СОДЕРЖАНИЕ

1 ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Лекция 1 Многочлен Лагранжа

1 Постановка задачи интерполирования.
2 Примеры интерполяционных функций.
3 Интерполяционная формула Лагранжа.

В экономике, физике представление результатов в большинстве случаев задается в виде табличной зависимости, что не всегда удобно для всестороннего анализа. Поэтому возникает задача о получении аналитической зависимости по табличному представлению функции или задач о приближении функции, или задача интерполировании.

1 Постановка задачи интерполирования

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ некоторую m – кратно дифференцируемую функцию $f(x)$. Пусть в k_0 точках $x_{01}, x_{02},..., x_{0k_0}$ известны ее значения $f(x_{01}), f(x_{02}),..., f(x_{0k_0})$, в k_1 точках $x_{11}, x_{12},..., x_{1k_1}$ известны значения первой производной $f'(x_{11}), f'(x_{12}),..., f'(x_{1k_1})$, и в k_m точках известны значения m-ой производной $f^{(m)}(x_{m1}), f^{(m)}(x_{m2}),..., f^{(m)}(x_{mk_m})$. Значения функции и ее производных называются **данными** интерполирования, а точки x_{ij} – **узлами** интерполирования.

Задача интерполирования заключается в отыскании функции $\varphi(x)$ из некоторого класса Φ такой, что выполняется условие

$$\varphi^{(i)}(x_{ij}) = f^{(i)}(x_{ij}), \quad i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,k_i}. \tag{1.1}$$

Пусть $n = k_0 + k_1 ... + k_m$. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ последовательность линейно независимых m – кратно дифференцируемых функций:

$$\omega_1(x), \omega_2(x),..., \omega_n(x).$$

В качестве семейства Φ возьмем всевозможные линейные комбинации первых n функций с произвольными коэффициентами:

$$\varphi(x) = a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + ... + a_n\omega_n(x).$$

Из условия (1.1) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_i:

$$a_1\omega_1^{(i)}(x_{ij})+a_2\omega_2^{(i)}(x_{ij})+\ldots+a_n\omega_n^{(i)}(x_{ij})=f^{(i)}(x_{ij}). \qquad (1.2)$$

Система (1.2) будет иметь единственное решение в том случае, если ее определитель отличен от нуля.

2 Примеры интерполяционных функций

1 Рассмотрим систему линейно независимых функций $1,x,x^2,x^3,\ldots,x^n,\ldots$. Тогда семейством Φ является совокупность алгебраических многочленов

$$P_{n-1}(x)=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}. \qquad (1.3)$$

Интерполирование полиномами вида (1.3) называется **алгебраическим**.

2 Для интерполирования периодических функций с периодом 2π удобно использовать систему тригонометрических функций $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots$. Линейная комбинация первых $2n+1$ функций является тригонометрическим многочленом степени n:

$$\varphi_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \qquad (1.4)$$

Интерполирование с помощью полиномов (1.4) называется **тригонометрическим**.

Пусть для функции $f(x)$ построена интерполирующая функция $\varphi(x)$. Тогда, если определяется значение $f(x)$ в точке $\overline{x}$, лежащей внутри минимального отрезка, содержащего узлы интерполирования, то такое восстановление функции называется **интерполяцией**. Если $\overline{x}$ лежит вне минимального отрезка, содержащего узлы интерполирования, то такое восстановление функции называется **экстраполяцией**.

3 Интерполяционная формула Лагранжа

Построим формулу для произвольного расположения узлов интерполирования. Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы $n+1$ значений $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$, в которых известны значения некоторой функции $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2),\ldots$, $y_{n-1}=f(x_{n-1})$, $y_n=f(x_n)$. Построим полином $L_n(x)$, для которого выполняются равенства

$$L_n(x_i)=f(x_i), \quad i=\overline{0,n}. \qquad (1.5)$$

Решим сначала вспомогательную задачу и построим полином $P_{ni}(x)$ степени n, удовлетворяющий условию

$$P_{ni}(x_j)=\begin{cases}0, & при\ i\ne j\\ 1, & при\ i=j\end{cases}. \qquad (1.6)$$

Из условия (1.6) следует, что полином $P_{ni}(x)$ имеет n корней в узлах $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$. Следовательно, он может быть записан в виде

$$P_{ni}(x)=k_i(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_n).$$

Так как $P_{ni}(x_i)=1$, то для k_i получим выражение

$$k_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i - x_n)}. \qquad (1.7)$$

Очевидно, что тогда полином $L_n(x)$ можно записать в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_{ni}(x) y_i = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i - x_n)}. \qquad (1.8)$$

Формула (1.8) называется **интерполяционной формулой Лагранжа**.

Обычно формулу Лагранжа записывают в другом виде. Рассмотрим полином $\omega(x)$ степени $n+1$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_n).$$

Для первой производной справедливо выражение

$$\omega'(x) = \sum_{j=0}^{n} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i).$$

С учетом введенных обозначений полином **Лагранжа** можно записать в виде

$$L_n(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\omega'(x_i)}. \qquad (1.9)$$

Пример

Построить полином Лагранжа для функции заданной таблично:

I	0	1	2	3
X	1	2	3	5
Y	1	5	14	81

Из таблицы видно, что полином Лагранжа третьей, так как n=3.

$$L_3(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} + 14\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)}$$
$$+81\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-3)(5-2)} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$$

Проверка: $x = x_0 = 1$, $L_3(1) = 1^3 - 2*1^2 + 3*1 - 1 = 1$, $f(x_0) = L_3(1) = 1$.

3.1 Единственность интерполяционного полинома Лагранжа

Доказательство проведем от противного. Пусть $\tilde{L}_n(x)$ – полином, отличный от $L_n(x)$, степени не выше n и такой, что $\tilde{L}_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$.

Тогда полином $Q_n(x) = \tilde{L}_n(x) - L_n(x)$, степень которого, очевидно, не выше n, обращается в нуль в $n+1$ точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, то есть $Q_n(x) \equiv 0$.

Следовательно, $\tilde{L}_n(x) \equiv L_n(x)$ на множестве из $n+1$ точки можно построить полином степени не выше n и притом единственный.

3.2 Оценка погрешности формулы Лагранжа

Проводя интерполирование по формуле (1.9) или (1.8), мы допускаем некоторую погрешность

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x),$$

которая является нулевой в общем случае только в узлах интерполирования. Будем считать, что на отрезке интерполирования $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет все производные вплоть до $n+1$ порядка включительно. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi(x) = f(x) - L_n(x) - k\omega(x). \tag{1.10}$$

Очевидно, что $\Psi(x)$ имеет $n+1$ корней в узлах $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$. Выберем произвольную точку $\overline{x} \in [a,b]$ и подберем постоянную k так, чтобы выполнялось равенство

$$\Psi(\overline{x}) = f(\overline{x}) - L_n(\overline{x}) - k\omega(\overline{x}) = 0.$$

Отсюда

$$k = \frac{f(\overline{x}) - L_n(\overline{x})}{\omega(\overline{x})}. \tag{1.11}$$

При таком выборе k $\omega(x)$ имеет $n+2$ корня на $[a,b]$ и обращается в 0 на концах отрезков $[x_0, x_1],[x_1, x_2],...,[x_i, \overline{x}],[\overline{x}, x_{i+1}],....,[x_{n-1}, x_n]$. Следовательно, по теореме Роля $\omega'(x)$ имеет $n+1$ корень на отрезке $[a,b]$, $\omega''(x)$ имеет n корней, и – $\omega^{(n+1)}(x)$ имеет по крайней мере один корень на отрезке $[a,b]$ в некоторой точке ξ. То есть

$$\omega^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0.$$

Подставляя k из последнего выражения в (1.11), получим выражение для погрешности интерполирования

$$R_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(\overline{x}), \tag{1.12}$$

где точка $\xi \in [a,b]$. Этой формулой можно воспользоваться, если функция $f(x)$ задана аналитически. В случае если функция $f(x)$ задана таблично на системе равностоящих точек $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0,n},\ h = const$, то при достаточно малом шаге h, производную $f^{(n+1)}(\xi)$ можно приближенно заменить конечно-разностным отношением

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}},$$

где $y_0 = f(x_0)$, $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta^n(\Delta^m y) = \Delta^{n+m} y$ – конечные разности. Тогда остаточный член примет вид

$$R_n(\overline{x}) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!\, h^{n+1}}\omega(\overline{x}). \tag{1.13}$$

Если известна постоянная $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]}\left| f^{(n+1)}(x)\right|$, то для погрешности интерполирования по формуле Лагранжа можно воспользоваться оценкой

$$R_n(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega(x)\right|. \tag{1.14}$$

Имеется и более точная формула для определения погрешности

$$|R_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \tag{1.15}$$

3.3 Оценка погрешности. Пример

Пример. Оценить, с какой погрешностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 100.5$, если известны значения $\ln 100,\ \ln 101,\ \ln 102,\ \ln 103$.

В данном случае

$$f(x) = \ln x,\ \ n = 3,\ \ a = 100,\ \ b = 103,\ \ f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Вычислим значения величин, входящих в формулы (1.12), (1.14) и (1.15).

$$\max_{x\in[a,b]}\left| f^{(4)}(x)\right| = \frac{6}{100^4},\quad \omega(100.5) = 0.5\cdot 0.5\cdot 1.5\cdot 2.5 = \frac{15}{16}.$$

По формуле (1.14) будем иметь

$$\left|R_n(x)\right| = |\ln 100.5 - L_3(100.5)| \le \frac{6\cdot 15}{100^4\cdot 4!\cdot 16} = 2.344\cdot 10^{-9}.$$

По формуле (1.15) результат будет следующий

$$\left|R_n(x)\right| = |\ln 100.5 - L_3(100.5)| \le \frac{6\cdot 3^4}{100^4\cdot 4!\cdot 2^7} = 1.582\cdot 10^{-9}.$$

Из сравнения полученных результатов видно, что формула (1.15) дает более точное значение по отношению к формулам (1.12), (1.14).

Лекция 2 Интерполяционная формула Ньютона

1 Конечные разности и их свойства.
2 Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов.
3 Интерполяционные формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов.

1 Конечные разности и их свойства

Пусть $\Delta x = h$ некоторое фиксированное приращение аргумента функции $y = f(x)$. **Величина** $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ называется **первой конечной разностью** функции $y = f(x)$ в точке x. Конечной разностью порядка k называется конечная разность первого порядка от конечной разности $k-1$ порядка. Так, например, конечную разность второго порядка можно записать

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = \Delta(f(x+\Delta x) + f(x)) = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x).$$

Если $y = P_n(x)$, то его первая конечная разность имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\Delta y = P_n(x+\Delta x) - P_n(x) = \\
&= a_0(x+\Delta x)^n + a_1(x+\Delta x)^{n-1} + \ldots + a_n - a_0 x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_n = P_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

и, следовательно, являются полиномом порядка $n-1$. Можно показать, что

$$\Delta^n P_n(x) = n!a_0 h^n = const \text{ и } \Delta^{n+1} P_n(x) \equiv 0 .$$

Из определения конечных разностей вытекают следующие свойства:

1) $\Delta(u+v) = \Delta u + \Delta v$,
2) $\Delta(cu) = c\Delta u$,
3) $\Delta^m(\Delta^n u) = \Delta^{m+n} u$.

Докажем, например, свойство 3): $\Delta^m(\Delta^n u) = \Delta(\Delta^{m-1}(\Delta u)) = \ldots = \Delta(\Delta^{m+n-1} u) = \Delta^{m+n} u$.

Конечные разности обычно располагают в таблице.

Таблица 1.1 Конечные разности

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
x_0	f_0						
		Δf_0					
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$				
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$			
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$		
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^5 f_0$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$		$\Delta^6 f_0$
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^5 f_1$	
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3$		$\Delta^4 f_2$		
		Δf_4		$\Delta^3 f_3$			
x_5	f_5		$\Delta^2 f_4$				
		Δf_5					
x_6	f_6						

Лемма 1.1 Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка n на отрезке $[x, x+n\Delta x]$. Тогда справедлива формула

$$\Delta^n f(x) = (\Delta x)^n f^{(n)}(x+\theta n\Delta x), \quad 0<\theta<1 .$$

Доказательство проведем по индукции. При $n=1$ получим формулу конечных приращений Лагранжа $\Delta f(x) = \Delta x f^{(1)}(x+\theta\Delta x)$. Пусть наше утверждение справедливо при $n=k$: $\Delta^k f(x) = (\Delta x)^k f^{(k)}(x+\theta k\Delta x)$. Тогда для $n=k+1$, получим

$$
\begin{aligned}
&\Delta^{k+1} f(x) = \Delta(\Delta^k f(x)) = \Delta((\Delta x)^k f^{(k)}(x+\theta k\Delta x)) = (\Delta x)^k \Delta f^{(k)}(x+\theta k\Delta x) = \\
&= (\Delta x)^{k+1} f^{(k+1)}(x+\theta k\Delta x+\theta_1\Delta x) = (\Delta x)^{k+1} f^{(k+1)}(x+\theta_2 (k+1)\Delta x), \quad \theta_2 = \frac{\theta k+\theta_1}{k+1} \cdot
\end{aligned}
$$

Лемма доказана.

Предполагая, что $f^{(n)}(x)$ непрерывна на отрезке $[x, x+n\Delta x]$ и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}, \quad f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}.$$

2 Интерполяционные формулы Ньютона для равноотстоящих узлов

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы $n+1$ значений $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$, в которых известны значения некоторой функции $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_{n-1} = f(x_{n-1})$, $y_n = f(x_n)$. Требуется найти полином $P_n(x)$ степени не выше n, такой, чтобы выполнялось условие

$$f(x_i) = P_n(x_i), \quad i = \overline{0,n}. \tag{2.1}$$

Теорема 1.1 Существует и при том единственный многочлен степени не выше n, для которого выполняется условие (2.1).

Доказательство. Пусть многочлен $P_n(x)$ имеет вид:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n.$$

Используя формулы (2.1), для определения коэффициентов a_i, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + ... + a_{n-1} x_0 + a_n = f(x_0) \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + ... + a_{n-1} x_1 + a_n = f(x_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + ... + a_{n-1} x_i + a_n = f(x_i) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + ... + a_{n-1} x_n + a_n = f(x_n) \end{cases}. \tag{2.2}$$

Определителем системы (2.2) является определитель Вандермонда. Он имеет вид

$$D = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0.$$

Следовательно, для системы различных между собой узлов система (2.2) имеет единственное решение. Теорема доказана.

Очевидно, что условие (2.1) эквивалентно условию

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0, \quad m = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

Будем искать интерполяционный полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot ... \cdot(x - x_{n-1}). \tag{2.4}$$

Из (2.4) при $x = x_0$ сразу получим $P_n(x_0) = y_0 = a_0$. Найдем первую конечную разность

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)h + ... + n a_n (x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot ... \cdot(x - x_{n-2})h.$$

Применяя (2.3), для коэффициента a_1 получим выражение $a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h}$. Аналогично, учитывая (2.3), для второй конечной разности справедлива формула $\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2 \cdot 1 \cdot a_2 \cdot h^2$ и, следовательно, $a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$.

