

**Задания к коллоквиуму № 2 по математическому анализу
(06.11.2007)**

Теоретический материал.

1. Определение предела функции: предел функции по Коши, на языке окрестностей, предел по Гейне.
2. Общие свойства предела функции. Предел и арифметические операции.
3. Предел функции и неравенства. Предел сложной функции.
4. Критерий Коши существования предела.
5. Предел монотонной функции.
6. Два замечательных предела.
7. Односторонние пределы.
8. Определение предела по базе.
9. Определение непрерывности функции. Локальные свойства непрерывных функций.
10. Теоремы Вейерштрасса о свойствах непрерывных функций на отрезке.
11. Теоремы Больцано-Коши о промежуточных значениях.
12. Равномерная непрерывность и теорема Кантора.

Практические задания.

1. По определению доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна в точке $x = 1$.

2. Используя определение предела по Коши доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$$

3. Доказать предыдущее равенство, используя определение предела на языке окрестностей.
4. Вычислить пределы:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x.$$

5. Исследовать на непрерывность функции $f \circ g$ и $g \circ f$, если
а) $f(x) = \text{sign}(x)$, $g(x) = 1 + x^2$; б) $f(x) = \text{sign}(x)$, $g(x) = x(1 - x^2)$.
6. Всегда ли квадрат разрывной функции будет функцией разрывной?
7. Является ли непрерывной функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$?
8. Является ли функция $\sin x$ равномерно непрерывной на интервале $(0,1)$?
9. Может ли непрерывная функция, заданная на интервале, быть неограниченной на этом интервале?
10. Нарисовать график и исследовать на непрерывность функцию
 $f(x) = \text{sign}(\sin x)$.