

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ2

**Тема 1 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С
ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.....3**

Лекция 1 Краевые задачи для уравнений в частных производных..... 3

Лекция 2 Сходимость разностных схем 8

Лекция 3 Устойчивость разностных схем..... 12

Лекция 4 Построение аппроксимирующих разностных схем 16

**Тема 2 РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.....25**

Лекция 1 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. 25

Лекция 2 Решение смешанных граничных задач 31

Лекция 3 Экономичные разностные схемы 40

**Тема 3 РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА47**

Лекция 1 Краевые задачи для уравнений эллиптического типа 47

Лекция 2 Аппроксимация граничных условий..... 53

Лекция 3 Разностная схема для задачи Дирихле 56

Лекция 4 Метод итерации для решения задачи Дирихле 61

Лекция 5 Метод Рунге для решения задачи Дирихле 65

**Тема 4 РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА 70**

Лекция 1 Метод сеток для уравнений гиперболического типа 70

Лекция 2 Метод сеток для решения смешанной задачи 75

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый курс лекций входит в программу образовательного стандарта РД РБ 02100.5.046-98 по специальности «Экономическая кибернетика» для студентов математического факультета Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины и является продолжением одноименной первой курса лекций.

Настоящий лекционный материал по дисциплине «Численные методы анализа» призван облегчить студентами изучение теоретических сведений и способствовать эффективному применению практических навыков в области вычислительной математики.

В работе рассматриваются классические методы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы решения краевых задач, методы построения и основные понятия теории разностных схем, разностные схемы для основных уравнений математической физики и их численная реализация, приведено построение некоторых социально-экономических моделей.

Тема 1 ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Лекция 1 Краевые задачи для уравнений в частных производных

- 1 Классификация уравнений второго порядка с двумя переменными.
- 2 Задача коши.
- 3 Краевые задачи для уравнений в частных производных.

1 Классификация уравнений второго порядка с двумя переменными

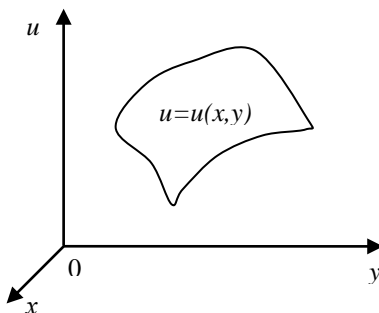
Дифференциальные уравнения с частными производными имеют широкое применение в математической физике, гидродинамике, акустике т.д. В большинстве случаев эти уравнения в явном виде не решаются. Поэтому широкое распространение получили методы приближенного решения таких уравнений, в частности, метод сеток.

В общем случае дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными имеют вид

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0, \quad (3.1)$$

где x, y - переменные, u - искомая функция, $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ - первые и вторые частные производные по x и y . Решением уравнения (3.1) называется функция $u = u(x, y)$, обращающая это уравнение в тождество. График решения представляет собой интегральную поверхность в соответствующем пространстве.

Уравнение (3.1) называется линейным, если оно первой степени относительно искомой функции и всех ее производных



и не содержит их произведений, т.е. если это уравнение может быть записано в виде:

$$L(u) \equiv a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + l(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u = f(x, y) \quad (3.2)$$

Если коэффициенты a, b, c, d, l, g не зависят от x и y , то уравнение (3.2) является линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Построение разностных схем метода сеток в случае уравнений с частными производными зависит от типа уравнений и вида граничных условий. Поэтому сделаем несколько замечаний о классификации уравнений (3.2).

Пусть $(x, y) \in \Omega \subset R^2$, а $\partial\Omega$ - граница области Ω . Говорят, что в области Ω задано дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для функции $u = u(x, y)$, если для любой точки из Ω имеет место соотношение (3.2), в котором $a(x, y), b(x, y), \dots$ - коэффициенты, $f(x, y)$ - свободный член уравнения, которые определены в области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Пусть $D = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$. Тогда уравнение (3.2) называют эллиптическим, параболическим или гиперболическим в области Ω , если соответственно выполняются условия:

$$D(x, y) < 0, \quad D(x, y) = 0, \quad D(x, y) > 0$$

для любой точки $(x, y) \in \Omega$. Если $D(x, y)$ в области Ω не сохраняет постоянного знака, то имеем так называемый смешанный тип.

С линейным дифференциальным уравнением (3.2) связано обыкновенное дифференциальное уравнение

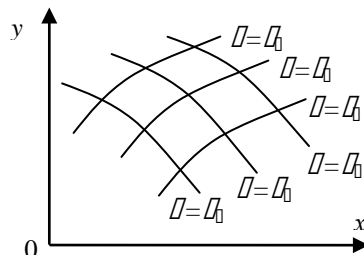
$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0,$$

называемое характеристическим уравнением. Его решения называются характеристиками уравнения (3.2).