Продолжая наши рассуждения, запишем формулу для любого a_i: $a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!h^i}$. Подставляя в (2.4) выражения для коэффициентов a_i через конечные разности, получим **первую интерполяционную формулу Ньютона**

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}). \tag{2.5}$$

Для практических целей формулу Ньютона (2.5) удобнее записывать в несколько ином виде. Введем переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$. Тогда $x - x_0 = qh$. Таким образом, для полинома $P_n(x)$ получим выражение

$$P_n(x(q)) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \tag{2.6}$$

Формулу (2.6) выгодно использовать для интерполирования в окрестности начального значения x_0. Поэтому ее часто называют формулой для **интерполирования вперед**. В этой формуле из таблицы конечных разностей используются $\Delta^k f_0$ верхней диагонали.

Остаточный член в формуле (2.6) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i, $i = 1,2,\ldots,n$ и точку x. При наличии дополнительного узла x_{n+1} на практике пользуются более удобной приближенной формулой

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!}q(q-1)\ldots(q-n). \tag{2.7}$$

При $n = 1$ из (2.6) получается формула *линейного* интерполирования

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

При $n = 2$ из (2.6) имеет место формула *параболического* или квадратического интерполирования

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

Первая интерполяционная формула Ньютона практически неудобна для интерполирования функций в конце таблицы. Поэтому когда точка интерполирования лежит вблизи точки x_n удобно пользоваться **второй интерполяционной формулой Ньютона**, которая имеет вид

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_n}{1!h}(x - x_n) + \ldots + \frac{\Delta^n y_n}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_1). \tag{2.8}$$

Вводя новую переменную $q = \frac{x - x_n}{h}$, эту формулу перепишем в виде

$$P_n(x(q)) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \ldots + \frac{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 . \qquad (2.9)$$

В формуле (2.9) из таблицы конечных разностей используются $\Delta^k f_i$ нижней диагонали.

Остаточный член формулы (2.9) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) , \qquad (2.10)$$

где точка ξ имеет тот же смысл, что и ранее.

Отметим, что формулы Ньютона используются и для экстраполирования функций. Если $\bar{x} < x_0$, то *для экстраполирования* ***назад*** *используют* ***первую*** *интерполяционную формулу Ньютона*. Если $\bar{x} > x_0$, то *для экстраполирования* ***вперед*** *используют* ***вторую*** *интерполяционную формулу Ньютона*. Следует заметить, что операция экстраполирования менее точна, чем операция интерполирования в узком смысле.

3 Интерполяционные формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов

3.1 Разностные отношения и их свойства

В том случае, когда значения аргумента являются неравноотстоящими для исследования и вычисления функции используются разностные отношения (разделенные разности). Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы произвольные попарно различные узлы интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, в которых известны значения некоторой функции $y = f(x)$: $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_{n-1} = f(x_{n-1}),\ y_n = f(x_n)$.

Разностными отношениями первого порядка называются величины

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$
$$\ldots,\ f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}. \qquad (2.11)$$

По разностным отношениям первого порядка составляются разностные отношения **второго порядка**

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$
$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \ldots . \qquad (2.12)$$

Разностные отношения любого порядка $n\ (n = 1,2,3,\ldots)$ определяются при помощи разностных отношений предыдущего порядка $n-1$ по формуле

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}. \qquad (2.13)$$

Используя определение, можно показать, что разностное отношение является симметрической функцией своих аргументов так, что выполняется равенство

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) = f(x_0, x_1, \ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n). \qquad (2.14)$$

Лемма 1. Если $P_n(x)$ полином степени n, то его конечная разность $n+1$ порядка равна нулю для любой системы попарно различных между собой чисел $x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$

$$P_n(x, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) \equiv 0 . \qquad (2.15)$$

Доказательство. Так как полином $P_n(x)-P_n(x_0)$ имеет корень в точке x_0, по определению, получим

$$P_n(x,x_0)=\frac{P_n(x_0)-P_n(x)}{x_0-x}=P_{n-1}(x).$$

С учетом (2.12) полином $P_n(x_0,x_1)-P_n(x,x_0)$ обращается в нуль в точке x_1 и вторая конечная разность будет полиномом степени $n-2$

$$P_n(x,x_0,x_1)=\frac{P_n(x_0,x_1)-P_n(x,x_0)}{x_1-x}=P_{n-2}(x).$$

Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что

$$P_n(x,x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n,x_{n+1})=P(x_0)=const,$$

и, следовательно, для разностного отношения $n+1$ порядка справедливо равенство (2.15). Лемма доказана.

Теперь получим выражения разностных отношений всех порядков через значения функции. Из определения разностного отношения первого порядка имеем

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}. \tag{2.16}$$

Для разностного отношения второго порядка получим

$$\begin{aligned} f(x_0,x_1,x_2)&=\frac{1}{x_2-x_0}\{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)\}=\\ &=\frac{1}{x_2-x_0}\left\{\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}-\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}-\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}\right\}=\\ &=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Приведем еще выражение любого значения $f(x_n)$ функции через начальное значение $f(x_0)$ и разностные отношения $f(x_0,x_1)$, $f(x_0,x_1,x_2)$, ... для начальной точки x_0. Из определения $f(x_0,x_1)$ вытекает равенство

$$f(x_1)=f(x_0)+(x_1-x_0)f(x_0,x_1). \tag{2.18}$$

На основании соотношений (2.18) и (2.17) будем иметь

$$\begin{aligned} f(x_2)&=f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_1,x_2)=f(x_0)+(x_1-x_0)f(x_0,x_1)+\\ &+(x_2-x_1)\left[f(x_1,x_2)+(x_2-x_0)f(x_0,x_1,x_2)\right]=\\ &=f(x_0)+(x_2-x_0)f(x_0,x_1)+(x_2-x_0)(x_2-x_1)f(x_0,x_1,x_2). \end{aligned}$$

Используя индукцию, получим

$$\begin{aligned} f(x_n)&=f(x_0)+(x_n-x_0)f(x_0,x_1)+(x_n-x_0)(x_n-x_1)f(x_0,x_1,x_2)+....+\\ &+(x_n-x_0)\,...\,(x_n-x_{n-1})f(x_0,x_1,x_2,...,x_n). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Отметим некоторые **свойства** разностных отношений

1. Свойство аддитивности. Если $f(x)=u(x)+v(x)$, то $f(x_0,x_1)=u(x_0,x_1)+v(x_0,x_1)$.
2. Свойство подобия. Если $f(x)=cu(x)$, где $c=const$, то $f(x_0,x_1)=cu(x_0,x_1)$.
3. Свойство симметрии. Разностное отношение $f(x_0,x_1,...,x_{n-1},x_n)$ есть симметричная функция своих аргументов (см. (2.14)).

4. Если $f(x)$ есть многочлен степени n, то разностное отношение n-го порядка $f(x_0, x_1, ..., x_n)$ не зависит от $x_0, x_1, ..., x_n$ и равняется коэффициенту при старшей степени x в многочлене $f(x)$. Все разностные отношения порядка большего n равны нулю (см. лемму 1).

Установим связь между разностными отношениями и конечными разностями. Предположим, что значения аргумента $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ являются равноотстоящими $x_0, x_1 = x_0 + h, , ..., x_n = x_0 + nh$. Тогда получим

$$f(x_0, x_1) = f(x_0, x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{\Delta y_0}{1! h}. \tag{2.20}$$

Для разностного отношения второго порядка имеем

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_0, x_0 + h, , x_0 + 2h) =$$
$$= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h}\left(\frac{\Delta y_1}{1! h} - \frac{\Delta y_0}{1! h}\right) = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}.$$

И для n-го разностного отношения имеет место равенство

$$f(x_0, x_0 + h, ..., x_0 + nh) = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}. \tag{2.21}$$

3.2 Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона

Покажем, что, используя понятие разностных отношений, формулу Лагранжа можно записать в виде аналогичном первой и второй интерполяционным формулам Ньютона для равноотстоящих узлов. Пусть $L_n(x)$ полином Лагранжа, для которого выполняется условие

$$L_n(x_i) = f(x_i), \ i = 0,1, ..., n. \tag{2.22}$$

Тогда $L_n(x, x_0) = \dfrac{L_n(x_0) - L_n(x)}{x_0 - x}$ и $L_n(x) = L_n(x_0) + L_n(x, x_0)(x - x_0)$. По определению, для второго разностного отношения имеем

$$L_n(x, x_0, x_1) = \frac{L_n(x_0, x_1) - L_n(x, x_0)}{x_1 - x}.$$

Откуда $L_n(x, x_0) = L_n(x_0, x_1) + L_n(x, x_0, x_1)(x - x_1)$. Последовательно выражая разностные отношения m-го порядка через отношения $m+1$-го порядка по формуле

$$L_n(x, x_0, ..., x_{m-1}) = L_n(x_0, x_1, ..., x_m) + L_n(x, x_0, ..., x_m)(x - x_m),$$

окончательно для полинома $L_n(x)$ получим представление

$$L_n(x) = L_n(x_0) + L_n(x_0, x_1)(x - x_0) + L_n(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ ... + L_n(x_0, x_1, ..., x_i)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1}) + ... +$$
$$+ L_n(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) +$$
$$+ L_n(x, x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Учитывая (2.22) и то, что $L_n(x, x_0, ..., x_m) = 0$, получим **первую интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов**

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... +$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}). \tag{2.23}$$

Аналогичным образом можно построить и **вторую интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов**, которая имеет вид

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) +$$

$$+\ldots+f(x_n,x_{n-1},x_{n-2},\ldots,x_0)(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1)\,. \qquad (2.24)$$

Кроме формул (1.12) и (1.14) для оценки погрешности получим еще одну исходя из формулы Ньютона. Добавим к узлам $x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n$ еще один узел x, то есть точку, в которой вычисляется значение функции $f(x)$. Тогда по формуле выражающей значения функции в узле через начальные разностные отношения, получим

$$\begin{gathered}f(x)=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+\\ +f(x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})+\\ +f(x_0,x_1,\ldots,x_n,x)(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)\,.\end{gathered}$$

Заметим, что в правой части сумма всех слагаемых без последнего интерполяционной формулой Ньютона (2.23). Тогда

$$f(x)=P_n(x)+f(x_0,x_1,\ldots,x_n,x)(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)\,,$$

или

$$R(x)=f(x)-P_n(x)=\omega(x)f(x_0,x_1,\ldots,x_n,x)\,. \qquad (2.25)$$

Сравнивая формулы (1.12) и (2.25) получим, что

$$f(x_0,x_1,\ldots,x_n,x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,.$$

Для вычисления погрешности можно пользоваться формулами (1.12), (1.14), (1.15).

Лекция 3 Обратное интерполирование и численное дифференцирование

1 Обратная задача интерполирования.
2 Численное дифференцирование.
3 Погрешность численного дифференцирования.

1 Обратная задача интерполирования

Часто на практике возникает задача об отыскании по заданному значению функции значения аргумента. Эта задача решается методом **обратного интерполирования**.

Если заданная функция монотонна, то обратное интерполирование проще всего осуществить путем замены функции аргументом и обратно, и последующего интерполирования.

Если заданная функция не монотонна, то этим приемом воспользоваться нельзя. Тогда не меняя ролями функцию и аргумент, записываем ту или иную интерполяционную формулу, используя известные значения аргумента и считая функцию известной, решаем полученное уравнение относительно аргумента.

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы узлы интерполирования $x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n$ и известны соответствующие значения $y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ldots,\ y_n=f(x_n)$. Теперь необходимо по заданному значению функции $\bar{y}$ определить аргумент $\bar{x}$, соответствующий этому значению. Для произвольной функции задача обратного интерполирования не может быть решена однозначно. Решение будет однозначным, если функция $f(x)$ монотонна на минимальном отрезке, содержащем узлы интерполирования.

Рассмотрим **два случая**.

Если узлы интерполирования **равноотстоящие**, то для решения поставленной задачи можно использовать метод **последовательных приближений**, который заключается в следующем. Пусть функция $f(x)$ монотонна и значение $\bar{y}$ содержится между y_0 и y_1. Запишем первую интерполяционную формулу Ньютона (2.6)

$$y = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 .$$

Перепишем ее в виде

$$q = \varphi(q) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{q(q-1)}{2!\,\Delta y_0}\Delta^2 y_0 - \ldots - \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!\,\Delta y_0}\Delta^n y_0 . \qquad (3.1)$$

Для отыскания q можно использовать итерационный процесс

$$q_m = \varphi(q_{m-1}),\ \ m = 1,2,3,\ldots . \qquad (3.2)$$

В качестве нулевого приближения можно взять $q_0 = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}$. Для достаточно гладких функций при малом шаге h итерационный процесс (3.2) сходится. Если $\lim\limits_{m\to\infty} q_m = q$, то значение искомого аргумента $\bar{x}$ определяется из формулы $\bar{x} = x_0 + qh$.

В случае **неравноотстоящих** узлов значение аргумента можно определить по формуле Лагранжа для обратной функции

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\bar{y} - y_0)(\bar{y} - y_1)\ldots(\bar{y} - y_{i-1})(\bar{y} - y_{i+1})\ldots(\bar{y} - y_n)}{(y_i - y_0)(y_i - y_1)\ldots(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})\ldots(y_i - y_n)} x_i . \qquad (3.3)$$

2 Численное дифференцирование

Пусть на отрезке $[a,b]$ рассматривается функция $f(x)$, имеющая непрерывную производную порядка $n+1$. Возьмем на $[a,b]$ $n+1$ различный узел (для удобства) $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ и известны значения функции в них $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ldots,\ y_n = f(x_n)$. Требуется найти значение k-ой производной от функции $f(x)$ в любой точке $x \in [a,b]$. Построим интерполяционный многочлен $P_n(x)$ для функции $f(x)$ степени n с погрешностью $R(x)$. Тогда запишем $f(x) = P_n(x) + R(x)$. Для производной порядка k имеем $f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R^{(k)}(x)$. Если погрешность мала, то пренебрегая ею, получим формулу для приближенного вычисления производной $f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x)$. Пользоваться этой формулой целесообразно при небольших порядках k, когда $k \le n$, так как все производные от $P_n(x)$ порядка выше n тождественно равны нулю.

Получим некоторые явные формулы для численного вычисления производных при некоторых видах $P_n^{(k)}(x)$.

