]$ условию Липшица.

2) Абсолютно непрерывная функция равномерно непрерывна.

3)* $AC[a, b] \subset BV[a, b]$.

**Упражнения 2**. 1) Вычислите $M\chi_{(0,h)}$.

2)* Докажите, что $M|f| \notin L^1(\mathbb{R})$, если $f \in L^1(\mathbb{R}),\ f \neq 0$.

**Упражнения 3*** 1) Докажите, что если $f \in L^1(\mathbb{R})$, то $Mf(t) < \infty$ п.в.

2) Докажите, что постоянная в максимальной теореме Харди-Литтлвуда — наилучшая из возможных.

**Упражнение 4**. Вычислите $D_{(0,1)}(x)$.

**Упражнение 5***. Существует ли такое измеримое множество $E$ на прямой, что $m(E \cap [a, b]) = (b - a)/2$ для любого отрезка $[a, b]$?

### 3.10 Произведение мер и теорема Фубини

**Упражнение 1.*** Пусть $X_1 = X_2 = [0, 1],\ \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]},\ \mu_1 = m, \mu_2$ — считающая мера, $f = \chi_D$, где $D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$. Тогда заключение теоремы Фубини неверно. Проверьте.

**Упражнение 2***. Пусть $X_1 = X_2 = \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu_1 = \mu_2$ — считающая мера. Положим $f(m,n) = 1$, если $m = n$, $f(m,n) = -1$, если $m = n+1$, и $f(m,n) = 0$ в остальных случаях. Тогда $f \notin \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2)$, но повторные интегралы существуют и равны. Докажите.

**Упражнение 3**. Докажите, что свертка функций из $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ обладает переместительным, сочетательным и распределительным свойствами.

**Упражнение 4***. Докажите, что функция $(x;y) \mapsto f(y)g(x-y)$ $m_2$-измерима, если $m$-измеримы функции $f, g$ на $\mathbb{R}$.

**Упражнение 5***. Докажите, что для любых $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

### Дополнительные упражнения к главе 3

1. Докажите оставшиеся недоказанными импликации в теореме 1 §1.
2. Докажите следствие 1 теоремы 1 §1.
3. Выразите индикаторы множеств

$$1) A \cap B,\ 2) \cap_i A_i,\ 3) A \cup B,$$

$$4) \cup_i A_i,\ 5) A \setminus B,\ 6) A \triangle B$$

через индикаторы множеств $A, B, A_i$.

4*. Будет ли измерима функция $f : X \to \mathbb{R}$, определенная на пространстве с мерой $X$, если известно, что множества $X(f < a)$ измеримы

а) для любого рационального $a$;

б) для любого целого $a$?

5. Известно, что функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима на каждом конечном интервале. Докажите, что она измерима на $\mathbb{R}$.

6*. О функции $f : X \to \mathbb{R}$ известно, что для любого действительного $c$ множество $X(f = c)$ измеримо. Следует ли отсюда измеримость функции $f$?

7. Докажите, что функция $\varphi = \sum_{n=1}^{4} n^2 \chi_{[0,1+1/n]}$ является простой и, пользуясь определением интеграла от неотрицательных простых функций, вычислите $\int_{\mathbb{R}} \varphi dm$.

8. Докажите первое свойство интеграла от неотрицательных простых функций.

9. Докажите, что все свойства интеграла от вещественнозначных функций, выраженные равенствами, а также неравенствами, содержащими лишь модули, остаются справедливыми и для комплекснозначных функций.

10*. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$. Вычислите $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-n,n]} f dm$.

11*. Приведите пример измеримой по Лебегу функции на прямой, которая не ограничена на любом интервале.

12. Докажите, что теоремы Лебега и Б. Леви не верны для интеграла Римана, так как предельная функция может быть не интегрируема по Риману, хотя все подинтегральные функции интегрируемы.