Для уравнения (3.2) гиперболического типа существуют два семейства характеристик

$$\varphi(x, y) = C_1$$

и



$$\psi(x, y) = C_2.$$

Проводя в уравнении (3.2) преобразование координат $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, т.е. принимая параметры этих семейств за новые криволинейные координаты, будем иметь канонический вид уравнения гиперболического типа:

$$u_{\xi\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Уравнение (3.2) параболического типа имеет одно семейство характеристик

$$\varphi(x, y) = C.$$

И в результате преобразования $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = y$ уравнение параболического типа приводится к каноническому виду:

$$u_{\eta\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Если уравнение (3.2) эллиптического типа, то оно допускает два семейства комплексных характеристик

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1, \quad \varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2.$$

Проводя преобразования $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, получим канонический вид уравнения эллиптического типа:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \alpha(\xi, \eta)u_{\xi} + \beta(\xi, \eta)u_{\eta} + \gamma(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta).$$

Построение и исследование разностных схем непосредственно для уравнения (3.2) связано с большими техническими трудностями. Поэтому будем рассматривать некоторые его частные случаи:

1) Уравнение Пуассона (уравнение эллиптического типа)

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

При $f(x, y) = 0$ имеем уравнение Лапласа.

2) Уравнение теплопроводности (уравнение параболического типа)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

3) Волновое уравнение (уравнение гиперболического типа)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

2 Задача Коши

Дифференциальные уравнения в частных производных имеют в общем случае бесконечное множество решений. Поэтому для одно-

значной разрешимости необходимо на искомое решение налагать дополнительные условия, которые состоят из начальных и краевых (граничных) условий. При этом условия, относящиеся к начальному моменту времени, называются начальными, а условия, относящиеся к фиксированным значениям координат (обычно это координаты граничных точек) – краевыми.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$L(u) = f(x, y), \quad (3.3)$$

где

$$L(u) \equiv a(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + l(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y)u$$

Нахождение решения $u = u(x, y)$ уравнения (3.3), удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x, y_0) = \varphi(x), \quad u'_y(x, y_0) = \psi(x), \quad (3.4)$$

называется задачей Коши, а сами условия – начальными данными Коши.

Геометрическая интерпретация задачи Коши достаточно проста: требуется найти интегральную поверхность $u = u(x, y)$ уравнения (3.3), проходящую через данную пространственную кривую

$$y = y_0, \quad u = \varphi(x)$$

и касающуюся в точках $M(x, y_0, u)$ этой кривой заданной системы векторов \vec{a} , расположенных в плоскостях $x = const$ и составляющих с осью Oy угол β , определяемый равенством $tg\beta = \psi(x)$.

Если же рассматривать y как время, то задача Коши имеет следующую механическую трактовку: в начальный момент времени $y = y_0$ заданы форма плоской линии $u = \varphi(x, y_0)$ и распределение скоростей ее точек $\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(x, y_0)$. Предполагая, что каждая точка $M(x, u)$

линии движется параллельно оси Ou , причем дифференциальный закон дается уравнением (3.3), требуется определить форму линии для последующих моментов времени $y > y_0$.

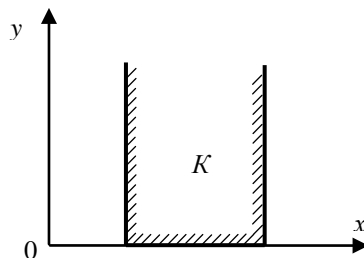
Можно ставить общую задачу Коши: найти решение $u = u(x, y)$ дифференциального уравнения (3.3), удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_y = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_y = \psi(x, y).$$

Далее, вместо производной u'_x можно задавать производную u'_y , или нормальную производную $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y)$.

Задача Коши обычно ставится для уравнений параболического и гиперболического типов.

Пусть данные Коши для уравнения (3.3) заданы на отрезке $a \leq x \leq b$, а решение $u = u(x, y)$ этого уравнения нужно определить в полуполосе $K\{a \leq x \leq b, 0 \leq y < \infty\}$. Тогда для однозначности этого решения необходимо дополнительно задать условия на прямых $x = a$ и $x = b$, что приводит к смешанной задаче. Достаточно общей задачей этого типа является нахождение в полуполосе K решения $u = u(x, y)$ дифференциального уравнения (3.3), удовлетворяющего начальным и граничным условиям:



$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_y(x, 0) = \psi(x) \quad (a \leq x \leq b, y = 0), \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 u(a, y) + \alpha_1 u'_x(a, y) = \chi(y) \\ \beta_0 u(b, y) + \beta_1 u'_x(b, y) = \delta(y) \end{cases} \quad (3.6)$$

причем $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$, $0 < y < \infty$.

Решение смешанной задачи имеет практическую ценность лишь в том случае, если небольшие ошибки в начальных и краевых условиях не могут привести к большим отклонениям соответствующего решения. В этом случае говорят, что смешанная задача поставлена корректно, или непрерывно зависит от начальных и краевых условий.

Для уравнения эллиптического типа задача Коши не ставится, т.к. является некорректной.

3 Краевые задачи для уравнений в частных производных

Пусть

$$L(u) \equiv \Delta u + au'_x + bu'_y + cu = f(x, y), \quad (3.7)$$

где a, b, c, f - непрерывные функции от (x, y) .

Первая краевая задача. На контуре $\partial\Omega$, ограничивающим область Ω , задана непрерывная функция $\varphi(P) = \varphi(x, y)$. Требуется

найти функцию $u(P) = u(x, y)$, удовлетворяющую внутри Ω уравнению (3.7) и принимающую на границе заданные значения $\varphi(P)$:

$$L(u(P)) = f(P), \quad P \in \Omega,$$

$$u(P) = \varphi(P), \quad P \in \partial\Omega.$$

Вторая краевая задача.

$$L(u(P)) = f(P), \quad P \in \Omega,$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = \psi(P), \quad P \in \partial\Omega,$$

где \vec{n} - вектор внешней нормали.