2.1 Дифференцирование для равноотстоящих узлов

Если узлы равноотстоящие, то для вычисления производной удобно пользоваться первой интерполяционной формулой Ньютона

$$P_n(x(q)) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 .$$

Учитывая, что $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dP}{dq}$, получим

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2}{6}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{2q^3 - 9q^2 + 11q - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots +$$
$$+ \frac{q(q-1)\ldots(q-n+2) + \ldots + (q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0) ,$$

$$P_n^{(2)}(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2 - 18q + 11}{12}\Delta^4 y_0 + ...) \ . \qquad (3.4)$$

Аналогично вычисляются производные высших порядков. Если производная вычисляется в узловой точке, то формулы упрощаются. Например, если $x = x_0$, то

$$P_n^{(1)}(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - ...) \ ,$$
$$P_n^{(2)}(x_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^4 y_0 + ...) \ . \qquad (3.5)$$

Так как $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)...(q-n)f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, то, считая, что $f(x) \in C_{[a,b]}^{n+2}$, получим

$$R_n^{(1)}(x) = \frac{h^n}{(n+1)!} \cdot$$
$$\cdot \left(f^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dq}\big(q(q-1)...(q-n)\big) + q(q-1)...(q-n)\frac{d}{dq}f^{(n+1)}(\xi) \right).$$

В узлах же интерполирования последняя формула примет вид

$$R_n^{(1)}(x_i) = (-1)^{n-i}\frac{h^n i!(n-i)!}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \ . \qquad (3.6)$$

При шаге $h << 1$ можно считать, что $f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} f_0}{h^{n+1}}$. Тогда оценка (3.6) примет вид

$$R_n^{(1)}(x_i) \approx (-1)^{n-i}\frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}\Delta^{n+1} f_0 \ . \qquad (3.7)$$

2.2 Дифференцирование для неравноотстоящих узлов

Для случая неравноотстоящих узлов удобно пользоваться формулами Лагранжа или Ньютона для неравноотстоящих узлов. Формула Лагранжа имеет вид (1.9)

$$L_n(x) = \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} \ .$$

Тогда первая производная запишется в форме

$$L_n^{(1)}(x) = \omega^{(1)}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} - \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x - x_i)^2\omega'(x_i)} \ . \qquad (3.8)$$

Учитывая, что

$$\omega^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{n}(x - x_0)...(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})...(x - x_n) = \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{x - x_i} \ ,$$

формулу (3.8) можно переписать в виде

$$L_n^{(1)}(x) = \omega(x)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x - x_k}\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} - \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x - x_i)^2\omega'(x_i)}\right).$$

На практике более удобно пользоваться формулой Ньютона (2.23)

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$+ \ldots + f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1}) +$$
$$+ \ldots + f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) .$$

Для построения формулы численного дифференцирования введем следующие обозначения $\alpha_0 = x - x_0$, $\alpha_1 = x - x_1$, ... , $\alpha_i = x - x_i$. Тогда первая производная запишется

$$\begin{gathered} P_n^{(1)}(x) = f(x_0, x_1) + f(x_0, x_1, x_2)(\alpha_0 + \alpha_1) + \\ + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_2) + \ldots + \\ + f(x_0, x_1, \ldots, x_i)\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{i-1} + \ldots + \\ + f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{n-1}) . \end{gathered} \tag{3.9}$$

Вторая производная примет вид

$$\frac{1}{2!} f^{(2)}(x) \approx \frac{1}{2!} P_n^{(2)}(x) = f(x_0, x_1, x_2) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_0) + \ldots . \tag{3.10}$$

Аналогичным образом можно вычислить производные более высокого порядка.

3 Погрешность формул численного дифференцирования

Рассмотрим сначала случай, когда точка $\bar{x}$ не принадлежит минимальному отрезку $[a, b]$, содержащему узлы интерполирования. Введем вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - k\omega(x)$. Функция $\varphi(x)$ имеет $n+1$ нулей в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ по построению. На основании теоремы Ролля $\varphi^{(1)}(x)$ будет иметь n, $\varphi^{(2)}(x)$ – $n-1$ и $\varphi^{(k)}(x)$ будет иметь $n-k+1$ нулей внутри отрезка $[a, b]$. Выберем теперь k таким, чтобы $\bar{x}$ также являлась корнем $\varphi^{(k)}(x)$. Так как $\bar{x} \notin [a, b]$, то это всегда можно сделать, полагая $k = \dfrac{f^{(k)}(\bar{x}) - L_n^{(k)}(\bar{x})}{\omega^{(k)}(\bar{x})}$. Тогда $\varphi^{(k)}(x)$ будет иметь $n-k+2$ нулей и, следовательно, $\varphi^{(n+1)}(x)$ обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке ξ. Получим $\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0$. Подставляя выражение для k в последнее равенство, получим выражение для погрешности дифференцирования

$$R_n^{(k)}(f) = f^{(k)}(\bar{x}) - L_n^{(k)}(\bar{x}) = \frac{\omega^{(k)}(\bar{x})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) . \tag{3.11}$$

Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ и $\bar{x} \in [x_0, x_n]$. Разность $f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)$ обращается на отрезке $[x_0, x_n]$ в нуль в точках $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-k}$. Будем считать, что $\bar{x} \neq \varepsilon_i$, и рассмотрим функцию

$$\begin{gathered} \Psi(x) = f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) - c(x - \varepsilon_0)(x - \varepsilon_1)\ldots(x - \varepsilon_{n-k}) = \\ = f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) - c\tilde{\omega}(x) . \end{gathered}$$

Если $\bar{x} \neq \varepsilon_i$, то константу c можно подобрать так, чтобы $\Psi(\bar{x}) = 0$. Используя последнее условие, получим $c = \dfrac{f^{(k)}(\bar{x}) - L_n^{(k)}(\bar{x})}{\tilde{\omega}(x)}$. При указанном выборе c функция $\Psi^{(1)}(x)$ будет иметь $n-k+1$ нулей и $\Psi^{(n-k+1)}(x)$, по крайней мере, обращается в нуль в одной точке ξ. То есть $\Psi^{(n-k+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(n-k+1)! = 0$. Подставляя выражение для c в последнее равенство, получим

$$R_n^{(k)}(f) = f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = \frac{\tilde{\omega}(x)}{(n-k+1)!} f^{(n+1)}(\xi) . \tag{3.12}$$

Заметим, что при использовании формул численного дифференцирования может произойти существенная потеря точности. Поясним это на простом примере.

Пусть $f'(x)$ вычисляется по формуле $f'(x_0) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2} f''(\xi)$. Если $\max_{[x_0, x_n]} |f''(x)| < M_2$, то погрешность формулы будет $|r_1| \le M_2 \frac{h}{2}$. Допустим, что значения функции $f(x_0)$ и $f(x_1)$ вычисляются с погрешностью $|\varepsilon_i| \le E$. В этом случае появится дополнительная погрешность $r_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{h}$ и $|r_2| \le \frac{2E}{h}$.

Величина общей погрешности удовлетворяет неравенству

$$|r| \le |r_1| + |r_2| \le g(h) = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2E}{h}.$$

Определим минимум $g(h)$: $g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2E}{h^2}$. Отсюда определим $h_0 = 2\sqrt{\frac{E}{M_2}}$ и $g(h_0) = 2\sqrt{EM_2}$. Если $E \ge const\ 2^{-t}$, где t разрядность сетки ЭВМ, то из оценки следует, что $f'(x)$ в лучшем случае вычисляется с половиной верных разрядов.

Лекция 4 Приближение функций

1 Среднеквадратичные приближения функций.
2 Точечный метод наименьших квадратов.
3 Интегральный метод наименьших квадратов.

1 Среднеквадратичные приближения функций

На практике часто бывает необходимо построить аппроксимирующий многочлен $P_m(x)$ степени $m < n$, где n-множество точек $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ на котором заданна функция $y_i = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$. Так как, в этом случае, интерполирование невозможно, то прибегают к другим приемам, позволяющим получить приближение функций. Обычно используют метод наименьших квадратов.

Уточним понятие квадратичного отклонения. Для этого введем соответствующее расстояние Δ между данной непрерывной функцией $f(x)$ и полиномом $P_m(x)$ – так называемое среднеквадратичное отклонение.

Определение 1. Под средним квадратичным отклонением функции $f(x)$ и полинома $P_m(x)$ на множестве точек $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ понимается число

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - P_m(x_i))^2}\,. \tag{4.1}$$

В этом случае аппроксимация называется **точечной**.

Если функция $f(x)$ заданна аналитически, тогда аппроксимация называется **интегральной**, и среднеквадратичное отклонение на отрезке $[a,b]$ определяется формулой:

$$\Delta = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x) - P_m(x))^2 dx}\,. \tag{4.2}$$

Формулу (4.2) можно рассмотреть как предельный случай формулы (1) при $n \to \infty$. Если среднее квадратичное отклонение Δ мало, то для большинства значений x из $[a,b]$ абсолютная величина $\left| f(x) - P_m(x) \right|$ также мала при $x \in [a,b]$. Следовательно $\Delta < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$.

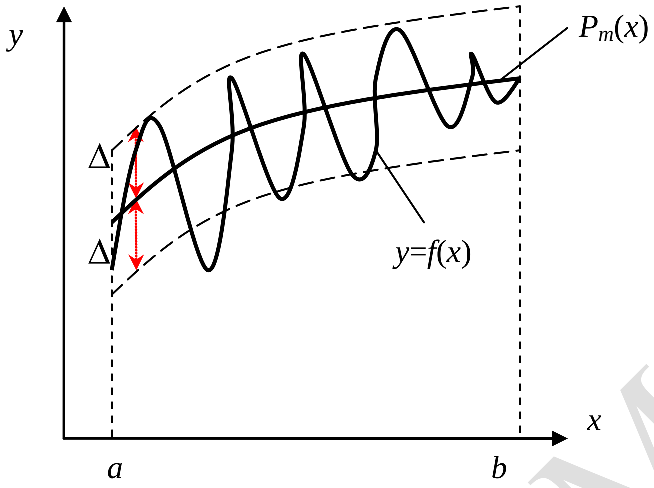


Рис. 1 Приближение функции

Такая ситуация наблюдается в ряде случаев при обработке результатов наблюдений и с помощью приближения функции мы можем получить закон изменения этих результатов.

Во многих случаях, например, при обработке результатов эксперимента оно сглаживает отдельные локальные неровности. Однако иногда для приближения функций ставят более жесткие условия: **требуется гарантировать**, чтобы отклонение на отрезке $[a,b]$ $f(x)$ и $P_m(x)$ было меньше заданной величины, то есть равно величине абсолютного отклонения.

Определение 2. Абсолютным отклонением на отрезке $[a,b]$ обобщенного полинома $P_m(x)$ от непрерывной функции $f(x)$ называется число

$$\Delta_m = \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - P_m(x) \right|. \tag{4.3}$$

Если $\Delta_m < \varepsilon$, то из формулы (4.3) следует, что $\left| f(x) - P_m(x) \right|$ для всех точек x на отрезке $[a,b]$. Тогда говорят, что обобщенный полином $P_m(x)$ на отрезке $[a,b]$ равномерно приближает функцию $f(x)$ с заданной точностью ε. Для случая алгебраических многочленов справедлива теорема Вейерштрасса.

Теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ то, как бы мало ни было положительное число ε, найдется полином $P_m(x)$ достаточно высокой степени $m < n$ абсолютное отклонение которого от данной функции $f(x)$ на $[a,b]$ не меньше ε, то есть для любого $x \in [a,b]$ имеет место неравенство: $\left| f(x) - P_m(x) \right| < \varepsilon$.

2 Точечный метод наименьших квадратов

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана система точек $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$. При точечном квадратичном аппроксимировании за меру отклонения алгебраического полинома $P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ от функции $y = f(x)$ на данном множестве точек берут величину

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left(P_m(x_i) - f(x_i)\right)^2 , \tag{4.4}$$

которая называется **квадратичным отклонением**.

Полином $P_m(x)$ следует строить таким образом, чтобы величина этого отклонения была **минимальной**. Если $m = n$, то в качестве $P_m(x)$ можно взять интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, так как для него величина среднеквадратичного отклонения равна нулю

$$S^2 = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - L_n(x_i))^2 = 0 .$$

Если $m < n$, то для минимизации отклонения S необходимо решить систему

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \ \ i = 0,1,...,m .$$

Таким образом, для определения минимизации функции квадратичного отклонения S необходимо взять частные производные от величины $\sum_{i=0}^{n} (P_m(x_i) - f(x_i))^2$, по всем переменным $a_0, a_1, ..., a_m$. Приравнивая эти частные производные к нулю, получим систему m+1 уравнений с m+1 неизвестными $a_0, a_1, ..., a_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial a_0} = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial a_1} = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial a_m} = \sum\limits_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^m - y_i) \cdot x_m = 0 \end{cases} . \tag{4.5}$$

Для удобства вычисления введем обозначения:

$$s_k = x_0^k + x_1^k + ... + x_n^k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \ \text{ и } \ t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + ... + x_n^k y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i \text{ , k=0,1,2…}$$

Тогда система (4.5) может быть записана в виде:

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + ... + a_m s_m = t_0 \\ a_0 s_1 + a_1 s_2 + a_2 s_3 + ... + a_m s_{m+1} = t_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 s_m + a_1 s_{m+1} + a_2 s_{m+2} + ... + a_m s_{2m} = t_m \end{cases} . \tag{4.6}$$

$$s_0 = n + 1$$

Если среди точек x_i нет совпадающих, то определитель системы неравен нулю. То есть система уравнений (4.6) совместна и из решения этой системы определяем неизвестные коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_m$. Полином с такими коэффициентами будет обладать минимальным отклонением. Так как матрица системы (4.6) положительно определена, и для ее решения можно использовать любой численный метод, например, Зейделя или метод простой итерации.

Для удобства формирования и решения системы (4.6) промежуточные результаты рекомендуется записывать в следующей таблице.

Таблица 1. Коэффициенты системы

x_i^0	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	x_0	y_0	x_0^2	x_0^3	x_0^4	$x_0 y_0$	$x_0^2 y_0$
1	x_1	y_1	x_1^2	x_1^3	x_1^4	$x_1 y_1$	$x_1^2 y_1$
1	x_2	y_2	x_2^2	x_2^3	x_2^4	$x_2 y_2$	$x_2^2 y_2$
1	x_3	y_3	x_3^2	x_3^3	x_3^4	$x_3 y_3$	$x_3^2 y_3$
1	x_4	y_4	x_4^2	x_4^3	x_4^4	$x_4 y_4$	$x_4^2 y_4$
S_0	S_1	t_0	S_2	S_3	S_4	t_1	t_2

3 Интегральный метод наименьших квадратов

Пусть задана система фундаментальных функций:

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_1(x) = x,\ \varphi_2(x) = x^2, ..., \varphi_m(x) = x^m,$$

тогда полином $P_m(x)$ запишется в виде

$$P_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x), \tag{4.7}$$

Для случая точного метода минимизируем $S = \sum_{i=0}^{n}(P_m(x_i) - f(x_i))^2$, в случае интегрального метода минимизируем $S(a_0, a_1, ..., a_m) = \int_a^b (P_m(x_i) - f(x_i))^2 dx$. Определим коэффициенты разложения a_i из условия $\frac{\partial S}{\partial a_j}$, $j = \overline{0, m}$. Дифференцируя S, получим систему

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a_j} = \sum a_i(\varphi_i, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0, \quad j = \overline{0, m}.$$

Таким образом, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_0, \varphi_1) + a_2(\varphi_0, \varphi_2) + ... + a_m(\varphi_0, \varphi_m) = (\varphi_0, y) \\ a_0(\varphi_1, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + a_2(\varphi_1, \varphi_2) + ... + a_m(\varphi_1, \varphi_m) = (\varphi_1, y) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0(\varphi_m, \varphi_0) + a_1(\varphi_m, \varphi_1) + a_2(\varphi_m, \varphi_2) + ... + a_m(\varphi_m, \varphi_m) = (\varphi_m, y) \end{cases}. \tag{4.8}$$

Здесь выражение (φ_j, φ_k) и (φ_j, y) представляют собой скалярные произведения и соответственно равны.