13*. Пусть $f \in L^1(\mu)$. Докажите, что для любых $\mu$-измеримых множеств $A, B$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{A\cap B} f d\mu \right| \leq \left( \int\limits_{A} |f| d\mu \int\limits_{B} |f| d\mu \right)^{1/2}.$$

14*). Пусть $f$ и $g$ — неотрицательные $\mu$-измеримые функции, $h = \max\{f, g\}$. Докажите, что для любого $c \geq 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{X(h>c)} h d\mu \leq \int\limits_{X(f>c)} f d\mu + \int\limits_{X(g>c)} g d\mu.$$

15*. Пусть $f \in L^1([0,1])$, $\int_{[0,1]} f dm = c$. Докажите, что $\int_{[0,x]} f dm = c/2$ для некоторого $x \in [0,1]$.

16*. Докажите, что интеграл $\int_0^\infty f(x)dx$ с подинтегральной функцией $f = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}\chi_{[n,n+1)}$ существует как условно сходящийся несобственный интеграл Римана, но не существует в смысле Лебега.

17*. Докажите, что функция $f(x) = m(E \cap [0,x])$ непрерывна на $\mathbb{R}$, если множество $E$ измеримо и имеет конечную меру Лебега.

18. Пусть $\nu$ есть некоторый заряд, $f \in \mathcal{L}^1(\nu)$. Докажите, что

$$\left| \int\limits_X f d\nu \right| \leq \int\limits_X |f| d|\nu|.$$

19. Докажите следующие равенства между множествами:

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2),$$

$$(A \times B)' = (A \times B') \sqcup (A' \times B) \sqcup (A' \times B').$$

20*. Покажите на примере, что прямое произведение сигма-алгебр может не быть алгеброй множеств.

21. Дано измеримое множество $E \subset \mathbb{R}^2, m_2(E) = 1$ и число $\lambda \in \mathbb{R}$. Чему равно $m_2(\lambda E)$?

22*. Докажите, что для любых вещественнозначных $\mu$-интегрируемых функций $u$ и $v$ справедливо неравенство

$$\left(\int\limits_X u d\mu\right)^2 + \left(\int\limits_X v d\mu\right)^2 \leq \left(\int\limits_X \sqrt{u^2+v^2} d\mu\right)^2.$$

23. Будет ли функция $\sin(1/x)$ интегрируема по Лебегу на множестве $(0,1)$?

24. Пусть $f(x) = \chi_{[0,1)} - \chi_{[1,2)}$, $u_n(x) = f(x-n+1)$ $(n \geq 1)$, $u_0 = -\chi_{[0,1)}$. Проверьте, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\right) dx \neq \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} u_n(x) dx.$$

25*. Докажите следующее обобщение теоремы Лебега. Пусть $f_n, g_n, f, g \in L^1(\mu)$, причем $|f_n| \leq g_n$ п. в. при всех $n$ и $\int\limits_X g_n d\mu \to \int\limits_X g d\mu$. Тогда $\int\limits_X f_n d\mu \to \int\limits_X f d\mu$.

26*. Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{n\sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^n} dx$.

27*. Пусть $\varphi$ — функция Кантора. Вычислите интеграл $\int\limits_0^1 \varphi(x) dx$.

28*. Вычислите интеграл Лебега-Стилтьеса

$$\int\limits_0^1 x d\varphi(x),$$

где $\varphi$ — функция Кантора.

29*. а) Докажите, что каждая монотонная функция $g$ на прямой является борелевской.

б) Пусть функция $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна, причем $F' > 0$. Докажите, что для любого борелевского $B \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$m(F(B)) = \int\limits_B F'(t) dt.$$

30*. При каких значениях параметра $\alpha$ следующий интеграл существует либо в смысле Лебега, либо как (собственный или несобственный) интеграл Римана:

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}dx?$$

31. Пусть $X = \mathbb{R},\ F = \chi_{(0,+\infty)}$. Докажите, что $F \in L^1(m_F)$, хотя множество точек разрыва функции $F$ имеет положительную $m_F$-меру.

32*. Пусть функция $F$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и имеет непрерывную и суммируемую на интервале $(a,b)$ производную. Докажите, что

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt.$$

33*. При каких $\alpha, \beta > 0$ функция $f(x) = x^{-\alpha}|\log x|^{-\beta}$ принадлежит $L^1[0,1]$?