Третья краевая задача.

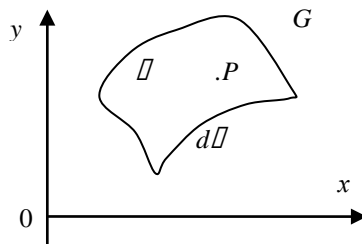
$$L(u(P)) = f(P), \quad P \in \Omega,$$

$$\alpha_0 u(P) + \alpha_1 \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \chi(P), \quad P \in \partial\Omega,$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.

Если область G ограниченная, то соответствующая краевая задача называется внутренней, в противном случае – внешней.

Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ первая краевая задача называется задачей Дирихле, вторая – задачей Неймана, третья – смешанной краевой задачей.



Лекция 2 Сходимость разностных схем

- 1 О сходимости разностных схем.
- 2 Аппроксимация разностных схем.
- 3 Порядок аппроксимации.

1 О сходимости разностных схем

Пусть требуется приближенно вычислить решение u некоторой краевой задачи

$$Lu = f, \quad (3.8)$$

поставленной в области Ω с границей $\partial\Omega$.

Для решения поставленной задачи (3.8) следует выбрать дискретное множество точек Ω_h (сетку), принадлежащее $\Omega \cup \partial\Omega$; ввести линейное нормированное пространство U_h функций, определенных на

сетке Ω_h ; установить соответствие между решением u и функцией $[u]_h \in U_h$, которую будем считать искомой таблицей решения u . Для приближенного отыскания таблицы $[u]_h$, которую условились считать точным решением задачи (3.8), необходимо на основе задачи (3.8) составить систему разностных уравнений (разностную схему)

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \quad (3.9)$$

относительно функций $u^{(h)}$ из U_h , чтобы имела место сходимость

$$\| [u]_h - u^{(h)} \|_{U_h} \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

при $h \rightarrow 0$. Причем, в линейных пространствах U_h и F_h заранее должны быть введены соответственно сеточные нормы $\| \cdot \|_{U_h}$ и $\| \cdot \|_{F_h}$, которые являются сеточными аналогами норм $\| \cdot \|_U$ и $\| \cdot \|_F$ в исходных пространствах U и F .

Если для решения разностной краевой задачи (3.9) выполнено неравенство

$$\| [u]_h - u^{(h)} \|_{U_h} \leq Ch^k,$$

то говорят, что сходимость имеет порядок k относительно h .

Задачу построения сходящейся разностной схемы (3.9) разбивают на две подзадачи:

- 1) Построение разностной схемы, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу (3.8);
- 2) Проверка устойчивости разностной схемы (3.9).

2 Аппроксимация разностных схем

Пусть в пространстве F_h уже введена норма. Разностная задача (3.9) аппроксимирует задачу (3.8) на решении u , если в равенстве

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \mathcal{F}^{(h)}$$

невязка $\mathcal{F}^{(h)}$, возникающая при подстановке решения исходной дифференциальной задачи $[u]_h$ в разностную краевую задачу (3.9), стремится к нулю при $h \rightarrow 0$:

$$\| \mathcal{F}^{(h)} \|_{F_h} = \| L_h [u]_h - f^{(h)} \|_{F_h} \rightarrow 0.$$

Если

$$\| \mathcal{F}^{(h)} \|_{F_h} \leq Ch^k,$$

где C не зависит от h , то аппроксимация имеет порядок k относительно h .

Пример. Построим для следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x, t), & -\infty < x < \infty, 0 \leq t < T \\ u(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (3.11)$$

одну из аппроксимирующих ее разностных схем.

Задача (3.11) запишется в форме (3.8), если положить

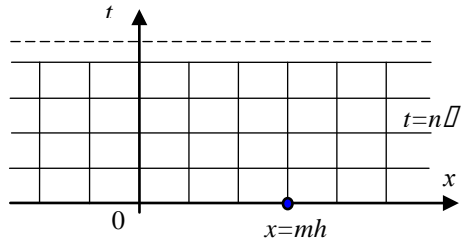
$$Lu \equiv \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(x, 0), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq t < T, \quad f = \begin{cases} \varphi(x, t), & -\infty < x < \infty, 0 \leq t < T \\ \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

В качестве сетки Ω_h используем совокупность точек пересечения прямых

$$x = mh, \quad t = n\tau, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right],$$

где $h > 0$, $\tau > 0$ - некоторые числа.

Будем считать, что шаг τ связан с шагом h зависимостью $\tau = rh$, где $r = const$, так что сетка Ω_h зависит только от одного параметра h . Искомой сеточной функцией является таблица $[u]_h = \{u(mh, n\tau)\}$ значений решения $u(x, t)$ задачи (3.11) в точках сетки Ω_h .