Для **точечного** метода

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i),\quad (\varphi_j,y)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_j(x_i)y_i\ , \tag{4.9}$$

где $0\le j\le m,\ \ 0\le j+k\le 2m$, $y_i\ =\ f(x_i),\quad i=\overline{0,n}$, если функция задана таблично.

Для **интегрального** метода, если функция $y = f(x)$ задана аналитически на отрезке $[a,b]$ скалярные произведения определяются

$$(\varphi_j,\varphi_k)=\int_a^b\varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i)dx,\quad (\varphi_j,y)=\int_a^b\varphi_j(x_i)y_idx\,. \tag{4.10}$$

Если система фундаментальных функций $\varphi_0(x),\,\varphi_1(x),\,\varphi_2(x),...,\varphi_m(x)$ ортогональна, т.е. $(\varphi_j,\varphi_k)=\begin{cases}0,\ j\ne k\\ 1,\ j=k\end{cases}$, то для вычисления коэффициента a_i из системы уравнений (4.8) сразу можно записать

$$a_i=\frac{(\varphi_i,f)}{(\varphi_i,\varphi_i)}=\frac{(\varphi_i,f)}{\left\|\varphi_i\right\|^2}\,, \tag{4.11}$$

если же система фундаментальных функций $\{\varphi_i(x)\}$ ортонормированна, то

$$a_i=\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx\,. \tag{4.12}$$

Полученные таким образом коэффициенты называется коэффициентами Фурье для приближенных функций $y = f(x)$ тригонометрический полином.

Так как система функций

$$\varphi_0=1,\varphi_1(x)=\cos x,\varphi_2(x)=\sin x,\varphi_3(x)=\cos 2x,\varphi_4=\sin 2x$$

ортогональна, то приближение функций тригонометрическим полиномом можно производить, используя метод наименьших квадратов для функции заданной аналитически.

Пример. Пусть задана функция $y = f(x) = x - 4x$ на $\left[a,b\right]=\left[0,2\right]$ требуется построить аппроксимирующий многочлен степени $m=2$ он имеет вид:

$$Q_2(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)\ \text{,где}\ \varphi_0(x)=1,\ \varphi_1(x)=x,\ \varphi_2(x)=x^2$$

Так как скалярное произведение $(\varphi_j,\varphi_k)=(\varphi_k,\varphi_j)$, то для определения скалярного произведения с разными индексами имеем:

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^2 1\cdot 1dx=x\Big|_0^2=2\,,\qquad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^2 1\cdot xdx=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=2\,,$$

$$(\varphi_0,\varphi_2)=\int_0^2 1\cdot x^2dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}\,,\qquad (\varphi_1,\varphi_1)=\int_a^b x^2dx=\frac{8}{3},$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_a^b x\cdot x^2dx=\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2=4\,,\qquad (\varphi_2,\varphi_2)=\int_0^2 x^2\cdot x^2dx=\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2$$

$$(\varphi_0, y) = \int_0^2 f(x)\cdot\varphi_0(x)dx = \int_0^2 (x^3-4x)\cdot 1dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 4,$$

$$(\varphi_1, y) = \int_0^2 (x^3-4x)xdx = (\varphi_0, y) = \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 - 4\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = -\frac{64}{15}$$

В результате получаем систему (4.8).

Контроль правильности вычисления:

1. прежде всего, после решения системы уравнений необходимо подставить коэффициенты в уравнения системы (4.8) и проверить, совпадает ли правая часть с левой;
2. так как аппроксимирующий многочлен не совпадает со значением функции на заданном множестве точек, то следует вычислять по формуле (4.1) величину Δ для точечного метода наименьших квадратов или по формуле (4.2) для интегрального метода наименьших квадратов и если после подстановки в многочлены значения x, где известно значение функции отклонение между ними не будет превосходить величину Δ, то аппроксимирующий многочлен построен правильно.

Лекция 5 Численное интегрирование

1 Постановка задачи.
2 Квадратурная формула трапеций.
3 Квадратурная формула Симпсона.

1 Постановка задачи

Пусть $[a,b]$ – любой отрезок числовой оси, и рассматривается интеграл $\int_a^b F(x)dx$. Ставится задача: найти его приближённое значение по n значениям $F(x_i)$ функции F в точках x_i $(i=1,2,...,n)$. Формулы для вычисления интегралов называют **квадратурными**.

Многие правила приближённых квадратур основаны на замене интегрируемой функции F на всём отрезке $[a,b]$ или на его частях на более простую функцию φ, близкую к F, легко интегрируемую точно и принимающую в узлах x_i те же значения $F(x_i)$, что и F. В качестве такой функции берут алгебраический или тригонометрический многочлен, либо дробно-рациональную функцию.

Когда отрезок интегрирования конечный и интегрируемая функция F имеет высокую гладкость, то можно рассчитывать хорошо приблизить её многочленом невысокой степени. Если же сама функция F или её производные невысоких порядков имеют особенности или даже обращаются в ∞, то это затруднит приближение F или сделает его вообще невозможным. В этом случае мы должны будем заранее освободиться от таких особенностей путём их выделения. Делается это при помощи разложения F на два сомножителя $F(x) = p(x)f(x)$, где $p(x)$ имеет такие же особенности, как и $F(x)$, а $f(x)$ – есть достаточно гладкая функция, и интеграл рассматривается в форме $\int_a^b p(x)f(x)dx$.

Функция $p(x)$ называется **весовой функцией** или **весом**. При построении определённого квадратурного правила она считается фиксированной.

Будем строить приближённые формулы вычислений вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \ x_k \in [a,b]. \tag{5.1}$$

Числа A_k называются **квадратурными коэффициентами**, x_k – **квадратурными узлами**, а правая часть формулы – **квадратурной суммой**.

Формула (5.1) содержит $2n+1$ параметров: n, A_k, x_k $(k=1,2,...,n)$. Их следует выбирать так, чтобы (5.1) давала, возможно, лучший результат при интегрировании избранного класса функций f. Роль n – очевидна: чем больше n, тем больше слагаемых в квадратурной сумме, и тем большей точности можно достичь путём выбора A_k и x_k. Поэтому при построении формулы число n считают фиксированным и рассматривают задачу о выборе A_k и x_k. В различных квадратурных методах одно из множеств: либо множество коэффициентов A_k, либо множество узлов x_k также может быть зафиксированным. Правом выбора их обычно пользуются для следующих целей:

– Увеличение степени точности

Говорят, что квадратурная формула (5.1) имеет степень точности m, если она является точной для функций $g_i(x)$ $(i = 1,2,...,m)$, т.е.

$$\int_a^b p(x) g_i(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k g_i(x_k)$$

и не является точной для $g_{m+1}(x)$. Можно стремиться к тому, чтобы при помощи выбора параметров A_k и x_k сделать степень точности формулы (5.1) наивысшей возможной. Такие формулы впервые были рассмотрены Гауссом и их часто называют формулами **наивысшей степени точности**.

– Минимизация погрешности

Остаточный член формулы (1) имеет вид

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) . \tag{5.2}$$

За величину, характеризующую точность формулы на множестве F функций f может быть принята

$$\sup_f |R_n(f)| = M(A_1,..., A_1; x_1,..., x_n) .$$

Путём выбора узлов x_k и коэффициентов A_k можно добиться, чтобы величина M имела бы наименьшее значение.

– Упрощение вычислений

Можно при помощи выбора параметров A_k и x_k стремиться сделать, возможно, более простыми вычисления по формуле (5.1), например, взять равноотстоящими узлы, или взять равные коэффициенты.

1.1 Общая квадратурная формула

Предположим, что узлы x_k $(k = 1,2,...,n)$ выбраны, и мы можем при построении квадратурной формулы (5.1) выбирать лишь коэффициенты A_k. Выполним интерполирование $f(x)$ по её значениям в узлах x_k при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа степени $n-1$

$$f(x) = L_n(x) + r(x) ,$$

где $L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega(x) = (x - x_1)...(x - x_n)$.

Тогда

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) L_n(x) dx + \int_a^b p(x) r(x) dx . \tag{5.3}$$

Будем считать, что

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \int_a^b p(x) L_n(x) dx = \int_a^b p(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} f(x_k) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \int_a^b \frac{p(x)\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) .$$

Таким образом, интерполяционная квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)} dx . \tag{5.4}$$

Ее погрешность (5.2) определяется следующим образом

$$R_n(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b p(x) r(x) dx .$$

Теорема о точности квадратурной формулы

Теорема 1. Для того чтобы квадратурная формула (5.4) была точной для алгебраических многочленов степени $n-1$, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной.

Теперь остановимся на оценке **погрешности**. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка n на $[a,b]$, то на отрезке, содержащем точки $x_1, x_2, ..., x_n, x$, существует точка ξ такая, что

$$r(x) = \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Тогда для (5.4) $R_n(f)$ имеет место следующее выражение

$$R_n(f) = \frac{1}{n!}\int_a^b p(x)\omega(x) f^{(n)}(\xi)dx.$$

Если же $|f^{(n)}(x)| < M_n$, $x \in [a,b]$, то имеем оценку погрешности квадратуры

$$|R_n(f)| \le \frac{1}{n!} M_n \int_a^b |p(x)\omega(x)|\, dx. \tag{5.5}$$

1.2 Формулы Ньютона-Котеса

В вычислениях часто узлы x_k берутся равноотстоящими. Построим интерполяционные квадратурные формулы, считая, что на отрезке $[a,b]$ задано $n+1$ равноотстоящих узлов x_k, таких, что $x_0 = a$, $x_k = x_{k-1} + h$, $x_n = b$ и $h = \dfrac{b-a}{n}$. Введем новую переменную $q = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тогда многочлен Лагранжа примет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, q(q-1)...(q-n)}{k!(n-k)!(q-k)} f(x_k).$$

Подставим это выражение в (5.3), получим

$$\int_a^b p(x) f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, h}{k!(n-k)!}\int_0^n p(a+qh)\frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k}dq\; f(x_k) + R_n(f).$$

Полученную формулу перепишем в виде

$$\int_a^b p(x) f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^n f(x_k), \tag{5.6}$$

где

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}\, h}{nk!(n-k)!}\int_0^n p(a+qh)\frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k}dq. \tag{5.7}$$

Квадратурные правила (5.6) называют **формулами Ньютона-Котеса**, а коэффициенты (5.7) – **коэффициентами Ньютона-Котеса**.

Для постоянной весовой функции $p(x) \equiv 1$ формула Ньютона-Котеса имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^n f(x_k), \tag{5.8}$$

а коэффициенты B_k^n определяются по формулам

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}\, h}{nk!(n-k)!}\int_0^n \frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k}dq. \tag{5.9}$$

Нетрудно видеть, что для коэффициентов B_k^n справедливы соотношения $\sum_{k=0}^{n} B_k^n = 1$ и $B_k^n = B_{n-k}^n$, например, последнее легко показывается с помощью замены $q = -t + n$.

Коэффициенты B_k^n вычислены до $n = 20$. Однако для больших значений n формулы Ньютона-Котеса не применяются, так как с ростом n все значительнее сказывается неустранимая и вычислительная погрешность. В следующей таблице приведем некоторые значения коэффициентов B_k^n .

Таблица 5.1 Значение коэффициентов

n \ k	0	1	2	3	4	Знаменатель
1	1					2
2	1	4				6
3	1	3				8
4	7	32	12			90
5	19	75	50			288
6	41	216	27	272		840
7	751	3577	1323	2989		17280
8	989	5888	-928	10496	-4540	28350

Например, $B_2^5 = \dfrac{50}{288}$.

Замечание. Формула (5.9) имеет степень точности n, если число узлов её $n+1$ – является чётным, и степень $n+1$, если число узлов её $n+1$ – является нечётным.

2 Квадратурная формула трапеций

Для повышения точности интегрирования отрезок $[a,b]$ часто делят на несколько частей, затем применяют избранную квадратурную формулу к каждой отдельной части и результаты складывают. Этот метод является общим, и им можно пользоваться при применении всякой квадратурной формулы. Для многих формул интерполяционных квадратур погрешность $R_n(f)$ зависит от величин отрезка интегрирования следующим образом

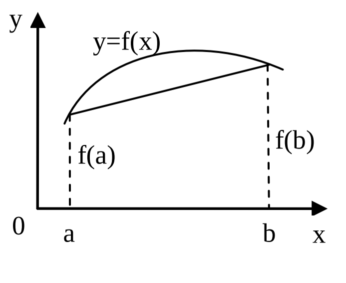
$$R_n(f) = (b-a)^k C(a,b)\,, \tag{5.10}$$

где $C(a,b)$ – медленно изменяющаяся функция от a до b и $k \in N$. Такая зависимость показывает, что если мы уменьшим отрезок интегрирования в m раз, то $R_n(f)$ при этом уменьшится приблизительно в m^k раз. Для вычисления интеграла по всему отрезку $[a,b]$ разделим его на m равных частей и вычислим при помощи выбранной формулы интегралы по всем частичным отрезкам. В каждом случае погрешность будет приблизительно в m^k раз меньше, чем (5.10). При сложении всех таких интегралов получится результат, погрешность которого будет приблизительно в m^{k-1} раз меньше, чем погрешность (10), когда формула применяется для вычисления интеграла по всему отрезку $[a,b]$. Если $k > 1$, то произойдёт уменьшение погрешности тем больше, чем больше k . Описанный способ увеличения точности применим сейчас к простейшим формулам Ньютона-Котеса.

Пусть $n = 1$, тогда линейное интерполирование выполняется **по двум значениям** $f(a)$ и $f(b)$, принимаемым функцией $f(x)$ на концах a и b . Квадратурная формула (5.8), с учетом коэффициентов из таблицы, будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[\, f(a) + f(b)\,]\,. \tag{5.11}$$

Это формула **трапеций**.