34*. Выяснить, имеет ли место включение $f \in L^1(E,\mu)$, если:

а) $E = [2,+\infty),\ \mu = m,\ f(x) = \log\cos(\pi/2x)$;

б) $E = (0,1]\times(0,1],\ \mu = m_2,\ f(x,y) = \frac{1}{\sin x \sin y}$;

в) $E = [1,+\infty),\ \mu = m,\ f(x) = \frac{2^{-x}}{[x]}$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа).

35*. Пусть $F$ — возрастающая непрерывная слева на $\mathbb{R}$ функция. Найдите предел последовательности $\int_{[0,1]} x^n dF(x)$ $(n \to \infty)$ (эта последовательность называется *последовательностью моментов функции* $F$).

36*. Пусть $f \in L^1(0,+\infty)$. Докажите, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x+t}dx = o\left(\frac{1}{t}\right)\ (t \to +\infty).$$

37*. Докажите, что

$$\int_0^1 \frac{x^\lambda}{1-x}\log\frac{1}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+n)^2}\ (\lambda > -1).$$

38. Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx,$$

но последовательность $(f_n)_{n\geq 1}$ не сходится равномерно на промежутке $(0,1)$.

39. Пусть $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-x/n}$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^\infty f_n(x)dx \neq \int\limits_0^\infty (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx,$$

но последовательность $(f_n)_{n\geq 1}$ сходится равномерно на промежутке $[0,\infty)$.

40*. Докажите, что функция $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$, $f(0)=0$ дифференцируема в каждой точке из $[0,1]$, но ее производная не интегрируема относительно меры Лебега на $[0,1]$.

41*. Пусть $f\in L^1(\mu)$,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)|\leq n \\ 0, & |f(x)|>n. \end{cases}$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

42*. Пусть $f\in L^1(\mu)$,

$$\overline{f}_n(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)|\leq n \\ n, & |f(x)|>n. \end{cases}$$

Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X \overline{f}_n d\mu = \int\limits_X f d\mu.$$

43*. Пусть $f\in L^1(\mu)$. Докажите, что $\mu(X(|f|\geq n)) = o(1/n)$ $(n\to\infty)$.

44*. Пусть функция $f$ $\mu$-измерима, $E_n = X(n-1\leq f<n)$. Докажите, что $f\in L^1(\mu)$, если и только если сходится ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|n|\mu(E_n)$.

# ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

**Глава 1**

**1.2**

**2**, 3). Расположите элементы объединения в последовательность.

**3**, 1). Можно воспользоваться предыдущим упражнением и индукцией.

**3**, 2). Можно дополнить каждое множество до счетного и применить «основную теорему».

**4**, 2). Выберите в интервале $(a, b)$ счетное множество $\{x_1, x_2, \ldots\}$, биективно отобразите на него множество $\{a, b, x_1, x_2, \ldots\} \subset [a, b]$, а затем продолжите это отображение до биекции $[a, b] \to (a, b)$.

**Дополнительные упражнения к главе 1**

**9**, б). Предположим, что это равенство верно. Полагая в нем $A = X$, получите сюръективность. Если теперь предположить, что $f(a) = f(b)$ при некоторых $a \neq b$, то для получения противоречия можно взять $A = \{a\}$.

**10**. Воспользуйтесь счетностью множества рациональных чисел.

**11**. Воспользуйтесь результатом упражнения 10.

**12**. Проверьте, что для каждой точки $x \in A$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(x)$, что интервал $(x, x + \varepsilon)$ не пересекается с $A$, и выберите в каждом таком интервале по рациональной точке.

**13**. Для каждого натурального $n$ рассмотрите семейство $M_n$ подмножеств множества $X$, содержащих ровно $n$ элементов, и докажите, что оно счетно. Воспользуйтесь основной теоремой теории счетных множеств.