Построим аппроксимирующую задачу. Значение сеточной функции $u^{(h)}$ в точке $(x_m, t_n) = (mh, n\tau)$ сетки Ω_h обозначим через u_m^n . Схему (3.9) получим, приблизив производные u'_t и u'_x разностными отношениями

$$u'_t|_{x,t} \approx \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau}, \quad u'_x|_{x,t} \approx \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h},$$

где $x = mh$, $t = n\tau$. Тогда схема (3.9) будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh), \quad m = 0, \pm 1, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1 \end{cases} \quad (3.12)$$

Оператор L_h и правая часть $f^{(h)}$ для системы (3.12) определяются следующим образом:

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \\ u_m^0 \end{cases}, \quad f^{(h)} = \begin{cases} \varphi(mh, n\tau), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \psi(mh), \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1 \end{cases}$$

Разностное уравнение из системы (3.12) можно разрешить относительно u_m^{n+1} . Получаем

$$u_m^{n+1} = (1-r)u_m^n + ru_{m+1}^n + \tau\varphi(mh, n\tau), \quad \tau = rh. \quad (3.13)$$

Таким образом, зная значения u_m^n , $m = 0, \pm 1, \dots$ решения $u^{(h)}$ в точках сетки при $t = n\tau$, можно вычислить значения u_m^{n+1} в точках сетки $t = (n+1)\tau$. Напомним, что значения сеточной функции на первом слое заданы.

Выясним порядок аппроксимации, которым обладает разностная схема (3.12). В качестве пространства F_h возьмем линейное пространство

всех пар ограниченных функций $g^{(h)} = \begin{pmatrix} \varphi_m^n \\ \psi_m \end{pmatrix}$, определив

норму в нем следующим образом:

$$\|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\varphi_m^n| + \max_m |\psi_m|.$$

Предположим, что решение $u(x, t)$ задачи (3.11) имеет ограниченные вторые производные. Тогда, применяя формулу Тейлора, получим

$$\begin{cases} \frac{u(x_m + h, t_n) - u(x_m, t_n)}{h} = \frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial x} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_m + \xi, t_n)}{\partial x^2} \\ \frac{u(x_m, t_n + \tau) - u(x_m, t_n)}{\tau} = \frac{\partial u(x_m, t_n)}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, t_n + \eta)}{\partial t^2} \end{cases}, \quad (3.14)$$

где ξ и η - некоторые числа, зависящие от m, n и h и удовлетворяющие неравенствам $0 < \xi < h$, $0 < \eta < \tau$.

С помощью формул (3.14) выражение

$$L_h[u]_h \equiv \left\{ \begin{array}{l} \frac{u(x_m, t_n + \tau) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \frac{u(x_m + h, t_n) - u(x_m, t_n)}{h}, \\ u(x_m, 0) \end{array} \right.,$$

можно переписать в виде

$$L_h[u]_h \equiv \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_m, t_n} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, t_n + \eta)}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_m + \xi, t_n)}{\partial x^2}, \right. \\ \left. u(x_m, 0) + 0 \right.$$

или

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{F}^{(h)},$$

где

$$\mathcal{F}^{(h)} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_m, t_n + \eta)}{\partial t^2} - \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u(x_m + \xi, t_n)}{\partial x^2} \\ 0 \end{array} \right.$$

Следовательно

$$\|\mathcal{F}^{(h)}\|_{F_h} \leq \left(\text{Sup} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right| \frac{r}{2} + \text{Sup} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right| \frac{1}{2} \right) h.$$

Таким образом, рассматриваемая разностная схема (3.12) имеет первый порядок аппроксимации относительно h на решении $u(x, t)$, обладающим ограниченными вторыми производными.

Лекция 3 Устойчивость разностных схем

- 1 Определение устойчивости разностных схем.
- 2 Связь аппроксимация и устойчивости разностных схем со сходимостью.
- 3 Принцип максимума для исследования устойчивости разностных схем.

1 Определение устойчивости разностных схем

Разностная краевая задача (3.9) называется устойчивой, если существуют числа $\delta > 0$ и $h_0 > 0$ такие, что при любом $h < h_0$ и любом $\mathcal{F}^{(h)}$ из F_h , удовлетворяющим неравенству

$$\left\| \mathcal{D}^{(h)} \right\|_{F_h} \leq \delta,$$

следующая разностная краевая задача

$$L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \mathcal{D}^{(h)}$$

имеет одно и только одно решение, причем выполняется условие

$$\left\| z^{(h)} - u^{(h)} \right\|_{U_h} \leq C \left\| \mathcal{D}^{(h)} \right\|_{F_h},$$

где C - некоторая постоянная, не зависящая от h .

Определение устойчивости разностной схемы можно дать и следующим образом: Разностная краевая задача (3.9) устойчива, если существует $h_0 > 0$ такое, что при $h < h_0$ и любом $f^{(h)} \in F_h$ она однозначно разрешима, причем

$$\left\| u^{(h)} \right\|_{U_h} \leq C \left\| f^{(h)} \right\|_{F_h},$$

где C - некоторая постоянная, не зависящая от h и от $f^{(h)}$.

Свойство устойчивости разностной схемы можно трактовать, как равномерную относительно h зависимость решения разностной схемы от входных данных.

