

Задания к коллоквиуму № 1 по математическому анализу
(12.10.2007)

Теоретический материал.

1. Операции над множествами.
2. Свойства операций над множествами.
3. Примеры простейших тавтологий.
4. Определение функции, отображения. Примеры отображений: сюръекция, инъекция, биекция.
5. Определение точной нижней грани точной верхней грани.
6. Теорема Дедекинда о существовании точной верхней грани.
7. Свойства модуля.
8. Определение предела последовательности.
9. Общие свойства предела последовательности. Предел и арифметические операции.
10. Предельный переход в неравенствах. Теорема о двух милиционерах.
11. Теорема Кантора о вложенных отрезках.
12. Теорема Бореля-Лебега о покрытии отрезка интервалами.
13. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки у бесконечного ограниченного множества.

Практические задания.

1. Доказать, что:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B, 2) \overline{X \cup Y} = X^c \cap Y^c.$$

2. Доказать закон контрапозиции:

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}.$$

3. Привести примеры инъективного, биективного, сюръективного отображений.
4. Найти точную верхнюю грань множеств:

а) $(0,1)$, б) $N \cap \mathbb{R}$, в) $\left\{1 + \frac{1}{n} : n \in N\right\}$.

5. Доказать, что $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

6. По определению доказать, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

7. Найти предельные точки множеств:

1) $\left\{\frac{1}{n} : n \in N\right\}$, 2) $(0,1)$, 3) N , 4) \emptyset .

8. Из покрытия отрезка $(0,1) = \bigcup_{n \in N} \left(-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$ выделить конечное подпокрытие.

9. Найти все общие точки следующей системы вложенных

отрезков: $\left[-\frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right]$. Чем объяснить, что таких точек больше единицы?