**14**. Для каждого натурального $n$ рассмотрите множество $\{x \in A : x > 1/n\}$.

**15**. Выделите в $B$ счетное подмножество $B_1$ и сначала биективно отобразите $A \cup B_1$ на $B_1$.

**16**. Пусть $f_i : X_i \to X$ — биекция, и пусть $g \in \prod_{i\in I} X_i$. Определим отображение $g' : I \to X$ по правилу $g'(i) = f_i(g(i))$. Тогда $g \mapsto g'$ — искомая биекция.

**17**. С учетом результата предыдущего упражнения достаточно рассмотреть множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Множество $M$, состоящее из последовательностей без «хвоста» девяток, равномощно $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в силу упражнения 15. При этом отображение $f : M \to [0,1], (n_1, n_2, \dots) \mapsto 0, n_1 n_2 \dots$ инъективно.

**18**. Воспользуйтесь упражнением 16, чтобы доказать следствие 1 для двух сомножителей; затем примените индукцию.

**19**. Используйте принцип вложенных отрезков (Кантора!).

## Глава 2

### 2.1

**3**, а). Представьте стрелку как пересечение последовательности интервалов, а интервал как объединение последовательности стрелок.

**3**, б). Воспользуйтесь теоремой о структуре открытого множества на прямой.

**3**, в). Отрезок есть пересечение последовательности стрелок, а стрелка есть объединение последовательности отрезков.

**6**. Включение $\mathcal{B}(\mathcal{E}) \cap A \supset \mathcal{B}(\mathcal{E} \cap A)$ следует из того, что в левой части стоит $\sigma$-алгебра, содержащая $\mathcal{E} \cap A$. Для доказательства противоположного включения докажите, что система множеств

$$\mathcal{D} = \{B \sqcup (C \setminus A) : B \in \mathcal{B}(\mathcal{E} \cap A), C \in \mathcal{B}(\mathcal{E})\}$$

является $\sigma$-алгеброй, содержащей $\mathcal{E}$. Затем рассмотрите $\mathcal{D} \cap A$.

**7**, 1). Система всех не более чем счетных подмножеств прямой является монотонным классом.

### 2. 2

**1**, 1). Воспользуйтесь тем, что существует множество $A$ конечной меры, и равенствами $A = A \sqcup \emptyset$ и $A = A \sqcup \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup \dots$.

**5**, 1). $X_1$ есть объединение конечных множеств $\{x \in X : \mu(\{x\}) > 1/n\}$.

**2. 3**

**1**. Докажите включение $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

**3**. Если $\mu^*(N) = 0$, то для любого $F \subset N$ имеем $\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F') = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F')$ при всех $E \subset X$.

**2.4**

**2**, 1). Представьте одноточечное множество как пересечение убывающей последовательности стрелок.

**4**. Эти равенства очевидны для стрелок, а потому и для элементарных множеств. Следовательно, аналогичные равенства справедливы для внешней меры.

**5**. Дуги окружности, длина которых меньше $\pi$, образуют полуалгебру, если к ним присоединить пустую дугу и всю окружность.

**6**. Рассмотрите множества $(-\infty, x)$ и воспользуйтесь непрерывностью функции распределения меры $\mu$ (задача 2).

**7**, 1). Докажите, что $H^0(\{a\}) = 1$.

**7**, 2), 3). $A \subset \cup I_j$ тогда и только тогда, когда $x + A \subset \cup(x + I_j)$, а также тогда и только тогда, когда $\lambda A \subset \cup(\lambda I_j)$.

**7**, 4). Для любого $\delta > 0$ найдется такое покрытие $(I_j)$ множества $A$, что $\sum_j m(I_j) \leq H^s_\delta(A) + 1$. Тогда

$$\sum_j m(I_j)^s \leq \delta^{s-1} \sum_j m(I_j) \leq \delta^{s-1}(H^s_\delta(A) + 1).$$

**Дополнительные упражнения к главе 2**

**1**. Воспользуйтесь задачей 4 из дополнительных упражнений к главе 1.

**4**. Рассмотрите множества $A(x) = A \cap [a, x]$.

**7**.В случае непрерывности снизу, если $A = \sqcup_{k=1}^\infty A_k$, рассмотрите множества $E_n = \sqcup_{k=1}^n A_k$; в случае непрерывности сверху выведите из нее непрерывность снизу.