2 Связь аппроксимация и устойчивости разностных схем со сходимостью

Связь аппроксимации и устойчивости разностной схемы со сходимостью определяется следующей теоремой:

Теорема. Пусть разностная схема $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ аппроксимирует задачу $Lu = f$ на решении $u(x, y)$ с порядком $s > 0$ относительно h и устойчива. Тогда эта схема будет сходящейся, и порядок ее сходимости будет совпадать с порядком аппроксимации, т.е. справедлива оценка

$$\left\| u_h(x, y) - u^{(h)} \right\|_{U_h} \leq Ch^s; \quad u_h(x, y) = [u]_h, \quad (3.15)$$

где C - постоянная, не зависящая от h .

Доказательство. По определению аппроксимации имеем

$$\left\| \mathcal{D}^{(h)} \right\|_{F_h} \leq C_1 h^s, \quad \text{где } \mathcal{D}^{(h)} = L_h [u]_h - f^{(h)}.$$

Введем обозначение $\varepsilon_h(x, y) = [u]_h - u^{(h)}$. Тогда в силу линейности разностного оператора L_h для $\varepsilon_h(x, y)$ имеют место равенства

$$L_h \varepsilon_h(x, y) = L_h [u]_h - L_h u^{(h)} = L_h [u]_h - f^{(h)} = \mathcal{D}^{(h)}.$$

Отсюда, используя определение устойчивости, получим

$$\|\varepsilon_h(x, y)\|_{U_h} \leq M \|\mathcal{D}^{(h)}\|_{F_h} \leq M(C_1 h^s) = Ch^s,$$

где $C = MC_1$. Таким образом, справедливость оценки (3.15) доказана.

3 Принцип максимума для исследования устойчивости разностных схем

Покажем, что разностная схема (3.12)

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh), \quad m = 0, \pm 1, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1 \end{cases}$$

устойчива при $r \leq 1$. Норму $\|\cdot\|_{U_h}$ определим равенством

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \sup_{m,n} \|u_m^n\| = \max_n \sup_m |u_m^n|.$$

Норму в пространстве F_h введем следующим образом: если $g^{(h)} \in F_h$, и

$$g^{(h)} = \begin{cases} \varphi_m^n, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \psi_m, & n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1 \end{cases},$$

то

$$\|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\varphi_m^n| + \max_m |\psi_m| = \max_n [\max_m |\varphi_m^n| + \max_m |\psi_m|].$$

Разностную задачу

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi_m^n \\ u_m^0 = \psi_m, \quad m = 0, \pm 1, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau}\right] - 1 \end{cases}, \quad (3.16)$$

которая отличается от задачи (3.12) только тем, что φ_m^n и ψ_m произвольные правые части, вообще говоря, не совпадающие с $\varphi(mh, n\tau)$ и $\psi(mh)$, перепишем в форме

$$\begin{cases} u_m^{n+1} = (1-r)u_m^n + ru_{m+1}^n + \tau\varphi_m^n \\ u_m^0 = \psi_m \end{cases}. \quad (3.17)$$

Поскольку $r \leq 1$, то $1-r \geq 0$. В этом случае справедлива оценка

Общие замечания при использовании разностных схем:

1. Вначале указывается правило выбора сетки. Чаще всего сетка выбирается прямоугольной и равномерной.
2. Потом указывается и строится конкретно одна или несколько разностных схем. Проверяется условие аппроксимации разностных схем и устанавливается порядок аппроксимации.
3. Доказывается устойчивость построенных разностных схем. Это наиболее важный и сложный вопрос. Если разностные схемы обладают аппроксимацией и устойчивостью, то сходимость следует из приведенной выше теоремы.
4. Рассматривается вопрос численного решения разностных схем. В случае линейных схем это будет система линейных алгебраических уравнений, возникающих в методе сеток, разработаны и разрабатываются специальные методы решения, учитывающие особенности решаемых задач.

Лекция 4 Построение аппроксимирующих разностных схем

- 1 Замена производных разностными отношениями.
- 2 Простейшие разностные схемы.
- 3 Метод неопределенных коэффициентов построения аппроксимирующих разностных схем.

1 Замена производных разностными отношениями

Простейший прием построения разностных краевых задач, аппроксимирующих дифференциальные задачи, состоит в замене производных соответствующими разностными отношениями. Для обыкновенных дифференциальных уравнений их можно записать следующим образом:

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - \left[\frac{\Delta z}{2} f''(z) + O(\Delta z) \right], \quad (3.20)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{f(z) - f(z - \Delta z)}{\Delta z} - \left[-\frac{\Delta z}{2} f''(z) + O(\Delta z) \right], \quad (3.21)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{f(z + \Delta z) - f(z - \Delta z)}{2\Delta z} - \left[\frac{(\Delta z)^2}{3!} f'''(z) + O(\Delta z)^2 \right], \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{f(z + \Delta z) - 2f(z) + f(z - \Delta z)}{\Delta z^2} - \left[\frac{(\Delta z)^2}{12} f^{(4)}(z) + O((\Delta z)^2) \right], \quad (3.23)$$

где в квадратных скобках записаны остаточные члены этих формул. Указанные формулы могут быть получены из разложения функции в ряд Тейлора

$$f(z + \Delta z) = f(z) + \Delta z f'(z) + \frac{(\Delta z)^2}{2!} f''(z) + \frac{(\Delta z)^3}{3!} f'''(z) + O((\Delta z)^3),$$

$$f(z - \Delta z) = f(z) - \Delta z f'(z) + \frac{(\Delta z)^2}{2!} f''(z) - \frac{(\Delta z)^3}{3!} f'''(z) + O((\Delta z)^3).$$