Погрешность ее, в виду $\omega(x) = (x-a)(x-b)$ и $p(x) \equiv 1$ определяется по формуле

$$R_n(f)=\frac{1}{n!}\int_a^b p(x)\omega(x)f^{(n)}(\xi)dx=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f^{(2)}(\xi)dx\,.$$

Если $f''(x)$ – непрерывная функция на $[a,b]$, и так как множитель $(x-a)(x-b)$ сохраняет знак на $[a,b]$, то по теореме о среднем, существует на $[a,b]$ такая точка η, что

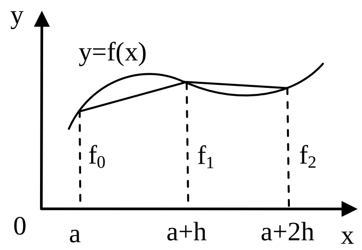
$$R_2(f)=f''(\eta)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!}dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\quad \eta\in[a,b]. \tag{5.12}$$

Для **увеличения точности** формулы трапеций (5.11), разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей длины $h=\frac{b-a}{n}$. Рассмотрим частичный отрезок $[\,a+kh, a+(k+1)h\,]$. Для него получим

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx=\frac{h}{2}(f_k+f_{k+1})+R_k,\quad f_k=f(a+kh)\,,$$

и согласно (5.12)

$$R_k=-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k),\quad a+kh\le\eta_k\le a+(k+1)h\,.$$



Сумма интегралов по всем частичным отрезкам даёт **общую квадратурную формулу трапеций**

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f_0+f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}+\frac{1}{2}f_n\right]+R\,, \tag{5.13}$$

где

$$R=R_0+R_1+\ldots+R_{n-1}=-\frac{h^3}{12}[\,f''(\eta_0)+f''(\eta_1)+\ldots+f''(\eta_{n-1})\,]=$$

$$=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\frac{f''(\eta_0)+f''(\eta_1)+\ldots+f''(\eta_{n-1})}{n},\quad a+kh\le\eta_k\le a+(k+1)h\,.$$

Величина $\frac{f''(\eta_0)+f''(\eta_1)+\ldots+f''(\eta_{n-1})}{n}$ есть среднее арифметическое из значений второй производной. Считая ее непрерывной функцией на $[a,b]$, мы можем выбрать такую точку $\xi\in[a,b]$, что

$$\frac{f''(\eta_0)+f''(\eta_1)+\ldots+f''(\eta_{n-1})}{n}=f''(\xi)\,,$$

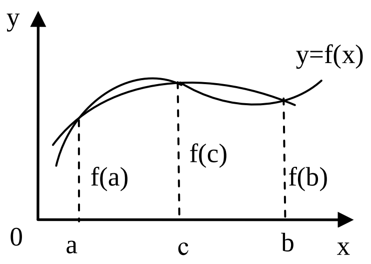
а значит, величина погрешности может быть определена по формуле

$$R=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi),\quad \xi\in[a,b]. \tag{5.14}$$

3 Квадратурная формула Симпсона

Пусть $n=2$ и интерполируется функция $f(x)$ **по трём точкам** a, $\frac{a+b}{2}=c$, b в которых известны её значения. Интерполирующий многочлен имеет вторую степень и его графиком является парабола. Квадратурная формула парабол имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6}[\,f(a)+4f(c)+f(b)\,]. \tag{5.15}$$



Это формула **парабол**. Она называется также формулой **Симпсона**. Формула точна для функции $f(x)=(x-c)^3$, так как левая и правая части формулы (5.15) тождественно равны нулю, а значит, она точна и для любого многочлена третьей степени.

Для нахождения погрешности формулы (5.15) рассмотрим многочлен $P_3(x)$ третьей степени, удовлетворяющий условиям

$$P_3(a)=f(a),\quad P_3(c)=f(c),\quad P_3'(c)=f'(c),\quad P_3(b)=f(b)\,.$$

Многочлен $P_3(x)$ интерполирует $f(x)$ по двум однократным узлам a и b и одному двукратному узлу c

$$f(x)=P_3(x)+r(x)\,.$$

Так как для $P_3(x)$ формула Симпсона является точной, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b P_3(x)dx+\int_a^b r(x)dx=\frac{b-a}{6}[\,P_3(a)+4P_3(c)+P_3(b)\,]+\int_a^b r(x)dx=$$

$$=\frac{b-a}{6}[\,f(a)+4f(c)+f(b)\,]+\int_a^b r(x)dx\,.$$

Погрешность формулы Симпсона имеет вид

$$R(f)=\int_a^b r(x)dx\,.$$

Если считать, что $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную четвёртого порядка, то из представления остаточного члена $r(x)$ интерполирования с кратными узлами, имеем

$$r(x)=\frac{1}{4!}(x-a)(x-c)^2(x-b)f^{(4)}(\xi),\quad a\le x,\xi\le b\,.$$

Поэтому

$$R(f)=\frac{1}{24}\int_a^b (x-a)(x-c)^2(x-b)f^{(4)}(\xi)dx\,.$$

Так как множитель $(x-a)(x-c)^2(x-b)$ не изменяет знак на отрезке $[a,b]$ и $f^{(4)}(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, то по теореме о среднем существует такая точка η, что

$$R(f)=\frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\int_a^b (x-a)(x-c)^2(x-b)dx=-\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta)\,. \quad (5.16)$$

Далее, разделим $[a,b]$ на чётное число n равных частей длины $h=\dfrac{b-a}{n}$ и возьмём сдвоенный частичный отрезок $[a+(k-1)h, a+(k+1)h\,]$. Тогда, учитывая, что $f_k=f(a+kh)$, имеем

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x)dx=\frac{h}{3}(f_{k-1}+4f_k+f_{k+1})+R_k\,.$$

Просуммировав по всем сдвоенным отрезкам $[a,a+2h]$, $[a+2h,a+4h],\ldots$, получим,

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{3n}[\,f_0+f_n+2(f_2+f_4+\ldots+f_{n-2})+4(f_1+f_3+\ldots+f_{n-1})]+R(f)\,,$$

и

$$R(f)=-\frac{1}{90}h^5[\,f^{(4)}(\eta_1)+f^{(4)}(\eta_3)+\ldots+f^{(4)}(\eta_{n-1})\,]\,.$$

Если функция $f^{(4)}(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такая точка ξ, что

$$\frac{2}{n}[\, f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_3) + \ldots + f^{(4)}(\eta_{n-1})\,] = f^{(4)}(\xi)$$

и для погрешности $R(f)$ получим выражение

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a \le \xi \le b\,. \tag{5.17}$$

Лекция 6 Вычисление кратных интегралов

1 Понятие о кубатурных формулах.
2 Кубатурная формула Симпсона и Гаусса.
3 Методы уточнения интегралов.

1 Понятие о кубатурных формулах

Пусть необходимо приближенно вычислить кратный интеграл

$$\int_G f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n\,.$$

Рассмотрим несколько способов построения формул численного интегрирования вида

$$\int_G f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \sum_{i=1}^{N} c_i(p_i) + R(f)\,. \tag{6.1}$$

Формулы (6.1) называются **кубатурными формулами**, а точки p_i называются **узлами кубатурной формулы**.

Рассмотрим вычисление **двойного** интеграла. Пусть область G интегрирования ограничена и непрерывна однозначными кривыми $y = \varphi(x)$; $y = \psi(x)$; $(\varphi(x) \le \psi(x))$ и двумя вертикалями $x = a, \quad y = b$.

Расставляя по известным правилам в двойном интеграле

$$I = \iint_G f(x, y)\,dxdy \tag{6.2}$$

пределы интегрирования будем иметь:

$$\iint_G f(x, y)\,dxdy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dxdy\,.$$

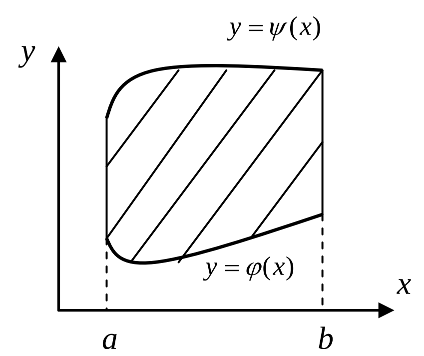


Рис. 1 Область интегрирования

Пусть

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy, \tag{6.3}$$

тогда

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \int_a^b F(x)dx. \tag{6.4}$$

Применяя к однократному интегралу, стоящему в правой части равенства (6.4) одну из квадратурных формул, получим:

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i), \tag{6.5}$$

где $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{1,n}$, A_i - некоторые постоянные коэффициенты.

В свою очередь $F(x_i) = \int_{\varphi(x_i)}^{\psi(x_i)} f(x,y)dy$ могут быть найдены по известным квадратурным формулам: $F(x_i) = \sum_{j=1}^{m_i} B_{ij} f(x_i, y_j)$, где B_{ij} – соответствующие постоянные.

Из формулы (6.5) получаем, что

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} A_i B_{ij} f(x_k, y_k), \tag{6.6}$$

где A_i и B_{ij} – известные постоянные.

Геометрически этот метод приближен к вычислению объема I, выражаемого формулой (6.2) с помощью поперечных сечений. Для кубатурных формул (6.6) сохраняют силу соответствующих изменениям общие замечания, относящиеся к вычислению однократного интеграла.

2 Кубатурные формулы Симпсона и Гаусса

2.1 Кубатурная формула Симпсона

Для простоты изложения допустим, что область G – прямоугольник $G = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и нужно вычислить интеграл

$$J = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy.$$

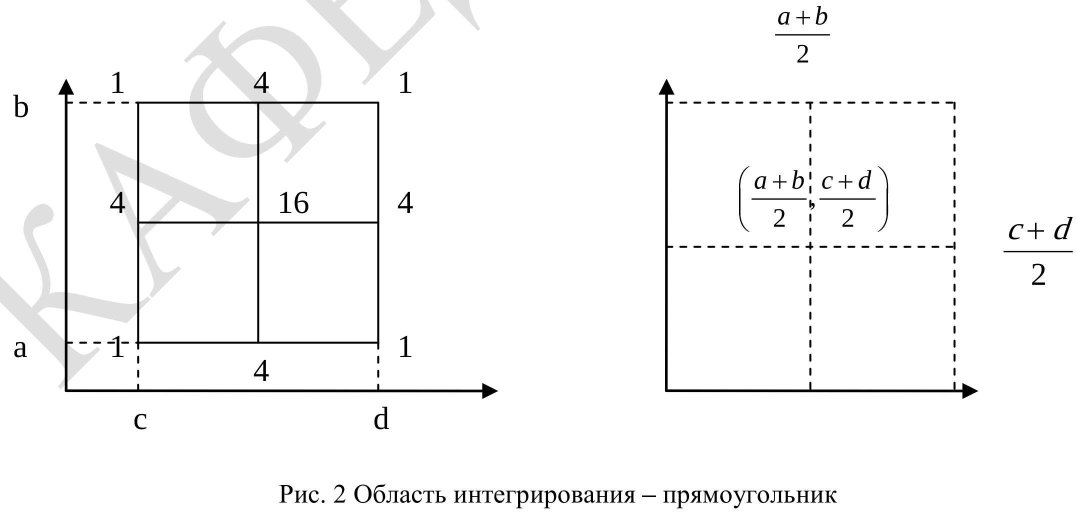


Рис. 2 Область интегрирования – прямоугольник

Представим этот интеграл в виде $J = \int_a^b F(x)dx$, где $F(x) = \int_c^d f(x,y)dx$. Для вычисления $J = \int_a^b F(x)dx$ воспользуемся квадратурной формулой Симпсона

$$J = \int_a^b F(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[F(a) + 4F(\frac{a+b}{2}) + F(b)\right] + R_1(F(x)), \qquad (6.7)$$

где

$$R_1(F(x)) = -\frac{(b-a)^5}{16\cdot 180}F^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{16\cdot 180}\int_c^d \frac{\partial^4 f(\xi, y)}{\partial x^4}dy =$$

$$= -\frac{(b-a)^5(d-c)}{16\cdot 180}\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^4}, \quad (a < \xi < b,\ c < \eta < d).$$

В свою очередь $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dx = \frac{d-c}{6}\left[f(x,c) + 4f(x,\frac{c+d}{2}) + f(x,d)\right] + R_y(f(x,y)),$$

где $R_y(f(x,y)) = -\frac{(d-c)^5}{16\cdot 180}\frac{\partial^4 f(x,\xi)}{\partial y^4}$. Подставляя выражение для $F(x)$ в (6.7), получим

$$J = \int_a^b F(x)dx = \frac{(b-a)(d-c)}{36}[f(a,c) + 4f(a,\frac{c+d}{2}) + f(a,d) + 4f(\frac{a+b}{2},c) +$$

$$+16f(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2}) + 4f(\frac{a+b}{2},d) + f(b,c) + 4f(b,\frac{c+d}{2}) + f(b,d)] -$$

$$-\frac{(b-a)(d-c)}{2^5\cdot 90}\cdot[(b-a)^4\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^4} + (d-c)^4\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta_1)}{\partial y^4} +$$

$$+\frac{(b-a)^4(d-c)^4}{2^5\cdot 90}\frac{\partial^8 f(\xi_2,\eta_2)}{\partial x^4\partial y^4}], \quad (a < \xi_i < b,\ c < \eta_i < d). \qquad (6.8)$$

Аналогично можно вычислить и интеграл более высокой кратности, причем по разным переменным можно использовать различные квадратурные формулы.

2.2 Кубатурная формула Гаусса

На практике для вычисления кратных интегралов удобнее использовать формулы, дающие высокую точность при минимальном числе узлов, например, формулы Гаусса. Возьмем в области G четыре узла для квадратуры Гаусса:

$$x_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ y_0 = \frac{c+d}{2} - \frac{d-c}{2\sqrt{3}},\ y_0 = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2\sqrt{3}}.$$

Тогда будем иметь

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \frac{(b-a)(d-c)}{4}[f(x_0,y_0) + f(x_0,y_1) + f(x_1,y_0) + f(x_1,y_1)]. \qquad (6.9)$$

Погрешность этой формулы определится соотношением

$$R(f(x,y)) = \frac{(b-a)(d-c)}{24^3\cdot 5}[(b-a)^4\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^4} + (d-c)^4\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta_1)}{\partial y^4} -$$

$$-\frac{(b-a)^4(d-c)^4}{24^3\cdot 5}\frac{\partial^8 f(\xi_2,\eta_2)}{\partial x^4\partial y^4}]. \qquad (6.10)$$

Таким образом, остаток кубатурной формулы Гаусса, построенной по четырем точкам, может оказаться меньше остатка кубатурной формулы Симпсона, построенной для девяти точек.