**9**. Воспользуйтесь внешней регулярностью меры Лебега $m$.

**10**. Воспользуйтесь теоремой о структуре открытого множества на прямой.

**16**. Воспользуйтесь свойством $\sigma$-полуаддитивности меры.

**18**. Докажите, что $m_F(\{n\}) = 1$, $m_F((n, n+1)) = 0$ при $n \in \mathbb{Z}$.

**20**. Сведите к случаю, когда $A$ — ограниченное множество положительной меры, и рассмотрите множество $\cup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}(A + r)$.

**21**. Рассуждайте от противного. Если $\mu(A_n) > n, A_n \neq X$, то рассмотрите множество $A = \cup_n A_n$.

**22**. Выразите все фигурирующие в неравенстве величины через числа $a = \mu(A \setminus B), b = \mu(B \setminus A), c = \mu(A \cap B)$.

**23**. Рассмотрим сначала случай, когда $x \in C$. Тогда $x$ имеет троичное разложение $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$, где $a_j \in \{0, 2\}$. При этом по определению $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(a_j/2)2^{-j}$. Так как $1 - x = \sum_{j=1}^{\infty}(2 - a_j)3^{-j}$, то $\varphi(1 - x) = \sum_{j=1}^{\infty}((2 - a_j)/2)2^{-j} = 1 - \varphi(x)$. Если же $x \notin C$, то $x$ принадлежит некоторому смежному интервалу с концом $t \in C$. Тогда $1 - x$ принадлежит смежному интервалу с концом $1 - t$, и по доказанному $\varphi(x) + \varphi(1 - x) = \varphi(t) + \varphi(1 - t) = 1$.

**24**. С учетом леммы 1 из §1 получаем

$$F(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = F(\mathcal{B}(\mathcal{I})) = \mathcal{B}(F(\mathcal{I})) = \mathcal{B}(\mathcal{I}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

Теперь легко проверить, что обе части доказываемого равенства есть борелевские меры, совпадающие на полуалгебре стрелок $\mathcal{I}$.

## Глава 3

### 3. 1

**1**, 3). Воспользуйтесь леммой о прообразе $\sigma$-алгебры из главы 2.

**2**. См. указание к предыдущему упражнению.

**3**, 2). Докажите сначала равенство $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

**3**, 3). По одному из предыдущих упражнений прообраз $f^{-1}(B)$ борелевского множества $B$ на прямой есть борелевское множество.

**8**, 1). Множества $X(f < c), X(g < c)$ отличаются друг от друга на некоторые подмножества множества $X(f \neq g)$.

**8**, 2). Если $N = X(f_n \nrightarrow f)$, то функция $f$ измерима на множестве $X \setminus N$.

**9**. Используя пересечения, последовательность $E_{1/n}$ можно выбрать убывающей, а затем положить $E = \cap E_{1/n}$. Тогда $f_n \to f$ на множестве $E'$.

**10**. Рассмотрите последовательность индикаторов $\chi_{[n,\infty)}$.

### 3.2

**2**. Рассмотрите пример последовательности $\chi_{[n,n+1]}$.

**4**. Рассмотрите три случая, соответствующие трем этапам определения интеграла.

**5**. Воспользуйтесь трансляционной инвариантностью меры Лебега и указанием к предыдущему упражнению.

**8**, 2). Для неотрицательной функции $f$ рассмотрите функцию $g = \sum_n f(x_n)\chi_{\{x_n\}}$. Тогда $f = g$ $\mu$-п. в.

**9**, 1). Рассуждайте от противного и примените следствие 1 неравенства Чебышева.

**9**, 2). Воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения.

**10**. $\chi_A + \chi_B + \chi_C = 2$.

**3. 3**

**2**, 2 а). Примените теорему Лебега.

**2**, 2 б). $f(nx) = (f(nx) - a) + a$; примените теорему Лебега.

**2**, 3). Пусть $(X, \mu)$ — пространство с мерой, $U$ — область в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а $f(t, x)$ — функция на $U \times X$, суммируемая при каждом фиксированном $t \in U$ и непрерывная при каждом фиксированном $x \in X$. Если для некоторой функции $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ при всех $t \in U, x \in X$ выполняется неравенство $|f(t, x)| \leq g(x)$, то функция $F(t) = \int_X f(t, x) d\mu(x)$ непрерывна на $U$.