Формулы (3.20) – (3.23) вместе с выражениями остаточных членов можно использовать и при замене частных производных разностными отношениями. Например,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} \left[\frac{\Delta t}{2} u''_{tt}(x, t) + O(\Delta t) \right]$$

или

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \left[\frac{\Delta x}{2} u''_{xx}(x, t) + O(\Delta x) \right].$$

2 Простейшие разностные схемы

Пример. Рассмотрим ту же задачу Коши, что и раньше.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x, t), & -\infty < x < \infty, \quad 0 \leq t < T \\ u(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}. \quad (3.24)$$

Для аппроксимации этой дифференциальной задачи построим три разностные схемы. Во всех этих схемах используем сетку Ω_h , образованную точками пересечения прямых $x = mh$, $t = n\tau$, попавшими в полосу $0 \leq t \leq T$. Будем считать также, что $\tau = rh$, где r - некоторая положительная постоянная.

Простейшая из разностных схем с использованием формулы (3.20), аппроксимирующая задачу (3.24) имеет вид

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}$$

или

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}.$$

Для этой схемы невязка $\delta f^{(h)}$, возникающая при подстановке решения $[u]_h$ дифференциальной задачи в левую часть разностной задачи

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)},$$

выражается формулой

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \left(\frac{\tau}{2} u''_{tt} - \frac{h}{2} u''_{xx} \right)_{m,n} \\ 0 \end{cases} + O(\tau + h).$$

Нормой элемента $f^{(h)}$ пространства F_h будем считать максимум всех компонент элемента $f^{(h)} \in F_h$. Тогда

$$\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} = O(\tau + h) = O(rh, h) = O(h),$$

т.е. получаем первый порядок аппроксимации.

Вторая разностная схема получается при использовании формулы (3.21) для замены u'_x :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h}.$$

После замены производных в (3.24) получим следующую разностную схему

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}. \quad (3.26)$$

Здесь невязка имеет вид

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \left(\frac{\tau}{2} u''_{tt} + \frac{h}{2} u''_{xx} \right)_{m,n} \\ 0 \end{cases} + O(\tau + h)$$

и $\left\| \delta f^{(h)} \right\|_{F_h} = O(h)$, т.е. снова порядок аппроксимации равен единице.

Вторая разностная схема незначительно отличается от первой. Однако она неустойчива при любом $\frac{\tau}{h} = r = const$ и, следовательно, непригодна для счета.

Третья разностная схема

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}$$

получается при замене производных разностными отношениями по следующим приближенным формулам

$$u'_t \approx \frac{u(x, t + \tau) - \frac{u(x + h, t) + u(x - h, t)}{2}}{\tau},$$

$$u'_{x \approx} \frac{u(x + h, t) + u(x, t)}{h}.$$

Используя ряд Тейлора для достаточно гладкого решения $u(x, t)$ задачи (3.24) будем иметь

$$\frac{u(x, t + \tau) - \frac{u(x + h, t) + u(x - h, t)}{2}}{\tau} - \frac{u(x + h, t) + u(x, t)}{h} = \varphi(x, t) +$$

$$+ \left[-\frac{h}{2r} u''_{xx} + \frac{\tau}{2} u''_{tt} + O(h^2) \right]_{x, t}.$$

Тогда невязка $\mathcal{F}^{(h)}$ определяется следующим образом

$$\mathcal{F}^{(h)} = \begin{cases} \frac{\tau}{2} u''_{tt} - \frac{h}{2r} u''_{xx} + O(h^2) \\ 0 \end{cases}.$$

Откуда $\|\mathcal{F}^{(h)}\|_{F_h} = O(h)$ т.е. разностная схема опять имеет первый порядок аппроксимации по h .

Рассмотрим теперь случай, когда связь между шагами сетки задается не формулой $\tau = rh$, а формулой $\tau = rh^2$, предписывающей ускоренное измельчение шага τ по сравнению с h . В этом случае

$$L_h[u]_h = \begin{cases} \left[u'_t - u'_x - \frac{1}{2r} u''_{xx} \right]_{x_m, t_n} \\ u(mh, n\tau) \end{cases} + O(h^2).$$

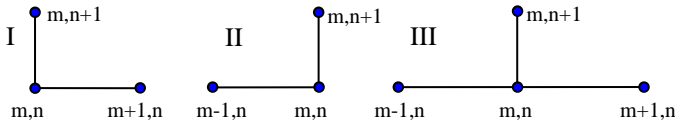
Эта формула получается после применения формулы Тейлора к $u(x_m + h, t_n)$ и $u(x_m, t_n + \tau)$. Отсюда видно, рассматриваемая разностная схема аппроксимирует задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi(x, t), \\ u(x, 0) = \psi(x) \end{cases}$$

а не задачу Коши (3.24).

Таким образом, одна и та же разностная схема в случае различной связи $\tau = \tau(h)$ может аппроксимировать при $h \rightarrow 0$ различные дифференциальные задачи. Такого рода разностные схемы называют негибкими.