2.3 Метод замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом

Заменим в интеграле $J = \iint_G f(x,y)dxdy$ функцию $f(x,y)$ интерполяционным многочленом вида

$$L(x,y)=\sum_{i=1}^{N} f(x_i,y_i)L_i(x,y)\text{ , где } L_i(x_i,y_j)=\begin{cases}1, & при\ \ i=j\\ 0, & при\ \ i\neq j\end{cases}.$$

После замены подынтегральной функции получим

$$J=\iint_G f(x,y)dxdy=\iint_G L(x,y)dxdy+\iint_G R(f(x,y))dxdy=$$

$$=\sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i,y_i)+\overline{R}(f(x,y))\text{ , где } c_i=\iint_G L_i(x,y)dxdy\ .$$

Если область G – прямоугольник, на котором построена равномерная сетка $x_i=a+ih,\ \ y_j=c+j\,l,\quad h=\dfrac{b-a}{n},\ \ l=\dfrac{d-c}{m}$, тогда

$$L(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(x_i,y_j)\frac{\omega_{n+1}(x)\omega_{n+1}(y)}{(x-x_i)(y-y_j)\omega'_{n+1}(x_i)\omega'_{n+1}(y_j)}+R(f(x,y))\,.$$

Проводя интегрирование по формуле прямоугольника, получим

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_{ij} f(x_i,y_j)+\overline{R}(f(x,y))\,, \qquad (6.11)$$

где

$$c_{ij}=\int_a^b\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}dx\int_c^d\frac{\omega_{n+1}(y)}{(y-y_j)\omega'_{n+1}(y_j)}dy\,.$$

Следовательно, $c_{ij}=(b-a)(d-c)B_i^n B_j^m$, где $B_i^n,\ \ B_j^m$ – коэффициенты Ньютона-Котеса.

3 Методы уточнения интегралов

В тех случаях, когда известно разложение погрешности квадратичной формулы в степенной ряд по h приблизительное значение интеграла можно уточнить, проводя точное вычисление коэффициентов ряда.

3.1 Формула Эйлера

Рассмотрим функцию $\phi(x)=\dfrac{xe^{ix}}{e^x-1}$. Возьмем ее разложение в равном сходящемся по x ряд при $|x|\le a<2\pi$. Запишем $xe^{ix}\dfrac{1}{e^x-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B_n(i)}{n!}x^n$, где коэффициенты $B_n(i)$ ряда называют многочленами Бернулли, а их значения при $i=0$ – числом Бернулли**,**
$B_n=B_n(0)$, $B_0=1$.

Значение чисел Бернулли можно получить используя рекуррентную формулу для чисел Бернулли:

$$\frac{i^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{B_{n-1}(i)}{1!(n-1)!}+\frac{B_{n-2}(i)}{2!(n-2)!}+...+\frac{B_0(i)}{n!i!}\,.$$

Пусть $f(x)$ достаточно гладкая на $[a,b]$ функция, тогда можно показать, что имеет место формула:

$$\int_a^{a+h} f(x)dx=\frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)]-\frac{B_2h^2}{2!}[f'(a+h)-f'(a)]-\frac{B_4h^4}{4!}[f^{(3)}(a+h)-f^{(3)}(a)]-...-$$

$$-B_{2r}h^{2r}\frac{1}{(2r)!}[f^{(3r-1)}(a+h)-f^{(3r-1)}(a)]+R_{2r}\,.$$

После суммирования по всем $\left[a,\dfrac{a+nh}{b}\right]$получаем:

$$\int_a^{a+nh} f(x)dx = h[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(\frac{a+nh}{b})]-\frac{B_2h^2}{2!}[f(b)-f'(a)]-$$

$$-\frac{B_4h^4}{4!}[f^{(3)}(b)-f^{(3)}(a)]-\ldots-\frac{B_{2r}h^{2r}}{(2r)!}[f^{(2r-1)}(b)-f^{(2r-1)}(a)]-nh^{2r+3}\frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!}f^{(2r+2)}(\xi). \quad (6.12)$$

Формула (6.12) называется формулой Эйлера. Она позволяет уточнить значение интеграла, вычисляя по формуле трапеции путем вычисления производных от подынтегральной функции на концах отрезка.

3.2 Экстраполяционная формула Ричардсона

Рассмотрим способ уточнения интегралов, основанный на приблизительном вычислении коэффициентов в разложении погрешности квадратурного правила.

Пусть погрешность $R\left[f\right]$ имеет вид: $R\left[f\right]=Mh^m$, где M – некоторая постоянная, подлежащая определению, h – шаг интерполирования, m – показатель точности квадратурного правила, $m>0$.

Пусть интеграл вычислен для значений n_1 и n_2, где $n_1<n_2$. Значит $h_1=\frac{b-a}{n_1}, h_2=\frac{b-a}{n_2}$.

Согласно предположению о структуре погрешности, имеем

$$\begin{cases} R_{n_1}[f]=I-I_{n_1}=Mh^m; \\ R_{n_2}[f]=I-I_{n_2}=Mh^m; \end{cases}$$

где I – точное значение интеграла, то для постоянной M получим выражение:

$M=(I_{n_2}-I_{n_1})=\frac{n_1^m n_2^m}{(b-a)^m(n_2^m-n_1^m)}$ и, следовательно, для погрешности: $R[f]=\frac{I_{n_2}-I_{n_1}}{n_2^m-n_1^m}n_1^m$,

значит, в качестве уточненного значения интеграла можно взять выражение:

$$I_{n_1n_2}=I_{n_2}+\frac{n_1^m}{n_2^m-n_1^m}(I_{n_2}-I_{n_1}) \quad (6.13)$$

Указанный способ уточнения интегралов называют экстраполяцией по Ричардсону. На практике, в качестве n_2 можно брать значение $n_2=2n$, следовательно, формула (13) примет вид:

$$I_{n_1n_2}=I_{n_2}+\frac{n_1^m}{n_2^m-n_1^m}\ . \quad (6.14)$$

Формула трапеций получается при $m=2$.

3.3 Формула Ромберга

Последующее применение формулы Ричардсона позволяет уточнить значение интеграла.

Пусть известно, что для погрешности квадратурного правила справедливо разложение:

$$I_n=I+a_1h^{\alpha_1}+\ldots+a_mh^{\alpha_m}+o(h^{(\alpha_m+1)}), \quad (6.15)$$

где $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_m$.

Будем считать, что приближенное значение α_i вычисляется для последовательности шагов $h_0,h_1,\ldots,h_m$, где $h_k=qh_{k-1}=q^kh_0$.

Обозначим $J^{(0)}=I, J_{n_2}^1=I_{n_2}$, следовательно

$$I_{n_2}=I+a_1h^{\alpha_1}+\ldots+a_nh^{\alpha_m}+o(h^{(\alpha_m+1)})\ . \quad (6.16)$$

Рассмотрим (15) для двух соседних значений $J_{n_k}{}^{(1)}, J_{n_k}^{(2)}$

$$I^{(1)}{}_{n_k-1} = I + a_1 h^{\alpha_1} + \ldots + a_n h^{\alpha_m} + o(h^{(\alpha_m+1)});\; I^{(1)}{}_{n_k} = I + a_1 h^{\alpha_1} + \ldots + a_n h^{\alpha_m} + o(h^{(\alpha_m+1)})$$

Исключая a_1 имеем: $J^{(1)}{}_{n_k} - q^{\alpha_1} J^{(1)}_{n_k-1} = J(1-q^{\alpha_1}) + o(h^{\alpha_2}_{k-1})$.

Следовательно, в качестве уточненного значения можно взять:

$$J^{(2)}{}_{n_r-1} = J^{(1)}_{n_k-1} + \frac{1}{1-q\alpha_1}(J^{(j)}_{n_k} - J^{(L)}_{n_k-1}). \tag{6.17}$$

Описанный процесс можно продолжать, вычисляя J^j_m по формулам:

$$J^{(j+1)}_{n_k-1} = J^{j}_{n_k-1} + \frac{1}{1-q^{\alpha_1}}(J^{(j)}_{n_k} - J^{(j)}_{n_k-1}). \tag{6.18}$$

где $j=\overline{1,n}$; $k=\overline{1,n-j+1}$; $\quad J^1_{n_k} = J_{n_k}, k=\overline{0,m}$.

Заметим, что значение $J^j_{n_k}$ совпадает с точным значением J с погрешностью порядка $o(h^j)$.

Примерно к квадратурному правилу трапеции, описанный метод уточнения интегралов, называют методом Ромберга. Постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ различные для квадратурного правила трапеции определяется формулой Эйлера.

Лекция 7 Методы решения нелинейных уравнений

1 Отделение корней.
2 Методы итераций, хорд и Ньютона.
3 Комбинированный метод.

При решении уравнений вида

$$f(x) = 0, \tag{7.1}$$

где f – известная функция действительного или комплексного аргумента, требуется знать область существования корней и метод их нахождения. Большинство методов отыскания корней уравнения (7.1) предполагает, что заранее известны достаточно малые окрестности, в каждой из которых имеется только один корень уравнения, т.е. корень отделен. Принимая за начальное приближение корня одну из точек этой окрестности можно с помощью приближенных методов вычислить искомый корень с заданной точностью. Следовательно, задача приближенного вычисления корней уравнения (7.1) состоит из двух задач:

– задачи отделения корней, т.е. отыскания достаточно малых областей, в каждой из которых заключен только один корень уравнения (7.1);

– вычисления корня с заданной точностью, если известно некоторое начальное его приближение в области, не содержащей других корней.

1 Отделение корней

Пусть дано уравнение (7.1). Будем предполагать, что оно имеет лишь изолированные корни, т. е. для любого корня уравнения (7.1) существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения. **Отделить корень** – это значит разбить всю область допустимых значений на отрезки, в каждом из которых содержится только один корень. Отделение корней можно выполнять двумя способами**: графически** и **аналитически**.

1.1 Графический метод отделения корней

Графический способ обычно применяется для отделения действительных корней уравнения (7.1). Для графического метода отделения корней существует два способа:

1. Строям график функции $y = f(x)$ (Рис. 1).

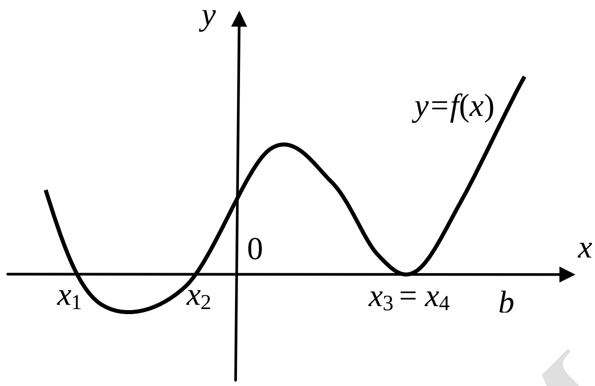


Рис. 1 Первый способ отделения корней

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью OX будут грубыми значениями корней уравнения (7.1). За окрестности корней принимаются интервалы, внутри которых находится единственный корень.

2. Сначала уравнение (7.1) представляется в виде $\varphi(x) = g(x)$, причем функции φ и g выбираются так, чтобы графики этих функций строились просто. Потом строятся графики $y = \varphi(x)$ и $y = g(x)$ (Рис. 2). Абсциссы точек пересечения этих графиков будут приближенными значениями корней. Затем выделяют интервалы внутри, которых находится только один корень.

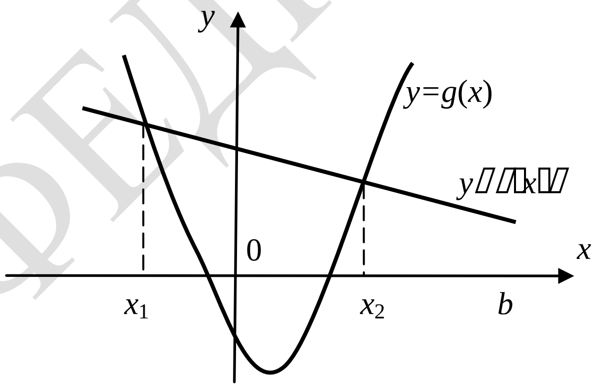


Рис. 2 Второй способ отделения корней

Для отыскания комплексных корней уравнения вида

$$f(z) = 0, \qquad (7.2)$$

можно, положив $z = x + iy$, представить уравнение (2) в виде

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = 0,$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – действительные функции действительных переменных x и y. Тогда это уравнение равносильно решению системы двух уравнений

$$\begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ \psi(x,y)=0 \end{cases}.$$

Построив кривые $\varphi(x,y)=0$ и $\psi(x,y)=0$, получим действительные и мнимые части корней уравнения (7.2) как соответственно абсциссы и ординаты их точек пересечения.

1.2 Аналитический метод отделения корней

Аналитически корень уравнения можно определить, используя некоторые свойства функции, изучаемы в курсе математического анализа. Если в уравнении (7.1) функция $y = f(x)$ непрерывная, то следует воспользоваться следующими известными фактами:

1 – Если на концах некоторого отрезка непрерывная функция принимает значения разных знаков, то на этом отрезке уравнение (7.1) имеет, по крайней мере, один корень.

2 – Если при этом функция имеет первую производную, не меняющую знака, то корень будет единственным.

3 – Пусть аналитическая функция $y = f(x)$ на концах $[a,b]$ принимает значения разных знаков, т. е. $f(a)f(b)<0$, то между a и b имеется нечетное число корней уравнения (7.1); если же на концах $[a,b]$ функция принимает значения одинаковых знаков, т. е. $f(a)f(b)>0$, то между a и b или нет корней, или их имеется четное число (с учетом кратности);

Для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ можно предложить следующий порядок действий для отделения корней аналитическим методом:

1. Найти $f'(x)$ и определить критические точки.
2. Составить таблицу знаков функции $f(x)$, полагая x равным:
   а) критическим значениям производных или ближайшим к ним;
   б) граничным значениям области допустимых значений неизвестных.
3. Отделить интервалы, на концах которых функция принимает значения разных знаков. Внутри этих интервалов содержится по одному корню.

Пример.

$$f(x)=x^3-2x+1=0,\ f'(x)=3x^2-2=0,\ \ x_1=\sqrt{\frac{2}{3}},\ x_2=-\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$sign(f(x))$	-	-	+	+	+

Данное уравнение имеет один корень, принадлежащий отрезку $[-2,-1]$.

1.2.1 Определение числа действительных корней

Пусть дано алгебраическое уравнение n степени

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, \tag{7.3}$$

где $a_0, a_1,..., a_n$ – действительные коэффициенты.

Определить приближенно **число** действительных корней уравнения (7.3) можно с помощью **правила Декарта**: Число положительных корней уравнения (7.3) с учетом их кратностей равно числу перемен знаков в последовательности коэффициентов $a_0, a_1,..., a_n$ (причем равные нулю коэффициенты не учитываются) или меньше этого числа на четное число. Для определения числа отрицательных корней достаточно применить правило Декарта к многочлену $f(-x)$.

Более точно число корней уравнения (7.3) можно определить, **используя теорему Штурма**: Пусть уравнение (3) не имеет кратных корней на некотором отрезке $[a,b]$. Обозначим через $f_1(x)$ производную $f'(x)$; через $f_2(x)$ остаток от деления $f(x)$ на $f_1(x)$, взятый с обратным знаком; через $f_3(x)$ остаток от деления $f_1(x)$ на $f_2(x)$, взятый с обратным знаком; и т.д. до тех пор, пока не получим $f_n(x) = const$. Получился так называемый ряд Штурма:

$$f(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\dots,\ f_n(x). \tag{7.4}$$

Число действительных корней уравнения (7.3), расположенных на отрезке $[a,b]$, равно разности между числом перемен знаков в последовательности (7.4) при $x = a$ и числом перемен знаков в последовательности (7.) при $x = b$.