**2**, 4). Используя производную, докажите, что $(1 + x/n)^{-n} e^x \leq 1$.

**3.4**

**1**, 1). Рассмотрите постоянные калибровочные функции.

**1**, 2). Пусть $\{r_n\}$ есть последовательность всех рациональных чисел из $[0, 1]$. Для любого $\varepsilon > 0$ возьмите $\delta_\varepsilon(x) = 1$, если $x$ иррационально, и $\delta_\varepsilon(r_n) = \varepsilon/2^{n+1}$.

**2**. Рассмотрите функции вида $x^\alpha$ на $(0, 1)$.

**3. 5**

**1**, 3). См. [1].

**2**. $f(x) = (-2/x) - (-2/x - \sin(1/x))$.

**3**. Рассмотрите функцию Дирихле.

**3.7**

**1**. Воспользуйтесь неравенством Гёльдера.

**3.8**

**1**. $m_\varphi([0, 1] \setminus C) = 0$ (рассмотрите меры смежных интервалов).

**3**. Для любого $A \subset E, A \in \mathcal{B}$ верно неравенство $\nu(A) \leq \nu^+(A) \leq \nu^+(E)$. С другой стороны,

$$\sup\{\nu(A) : A \subset E, A \in \mathcal{B}\} \geq \nu(E \cap X^+) = \nu^+(E).$$

**3.9**

**1**, 3). Разбейте отрезок $[a, b]$ на $N$ частей длины $< \delta$ и воспользуйтесь аддитивностью вариации.

**2**, 2). Докажите, что для больших $x$

$$M|f|(x) \geq \frac{1}{4x}\int\limits_{-x}^{3x} |f(t)|dt \geq \frac{c}{x}.$$

**3**. 1) Примените максимальную теорему Харди-Литтлвуда.

2) Рассмотрите функцию $f = h^{-1}\chi_{(0,h)},\ h \to 0$.

**5**. Примените теорему Лебега о точках плотности.

**3.10**

**1**. Справедливо ли следствие 1 теоремы Фубини для множества $D$?

**2**. Интеграл по считающей мере — это сумма ряда (см. §2, упражнение 8, 2).

**4**. Достаточно доказать, что функция $(x;y) \mapsto g(x-y)$ $m_2$-измерима. Пусть $s(x,y) = x-y$. Для любого $m$-измеримого $E \subset \mathbb{R}$ множество $s^{-1}(E)$ $m_2$-измеримо, поскольку $s^{-1}(E)$ есть полоса, которая после поворота на угол $\pi/4$ вокруг начала координат переходит в полосу $(1/\sqrt{2})E \times \mathbb{R}$. Осталось заметить, что множество $(g \circ s)^{-1}(-\infty, c)$ имеет вид $s^{-1}(E)$, где $E$ $m$-измеримо.

**5**. Воспользуйтесь теоремой Фубини и трансляционной инвариантностью интеграла по мере Лебега.

**Дополнительные упражнения к главе 3**

**4**, а) Будет. Заметьте, что $X(f < c) = \cup_{a<c, a\in\mathbb{Q}} X(f < a)$.

б) Не обязательно. Рассмотрите функцию $(1/3)\chi_A + (2/3)\chi_B$, где множества $A$ и $B$ не измеримы по Лебегу и $A \sqcup B = [0,1]$.

**6**. Ответ: не следует. Рассмотрите, например, функцию $f(x) = x + \chi_V(x)$, где $V$ — не измеримое по Лебегу подмножество отрезка $[0,1]$.

**10**. Ответ: 0. Примените теорему Лебега к последовательности интегралов $\int_{\mathbb{R}} f\chi_{[-n,n]}dm$.

**11**. Пусть $\mathbb{Q} = \{q_n : n = 1, 2\ldots\}$. Рассмотрите функцию $f$, задаваемую равенствами $f(q_n) = n,\ f|(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 0$.