Для облегчения записи разностной схемы ее обычно принято сопоставлять с картинкой, на которой изображено взаимное расположение точек сетки (шаблон), значения решения в которых связывает разностное уравнение при некоторых фиксированных значениях m и n . Для приведенных трех схем эти шаблоны следующие



3 Метод неопределенных коэффициентов построения аппроксимирующих разностных схем

Более общий способ построения разностных схем состоит в том, что приближается не каждая производная в отдельности, а сразу весь дифференциальный оператор. Разъясним этот способ на примере следующей задачи Коши (3.24). Как и раньше считаем $\tau = rh$ и возьмем сначала **шаблон I**. Если положить $\Lambda u \equiv u'_t - u'_x$, то ранее получили

$$\Lambda_h u^{(h)} \equiv \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi(mh, n\tau)$$

или

$$\Lambda_h u^{(h)} \equiv \frac{1}{\tau} u_m^{n+1} - \frac{1-r}{h} u_m^n - \frac{r}{\tau} u_{m+1}^n = \varphi(mh, n\tau). \quad (3.27)$$

Запишем последнее равенство с неопределенными коэффициентами

$$\Lambda_h u^{(h)} \equiv a_0 u_m^{n+1} + a_1 u_m^n + a_2 u_{m+1}^n = \varphi(mh, n\tau). \quad (3.28)$$

Постараемся подобрать коэффициенты так, чтобы имело место равенство

$$\Lambda_h[u]_h \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} = (u'_t - u'_x) \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} + O(h)$$

или

$$\Lambda_h[u]_h \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} = \Lambda u \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} + O(h). \quad (3.29)$$

По формуле Тейлора имеем

$$u(mh, (n+1)\tau) = u(mh, n\tau) + \tau u'_t(mh, n\tau) + O(\tau^2),$$

$$u((m+1)h, n\tau) = u(mh, n\tau) + h u'_x(mh, n\tau) + O(h^2).$$

Подставив эти выражения в правую часть равенства

$$\Lambda_h[u]_h \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} = a_0 u(mh, (n+1)\tau) + a_1 u(mh, n\tau) + a_2 u((m+1)h, n\tau)$$

получим

$$\begin{aligned} \Lambda_h[u]_h \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} &= (a_0 + a_1 + a_2)u(mh, n\tau) + \\ &+ a_0\tau \frac{\partial u(mh, n\tau)}{\partial \tau} + a_2h \frac{\partial u(mh, n\tau)}{\partial x} + O(a_0\tau^2, a_2h^2) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Поскольку нашей целью является подбор коэффициентов a_0, a_1, a_2 , чтобы выполнялось условие аппроксимации (3.29), то естественно предварительно так сгруппировать слагаемые в правой части равенства (3.30), чтобы выделился член Λu . Тогда остальные слагаемые образуют остаточный член аппроксимации, который должен быть мал. Чтобы выделить член Λu , можно заменить в правой части равенства (3.30) производные u'_t или u'_x соответственно по одной из формул:

$$u'_t \equiv \Lambda u + u'_x \quad \text{или} \quad u'_x \equiv u'_t - \Lambda u.$$

Воспользуемся первой из них. Тогда равенство (3.30) примет вид

$$\begin{aligned} \Lambda_h[u]_h \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} &= a_0 r h \Lambda u \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} + (a_0 + a_1 + a_2)u(mh, n\tau) + \\ &+ (a_0 r + a_2)h \frac{\partial u(mh, n\tau)}{\partial x} + O(a_0 r^2 h^2, a_2 h^2) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Среди всех гладких функций $u(x, t)$ можно указать такие, для которых u , u'_x и u'_t в любой заранее заданной фиксированной точке принимают любые независимые друг от друга значения. Следовательно

но, и значения u , u'_x и $\Lambda u = u'_t - u'_x = \varphi(x, t)$ также можно считать независимыми друг от друга. В виду этого из равенства (3.31) следует, что для выполнения при любой правой части $\varphi(x, t)$ задачи (3.27) условий аппроксимации (3.29) необходимо, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{aligned} a_0 r h &= 1 + O_1(h), \\ (a_0 + a_1 + a_2) &= 0 + O_2(h), \\ (a_0 r + a_2) h &= 0 + O_3(h), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $O_1(h)$, $O_2(h)$, $O_3(h)$ - какие-нибудь произвольные величины порядка h . Положим их равными нулю. Тогда получающаяся система будет иметь единственное решение

$$a_0 = \frac{1}{rh} = \frac{1}{\tau}, \quad a_1 = \frac{r-1}{rh} = \frac{1}{h} - \frac{1}{\tau}, \quad a_2 = -\frac{1}{h},$$

которое приводит к уже известной схеме (3.26).

Таким образом, дополнительно узнали, что среди разностных схем вида

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} a_0 u_m^{n+1} + a_1 u_m^n + a_2 u_{m+1}^n = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}$$

она является единственной, аппроксимирующей рассматриваемую задачу Коши. Если бы мы не пренебрегли величинами $O(h)$ в системе (3.32), то получили бы следующее решение

$$a_0 = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{r} + O(h) \right), \quad a_1 = \frac{1}{h} \left(\frac{r-1}{r} + O(h) \right), \quad a_2 = \frac{1}{h} (-1 + O(h)).$$

Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать величинами $O(h)$.