Практическое применение теоремы Штурма сводится к следующему: Определяются границы отрезка, на котором расположены действительные корни уравнения (7.3) и их число. Полученный отрезок $[a,b]$ делится на некоторое число частей точками α_i: $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = b$. Рассматривая отрезок $[\alpha_i, \alpha_{i-1}]$ по теореме Штурма, определяется число корней на этом отрезке. Если окажется, что их больше одного, то этот отрезок делится пополам и теорема Штурма применяется к каждому полученному отрезку. Процесс продолжается до тех пор, пока на каждой части отрезка $[a,b]$ уравнение (7.3) будет иметь не больше одного действительного корня.

Пример. Отделить корни уравнения

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 4x - 3 = 0.$$

Находим выражения: $f_1(x) = 3x^2 - x - 1$, $f_2(x) = 26x + 29$, $f_3(x) = -1$. Составляем таблицу.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$sign\ f(x)$	-	-	-	+	+
$sign\ f_1(x)$	+	-	+	+	+
$sign\ f_2(x)$	-	+	+	+	+
$sign\ f_3(x)$	-	-	-	-	-
Число перемен знаков	2	2	2	1	1

Из таблицы видно, что действительный корень один и находится он в интервале $(1,2)$.

2 Методы итераций, хорд и Ньютона

Все методы уточнения основаны на последующем приближении. Обычно используют метод: итераций, хорд, Ньютона, комбинаторный.

2.1 Метод итераций

Уравнение (7.1) заменяется равносильным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \tag{7.5}$$

Допустим, нам известно некоторое начальное приближение x_0. Тогда, в простейшем методе итераций, все дальнейшие приближения строятся по формуле

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0,1,2,\dots . \qquad (7.6)$$

Если последовательность (7.6) сходится при некотором выборе начального приближения x_0, то существует предел $\xi = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ и предполагая функцию $\varphi(x)$ непрерывной, найдем

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \varphi(\lim\limits_{k\to\infty} x_{k-1})$ или $\xi = \varphi(\xi)$. Таким образом, ξ является корнем уравнения (7.5) и может быть вычислен по формуле (7.6) с любой степенью точности.

Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости xOy графики функций $y = x$ и $y = \varphi(x)$. Каждый действительный корень ξ уравнения (7.5) является абсциссой точки пересечения кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$. Следующие два рисунка поясняют сходящийся итерационный процесс (Рис.3, Рис. 4).

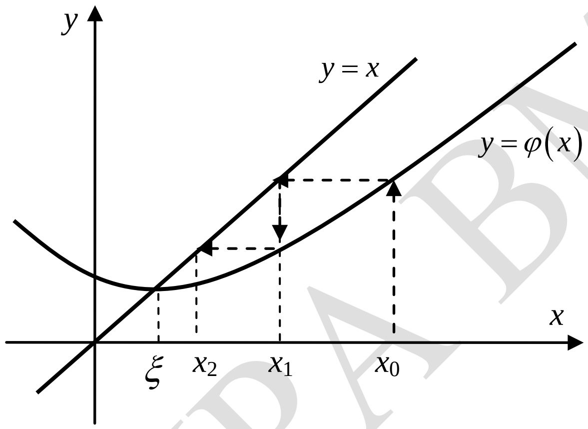


Рис. 3 Сходящийся процесс при $0 < \varphi'(x) < 1$

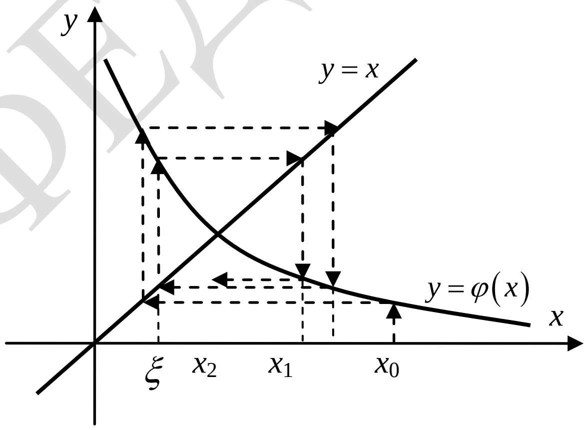


Рис. 4 Сходящийся процесс при $\varphi'(x) < 0$, но $|\varphi'(x)| < 1$

На рисунках 5 и 6 схематично изображен расходящийся итерационный процесс.

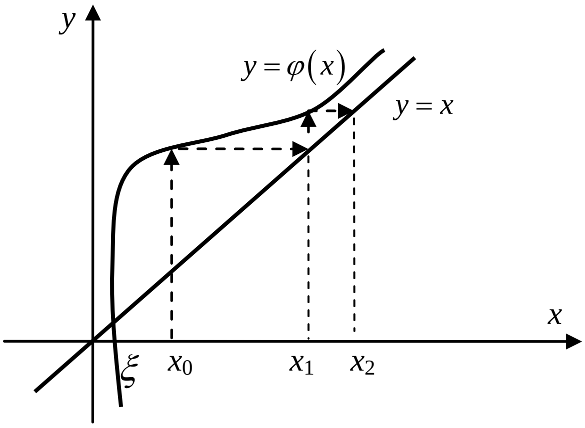


Рис. 5 Расходящийся процесс при $\varphi'(x)<1$

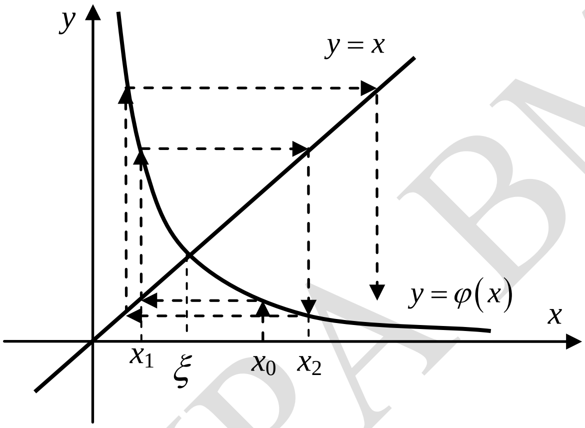


Рис. 6 Расходящийся процесс при $|\varphi'(x)|>1$

Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

Теорема: Пусть $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на $[a,b]$ и все её значения принадлежат отрезку $[a,b]$. Если существует такое q, что

$$|\varphi'(x)| \le q < 1, \tag{7.7}$$

то **итерационный процесс (7.6) сходится к единственному корню** на $[a,b]$.

Для скорости сходимости итерационного процесса, справедливы соотношения

$$|\xi - x_n| \le q^n |\xi - x_0| \tag{7.8}$$

$$|\xi - x_n| \le \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \tag{7.9}$$

$$|\xi - x_0| \le \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}|. \tag{7.10}$$

Из (7.8) следует, что метод сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q. Формула (7.9) позволяет определить достаточное число итераций n при выбранном $|x_1 - x_0|$. На практике для оценки сходимости удобно пользоваться (7.10). Так, если $\varepsilon > 0$ $|x_n - x_{n-1}| \le \dfrac{1-q}{q}\varepsilon$, то корни уравнения определяются с точностью до ε.

Обычно для получения $\varphi(x)$ пользуются следующим способом приведения (7.1) к виду (7.5). Строят уравнение

$$x = x - \lambda f\left(x\right) \qquad (7.11)$$

где λ – параметр. Пусть $f'(x)$ постоянного знака на отрезке $[a,b]$. Для нахождения λ положим

$$\lambda=\begin{cases} \dfrac{k}{M_1}, & f'(x)>0 \\ \dfrac{-k}{M_1}, & f'(x)<0 \end{cases}, \; k=1,2..., \; M_1=\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|,$$

В этом случае будет верно $\left|\varphi'(x)\right|<1$, значит итерационный процесс по формуле (7.11) будет сходящимся.

2.2 Метод хорд

Пусть дано уравнение (7.1) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ функцией $f(x)$ и ее производными $f'(x)$, $f''(x)$. Корень считается отделённым на $[a,b]$ и притом единственным.

Рассмотрим случай, когда $f'(x)$, $f''(x)$ – одного знака. Пусть для определенности $f\left(a\right)<0<f\left(b\right)$, $f'(x)>0, f''(x)>0$, т.е. $f'(x)f''(x)>0$. График функции $y=f(x)$ проходит через точки $A_0(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ (Рис. 8).

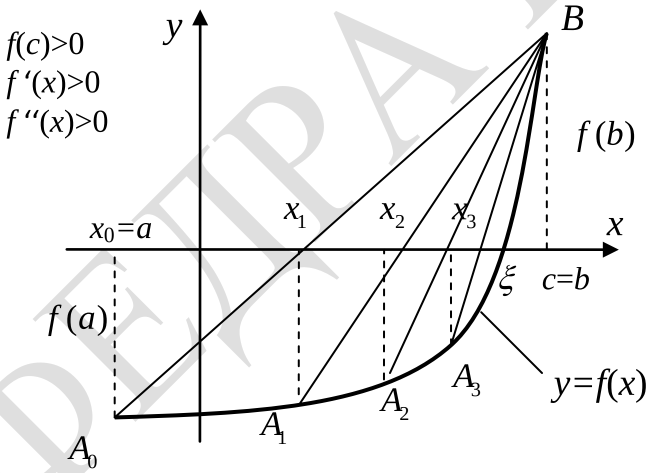


Рис. 8 Иллюстрация метода хорд $f(c)f''(c)>0$

Искомый корень ξ уравнения $f(x)=0$ – есть абсцисса пересечения графика $y=f(x)$ с осью OX. Эта точка нам известна, но вместо нее можно взять точку x – точку пересечения хорды A_0B с осью OX. Это и будет первое приближение к корню ξ. Уравнение хорды, проходящей через две точки A_0 и B, запишется:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}.$$

Положив $y=0$, найдем $x=x_1$

$$x=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Однако последовательные приближения при этом можно вычислить по следующей итерационной формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - c)}{f(x_n) - f(c)}. \qquad (7.12)$$

В формуле (7.12) точка c является неподвижной и в качестве ее берется тот конец $[a,b]$, для которого выполняется условие $f(c)f''(c) > 0$, а за начальное приближение x_0 выбирается противоположный конец $[a,b]$, так что $f(x_0)f(c) < 0$ (в нашем случае $c = b,\ x_0 = a$).

Описанный метод называется также **методом секущих** или методом линейной интерполяции. Последовательные приближения в методе хорд образуют – монотонную, ограниченную сверху или снизу корнем ξ последовательность. При этом справедлива оценка:

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|, \qquad (7.13)$$

где $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| f'(x) \right|$, $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} \left| f'(x) \right|$. Оценка (7.13) позволяет на каждом шаге следить за достигнутой точностью.

При решении задачи на ЭВМ целесообразно $[a,b]$ **выбирать столь малым, чтобы выполнялось условие** $M_1 \le 2m_1$**.** В этом случае итерационный процесс сходится быстро.

Метод хорд (секущих) можно рассматривать, как метод итерации для эквивалентного уравнения:

$$x = x - \frac{f(x)(x-c)}{f(x) - f(c)} = \varphi(x), \text{ где } f(c)f''(c) > 0.$$

Геометрически этот метод состоит в том, что значение x_{n+1} есть абсцисса точки пересечения прямой, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_n, f(x_n))$ с осью *Ox*. Графическая иллюстрация метода приведена на рисунках 8-11.

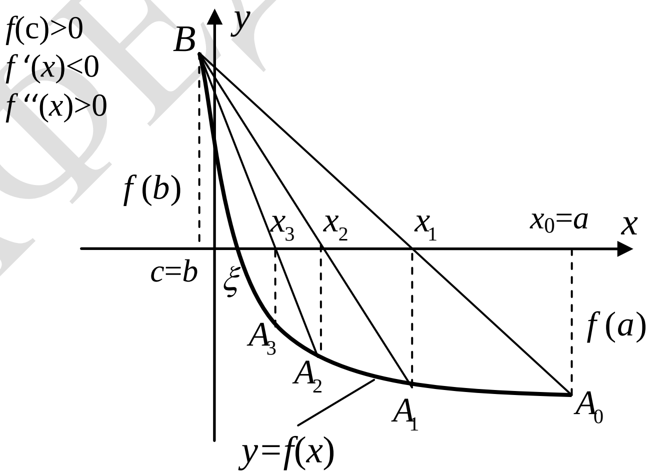


Рис. 9 Иллюстрация метода хорд $f(c) > 0,\ \ f'(c) < 0$

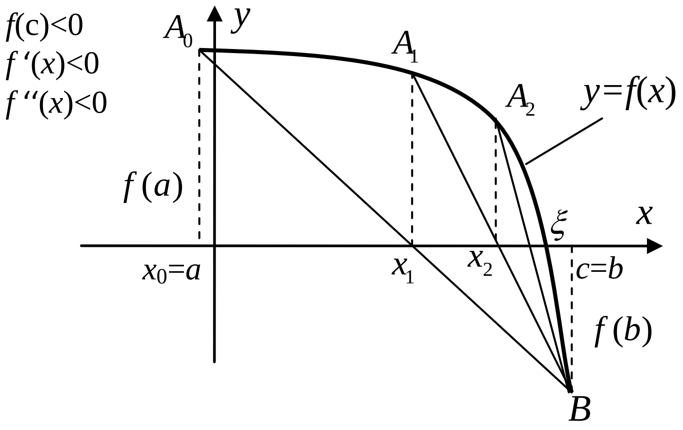


Рис. 10 Иллюстрация метода хорд $f(c)<0,\ \ f'(c)<0$

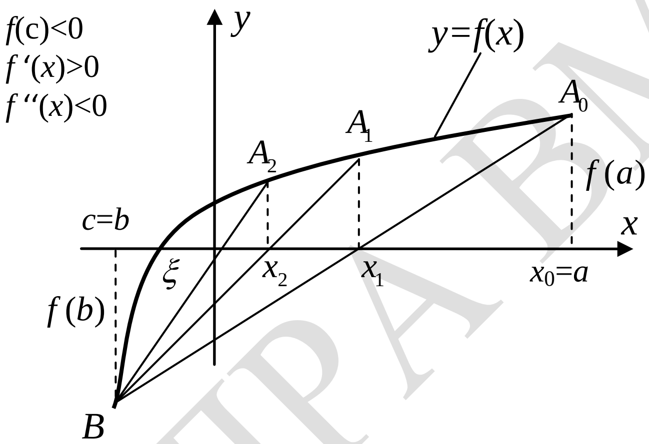


Рис. 11 Иллюстрация метода хорд $f(c)<0,\ \ f'(c)>0$

Из приведенного выше следует, что выбор неподвижной точки осуществляется следующим образом:

1 – неподвижен тот конец отрезка, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$.

2 – последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня ξ, где функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку ее второй производной $f''(x)$.

В обоих случаях каждое следующее приближение x_{n+1} ближе к корню ξ, чем предшествующее x_n.