**13**. Сравните $\int_{A\cap B} |f|d\mu$ с каждым из интегралов в правой части.

**14**. Рассмотрите множества $X_1 = \{x : h(x) > c, f(x) \geq g(x)\}$, $X_2 = \{x : h(x) > c, f(x) < g(x)\}$ и воспользуйтесь тем, что $X(h > c) = X_1 \sqcup X_2$.

**15**. Воспользуйтесь теоремой о промежуточном значении.

**16**. Заметьте, что $|f| = \sum_n \frac{1}{n+1}\chi_{[n,n+1)} \notin L^1(\mathbb{R})$.

**17**. Заметьте, что $f(x) = \int_{[0,x]} \chi_E dm$.

**20**.Рассмотрите сигма-алгебру измеримых по Лебегу подмножеств числовой прямой.

**22**. Рассмотрите неравенство $\left|\int_X f d\mu\right| \le \int_X |f| d\mu$, где $f = u + iv$.

**25**. Воспользуйтесь методом доказательства теоремы Лебега о мажорированной сходимости.

**26**. а) Воспользуйтесь теоремой Лебега и неравенством $|\sin x| \le |x|$.

б) Воспользуйтесь теоремой Лебега и неравенством Я. Бернулли $(1 + a)^n \ge 1 + na$ $(a > -1)$.

**27**. Ответ: $1/2$. Воспользуйтесь соотношением из дополнительного упражнения 23 к главе 2.

**28**. Примените формулу интегрирования по частям и предыдущую задачу.

**29**. а) Воспользуйтесь равенством $g^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{I})) = \mathcal{B}(g^{-1}(\mathcal{I}))$.

б) Множество $F(B)$ является борелевским в силу а). Заметьте, что обе части доказываемого равенства, рассматриваемые как функции от $B$, являются мерами, совпадающими на полуалгебре стрелок.

**30**. Ответ: интеграл существует как собственный интеграл Римана при $\alpha \le 0$, как интеграл Лебега — при $\alpha < 1$, как несобственный интеграл Римана — при $1 \le \alpha < 2$.

С помощью замены $x = 1/t$ сведите вопрос к исследованию сходимости интегралов

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^{2-\alpha}} dt \text{ и } \int_1^\infty \frac{|\sin t|}{t^{2-\alpha}} dt.$$

Используя признак Дирихле, покажите, что первый из них сходится в точности при $\alpha < 2$. Второй интеграл сходится в точности при $\alpha < 1$.

**32**. По классической формуле Ньютона-Лейбница

$$F(b - 1/n) - F(a + 1/n) = \int_{a+1/n}^{b-1/n} F'(t) dt.$$

Перейдите в этом равенстве к пределу, применив в правой части свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

**33**. Ответ: при $\alpha < 1$ и любом $\beta > 0$ и при $\alpha = 1$ и $\beta > 1$.

**34**. а) Да. Воспользуйтесь непрерывностью функции $f$ на $E$ и тем, что $\log\cos(\pi/2x) \sim \pi^2/8x^2$ $(x \to +\infty)$.

б) Нет. Поскольку $f(x, y) > 1/xy > 2/(x^2 + y^2)$, то $\int_E f dm_2 \ge 2\int_E \frac{dxdy}{x^2+y^2}$.

в) Да. По свойству счетной аддитивности интеграла Лебега

$$\int_E f\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} \frac{2^{-x}}{n}dx.$$

**35**. Ответ: $F(1+0) - F(1)$. Заметьте, что

$$\int_{[0,1]} x^n dF(x) = \int_{[0,1)} x^n dF(x) + m_F(\{1\})$$

и примените теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

**36**. Рассмотрите $\int_0^{+\infty} \frac{tf(x)}{x+t}dx$ и примените теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

**37**. Заметьте, что

$$\frac{x^\lambda}{1-x}\log\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\lambda+n}\log\frac{1}{x},$$

и примените теорему о почленном интегрировании ряда.