2.3 Метод Ньютона

Метод Ньютона (касательных) позволяет привести решение нелинейных уравнений к решению последовательности линейных задач. Достигается это при помощи выделения из нелинейного уравнения его главной линейной части.

Пусть корень уравнения (7.1) отделен на $[a,b]$, причем $f'(x),\ f''(x)$ непрерывны и сохраняют определенные знаки и $f'(x)$ не обращается в нуль на $[a,b]$. Метод Ньютона заключается в том, что кривая уравнения $y=f(x)$ заменяется касательной к ней. Имея n-ое приближение корня $\xi \approx x_n \in [a,b]$, уточним его по методу Ньютона следующим образом: положим

$$\xi = x_n + h_n, \tag{7.14}$$

где h_n считаем малой величиной. Теперь, применяя формулу Тейлора, получим

$$f(\xi) = 0 = f(x_n + h_n) = f(x_n) + h_n f'(x_n).$$

Откуда следует, что

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Внося эту поправку в формулу (14), найдем следующее приближение корня

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0,1,2,\dots. \tag{7.15}$$

Геометрически метод Ньютона (7.15) эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке касания (Рис. 12).

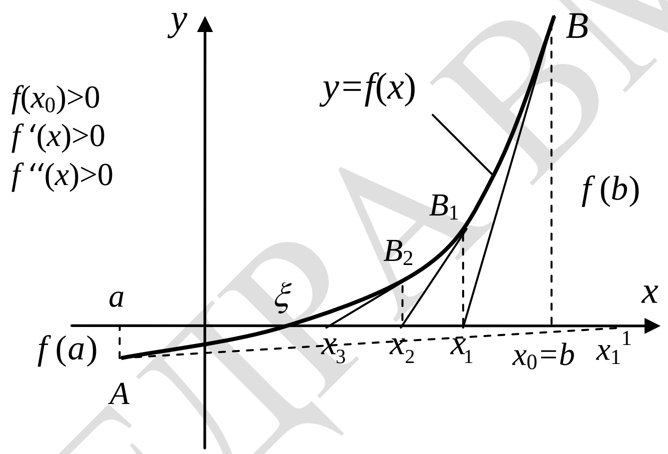


Рис. 12 Иллюстрация метода Ньютона

Если положить (см. Рис. 12) $x_0 = a$ и, следовательно, $f(x_0)f''(x_0) < 0$ то, проведя касательную к кривой $y = f(x)$ в точке $A(a, f(a))$, получили бы точку x_1^1, лежащую **вне** отрезка $[a,b]$, и можем не прийти к корню $\xi \approx x_n \in [a,b]$ уравнения (7.1). Поэтому за начальное приближение x_0 в формуле (7.15) выбирается тот конец отрезка $[a,b]$, для которого знак функции совпадает со знаками второй производной, т. е. $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Теорема. Если $f(a)f(b) < 0$, причем $f'(x)$, $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при $x \in [a,b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0) > 0$, то можно вычислить методом Ньютона по формуле (7.15) единственный корень ξ уравнения (7.1) с любой степенью точности.

Из формулы (7.15) видно, что чем больше численное значение производной $f'(x)$ в окрестности данного корня, тем меньше поправка, которую нужно прибавить к n -му приближению, чтобы получить $(n+1)$ -ое приближение. Поэтому метод Ньютона особенно удобно применять тогда, когда в окрестности данного корня график функции имеет большую крутизну. Но, если численное значение производной $f'(x)$ близ корня мало, то поправки будут велики, и вычисление корня по этому методу может оказаться очень долгим, а иногда и вовсе невозможным. Следовательно, если кривая $y = f(x)$ вблизи точки пересечения с осью Ox почти горизонтальна, то применять метод Ньютона для решения уравнения (7.1) не рекомендуется.

Для оценки погрешности n -го приближения x_n можно воспользоваться формулой

$$|\xi - x| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1} \tag{7.16}$$

или формулой

$$|\xi - x| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2, \tag{7.17}$$

где $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|$.

В общем случае совпадение с точностью до ε двух последовательных приближений x_n и x_{n+1} вовсе не гарантирует, что с той же точностью совпадает значение x_{n+1} и корень ξ (Рис. 13).

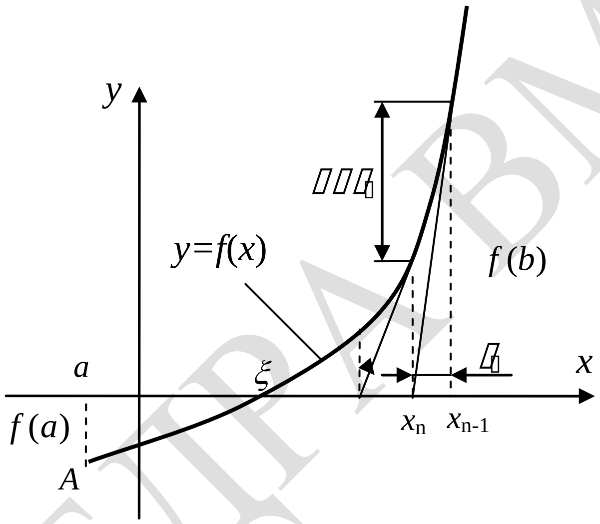


Рис. 13 О двух последовательных приближениях

Оценки (7.16), (7.17) указывают на квадратичную сходимость метода Ньютона. Поэтому если $f'(x)$ мало меняется на $[a,b]$, то можно пользоваться видоизмененной формулой Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0,1,2,... \tag{7.18}$$

В этом случае для получения требуемой точности в отличии от формулы (7.15) необходимо сделать лишь несколько дополнительных шагов.

3.3 Комбинированный метод

Комбинируя метод секущих и метод Ньютона, получается нестационарный метод отыскания действительных корней уравнения (7.1). Преимущество получаемого метода заключается в том, что при прежних предположениях относительно $f'(x)$, $f''(x)$ последовательные приближения x_n и x_{n+1} лежат по разные стороны от корня, и поэтому можно следить в процессе вычислений за достигнутой точностью. В то же время он сходится значительно быстрее метода секущих.

Пусть на отрезке $[a,b]$ содержится единственный корень уравнения (7.1), а $f'(x)$, $f''(x)$ на этом отрезке не меняют знаков.

Если $f(a)\,f''(a) > 0$, то находим x_0 и x_1 по формулам:

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \tag{7.19}$$

а следующие приближения находятся по формулам:

$$x_{2n} = x_{2n-2} - \frac{f(x_{2n-2})}{f'(x_{2n-2})}, \quad x_{2n+1} = \frac{x_{2n-2}\,f(x_{2n-1}) - x_{2n-1}\,f(x_{2n-2})}{f(x_{2n-1}) - f(x_{2n-2})}. \tag{7.20}$$

Если $f(b)\,f''(b) > 0$, то находим x_0 и x_1 по формулам:

$$x_0 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}, \tag{7.21}$$

а следующие приближения находятся по формулам (20).

Геометрическая интерпретации комбинированного метода выглядит следующим образом:

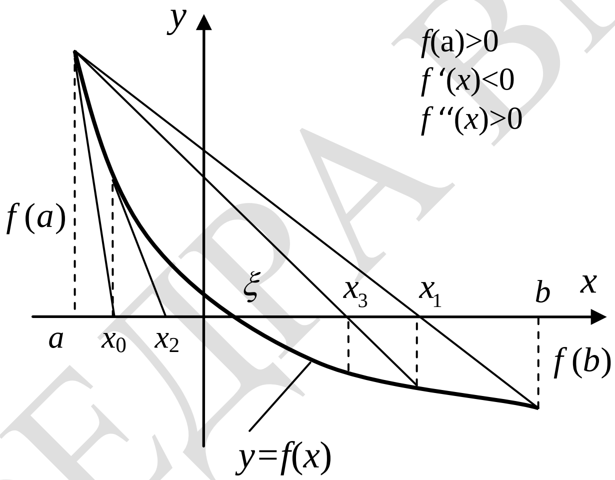


Рис. 14 Комбинированный метод $f(a) > 0, \ f'(x) < 0$

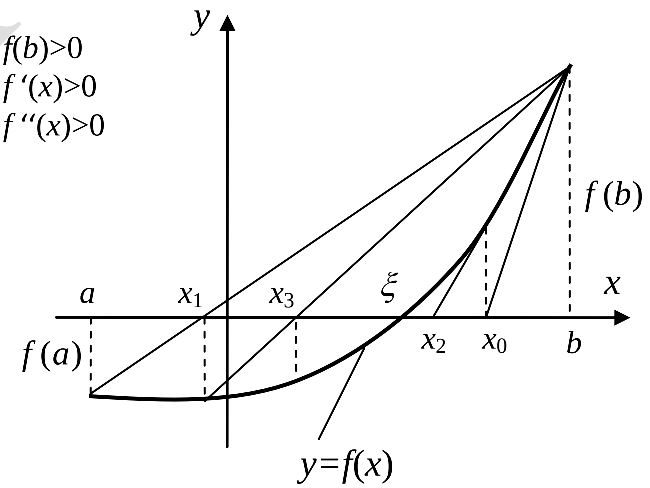


Рис. 15 Комбинированный метод $f(b) > 0, \ f'(x) > 0$

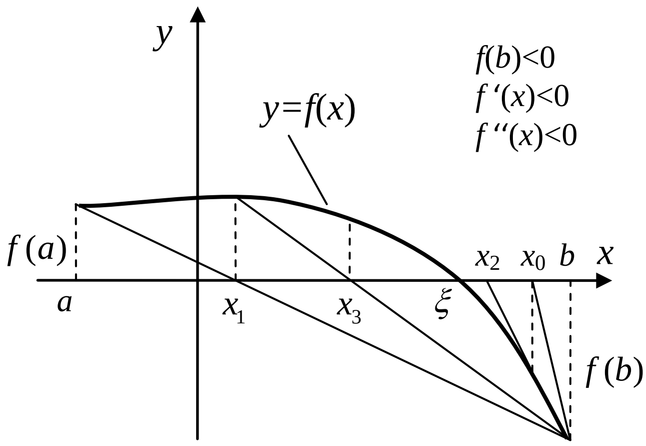


Рис. 16 Комбинированный метод $f(b) < 0, \; f'(x) < 0$

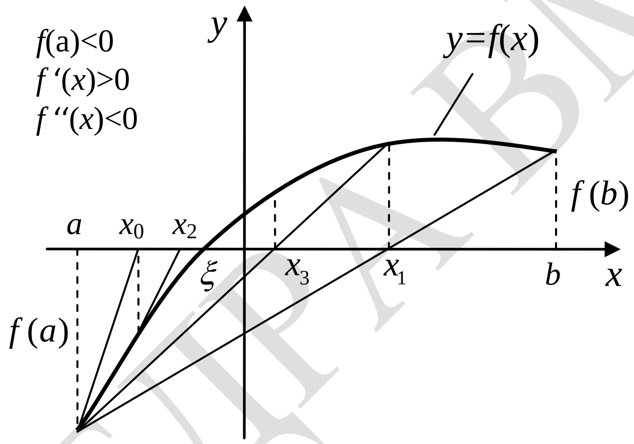


Рис. 17 Комбинированный метод $f(a) < 0, \; f'(x) > 0$

Пример. Методом хорд и Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ решить уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0 .$$

Решение. Определим по правилу Декарта число положительных и отрицательных корней. Пусть $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$. Имеем два положительных коэффициента (1 и 3) и один отрицательный (-3) коэффициент. Но тогда уравнение $f(x) = 0$ имеет, по крайней мере, один положительный корень, т.к. имеется только одна перемена знака. Теперь, заменяя x на $-x$, получим, что в коэффициентах уравнения $f(-x) = -x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ имеется две перемены знака, а это означает, что данное уравнение имеет два отрицательных действительных корня.

Отделение корней проведем аналитически. Функция $f(x)$ определена для любых x. Найдем производные, а затем критические точки:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x , \qquad f'(x) = 0 , \Rightarrow \; x(x+2) = 0 , \Rightarrow \; x = 0 \text{ и } x = -2 .$$

Составим таблицу знаков для функции $f(x)$:

x	$-\infty$	-3	-2	1	0	+1	$+\infty$
Sign f(x)	–	–	+	–	–	+	+

Имеется три перемены знака, следовательно, действительные корни лежат в интервалах: (-3,-2), (-2,1) и (0,1).

Теперь перейдем непосредственно к вычислению корней. При вычислениях будем использовать видоизменение метода Ньютона (18) с постоянным значением производной:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0,1,2,... \tag{7.22}$$

Для окончания счета по методу хорд или методу Ньютона воспользуемся зависимостью

$$|\xi - x_n| \le |x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon .$$

Но для этого сначала надо проверить, что для выбранного интервала выполняется условие $M_1 \le 2m_1$, где $M_1 = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, $m_1 = \min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

Возьмем сначала промежуток $[-3,-2]$. Имеем

$$M_1 = \max_{x\in[-3,3]} |f'(x)| = 3 \max_{x\in[-3,3]} |x^2 + 2x| = 9, \; m_1 = \min_{x\in[-3,3]} |3(x^2 + 2x)| = 0 .$$

Значит, $M_1 > 2m_1$.

Разделим данный промежуток на две части и рассмотрим отрезки $[-3,-2.5]$ и $[-2.5,-2]$. На первом промежутке функция меняет знак (значит здесь лежит корень уравнения), а на втором – нет. Тогда для первого промежутка $M_1 = 9$ и $m_1 = 3.75$. Опять имеем $M_1 > 2m_1$. Снова разбиваем интервал на две части и после проверки знаков функции остается промежуток $[-2.75,-2.5]$, на котором $M_1 = 6.189$ и $m_1 = 3.75$, но тогда $M_1 < 2m_1$.

Теперь уточним корень, лежащий на отрезке $[-2.75,-2.5]$ по:

– методу хорд (секущих) по формулам (7.12)

$$x_1 = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)} \text{ и } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)},$$

где $a = -2.75, \quad f(a) = -1.10938$.

Проделав вычисления, получим, что $\xi \approx x_n \approx -2.532$.

– методу Ньютона (касательных), применяя формулу (7.22), учитывая, что $f(-2.75) f''(-2.75) > 0$ и $x_0 = -2.75$, получим $\xi \approx x_n \approx -2.533$.

Результаты вычислений по обоим методам приведены в таблице.

Таблица вычислений

Метод хорд				Метод Ньютона		
n	x_n	$-\dfrac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)}$		n	x_n	$-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_0)}$
0	-2.5	-0.02532		0	-2.75	
1	-2.52532	-0.00537		1	-2.57071	0.17929
2	-2.53069	-0.00111		2	-2.54436	0.02634
3	-2.5318	-0.00023		3	-2.53623	0.00813
				4	-2.53351	0.00272
				5	-2.53258	0.00093

Для метода хорд $\xi \approx x_4 \approx -2.532$, а для метода Ньютона, так как $|x_5 - x_4| \le 0.001$, то $\xi \approx x_5 \approx -2.533$.