**40**. Заметьте, что $f'(x) = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$ $(x \to 0)$.

**41**. Заметьте, что $f_n \to f$ мажорированно, и примените теорему Лебега.

**42**. См. указание к предыдущему упражнению.

**43.** Заметьте, что в обозначениях упражнений 41 и 42 справедливо равенство $\overline{f}_n(x) = f_n(x) + n\mu(X(|f| \geq n))$, и примените результаты упомянутых упражнений.

**44**. Необходимость следует из неравенства

$$\int\limits_X |f|d\mu = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_{E_n} |f|d\mu \geq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \min\{|n|, |n-1|\}\mu(E_n) \geq \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\mu(E_n).$$

Для доказательства достаточности заметьте, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_X |f|\chi_{E_n}d\mu \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \max\{|n|, |n-1|\}\mu(E_n) \leq 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|\mu(E_n),$$

и примените к ряду $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |f|\chi_{E_n} = |f|$ теорему Лебега о почленном интегрировании.

# ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЭКЗАМЕНУ ПО РАЗДЕЛАМ «МЕРА» И «ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА»

1. Системы множеств (полуалгебра, алгебра, $\sigma$-алгебра). Примеры.

2. Теорема об алгебре, порожденной полуалгеброй.

3. Определение и примеры мер.

4. Свойства мер.

5. Определение и свойства внешней меры.

6. Лебеговское продолжение меры. Измеримые множества. Теоремы о продолжении.

7. Меры Лебега-Стилтьеса и их $\sigma$-аддитивность. Мера Лебега на прямой.

8. Измеримые функции и их свойства.

9. Простые функции и их свойства.

10. Аппроксимация измеримых функций простыми.

11. Интеграл Лебега от простой функции и его свойства.

12. Интеграл Лебега от неотрицательной функции и его свойства.

13. Интеграл Лебега от знакопеременной измеримой функции и его свойства.

14. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (теоремы Лебега и Б. Леви, лемма Фату).

15. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана и несобственным интегралом.

16. Интеграл Лебега-Стилтьеса.

17. Пространства $L^p$, неравенства Гёльдера и Минковского.

18. Знакопеременные меры. Теорема Радона-Никодима.

19. Абсолютно непрерывные функции. Формула Ньютона-Лейбница для интеграла по мере Лебега.

20. Прямое произведение мер. Теорема Фубини-Тонелли.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Учебник . – Мн. : Изд-во БГУ, 2003.

2. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной . – М. : Наука, 1973.

3. Горин, Е. А. Введение в теорию множеств и теорию меры. – М. : Изд-во МПГУ, 2005.

4. Дынкин Е. Б. Лекции по теории интегрирования. – М. : Изд-во МГУ, 1964.

5. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1 – М. : Наука, 1981.

6. Кириллов А.А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979.

7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализ. – М. : Наука, 1972.

8. Лузин, Н. Н. Теория функций действительного переменного / Н. Н. Лузин. – М. : Учпедгиз, 1948. – 318 с.

9. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. – М. : Наука, 1974.

10. Партасарати К. Введение в теорию вероятностей и теорию меры. – М. : Мир, 1977.

11. Теляковский С. А. Сборник задач по теории функций действительного переменного. – М. : Наука, 1980.

12. Толстов Г. П. Мера и интеграл. – М. : Наука, 1976.

13. Ульянов П. Л. и др. Действительный анализ в задачах. – М. : Физматлит, 2005.

14. Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лаб. практикум: Учебное пособие / А. Б. Антоневич, Е. И. Ваткина, М. Х. Мазель и др.; Под ред. А. Б. Антоневича и Я. В. Радыно. – Мн. : БГУ, 2003.

15. Хампош П. Теория меры. – М. : Физматгиз, 1953.

16. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. Общая теория. – М. : Наука, 1967.

17. Флоринская, Л. В., Хавин В. П. Теория меры и интеграла. Выпуск 2. Интеграл. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.

18. Folland G. B. Real Analysis: Modern Technics and Their Applications. – NY. : John Willey&Sons, 1984.

# Предметный указатель

# Оглавление