Пусть теперь имеем **шаблон III**.

Посмотрим теперь, как можно строить разностные схемы для задачи Коши (3.24):

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} a_0 u_m^{n+1} + a_1 u_m^n + a_2 u_{m-1}^n + a_3 u_{m+1}^n = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}. \quad (3.33)$$

Как и раньше, считаем $\tau = rh$, $r = const$ и

$$\Lambda_h u^{(h)} \equiv a_0 u_m^{n+1} + a_1 u_m^n + a_2 u_{m-1}^n + a_3 u_{m+1}^n = \varphi(mh, n\tau).$$

Воспользуемся формулой Тейлора

$$u(mh, (n+1)\tau) = u(mh, n\tau) + \tau u'_t(mh, n\tau) + \frac{\tau^2}{2} u''_{tt}(mh, n\tau) + O(\tau^3),$$

$$u((m \pm 1)h, n\tau) = u(mh, n\tau) + hu'_t(mh, n\tau) + \frac{h^2}{2}u''_{xx}(mh, n\tau) + O(h^3).$$

Получим

$$\begin{aligned} \Lambda_h[u]_h \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)u(mh, n\tau) + a_0 r h u'_t(mh, n\tau) + \\ &+ (a_3 - a_2)h u'_x(mh, n\tau) + \frac{1}{2}a_0 r^2 h^2 u''_{tt}(mh, n\tau) + \\ &+ \frac{1}{2}(a_3 + a_2)h^2 u''_{xx}(mh, n\tau) + O(a_0 r^3 h^3, a_2 h^3, a_3 h^3). \end{aligned}$$

Выделим в правой части этого равенства член $\Lambda u = u'_t - u'_x$, для чего воспользуемся тождеством $u'_t \equiv \Lambda u + u'_x$. Имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_h[u]_h \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} &= a_0 r h \Lambda u \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} + (a_0 + a_1 + a_2 + a_3)u \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} + (a_0 r + a_3 - a_2)h u'_x \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} + \\ &+ \frac{1}{2}a_0 r^2 h^2 u''_{tt} \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} + \frac{1}{2}(a_2 + a_3)h^2 u''_{xx} \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} + O(a_0 r^3 h^3, a_2 h^3, a_3 h^3) \end{aligned}$$

Для выполнения условия аппроксимации (3.29) необходимо, чтобы числа a_0, a_1, a_2, a_3 удовлетворяли системе, которая учитывая замечания о малых величинах, имеет вид

$$\begin{aligned} a_0 r h &= 1, \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0, \\ (a_0 r + a_3 - a_2)h &= 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Если имеют место равенства (3.34), то оператор $\Lambda_h[u]_h$ принимает вид

$$\Lambda_h[u]_h \Big|_{\substack{x=mh \\ t=n\tau}} = \Lambda u \Big|_{\substack{mh \\ n\tau}} + \frac{1}{2}a_0 r^2 h^2 u''_{tt} \Big|_{\substack{mh \\ n\tau}} + \frac{1}{2}(a_2 + a_3)h^2 u''_{xx} \Big|_{\substack{mh \\ n\tau}} + O(a_0 r^3 h^3, a_2 h^3, a_3 h^3)$$

Система (3.34) имеет семейство решений, зависящее от одного параметра. Если решение системы (3.34) имеет вид

$$a_0 = \frac{1}{rh}, \quad a_1 = \frac{r-1}{h}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{1}{h},$$

то получаем схему (3.27). Если же решением являются значения

$$a_0 = \frac{1}{rh}, \quad a_1 = -\frac{1}{rh}, \quad a_2 = \frac{1}{2h}, \quad a_3 = -\frac{1}{2h},$$

то соответствующая ему схема будет

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = \varphi(mh, n\tau) \\ u_m^0 = \psi(mh) \end{cases}.$$

Выбрав какое-либо решение системы (3.34), надо его подставить в остаточный член и убедиться, что он мал. Для двух приведенных решений подстановка чисел a_0, a_1, a_2, a_3 дает остаточные члены

$$\frac{a_0 r^2 h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(a_2 + a_3) h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(a_0 r^3 h^3, a_2 h^3, a_3 h^3)$$

первого порядка относительно h . Таким образом, установили, что нельзя построить разностную схему вида (3.33), которая аппроксимирует задачу (3.24) с порядком h^2 . Для увеличения порядка аппроксимации пришлось бы увеличить число точек разностной сетки, используемых в конструируемой схеме.

Отметим однако, что существуют специальные методы позволяющие строить разностную схему с аппроксимацией порядка h^2 , используя только четыре указанные точки разностной сетки.

Замечание о других приемах построения разностных схем.

При построении разностных схем, аппроксимирующие нестационарные задачи, может быть использована схема пересчета. Существует прием, который основан на использовании записи дифференциального уравнения, для которого строится разностная схема, в форме «интегрального закона сохранения». Необходимость в использовании этого приема возникает при расчете так называемых обобщенных решений. Такие разностные схемы называются дивергентными или консервативными. Наконец, существует прием, который основан на использовании той или иной вариационной постановки дифференциальной краевой задачи, решение которой надо вычислить. Этот прием часто называют методом конечных элементов, а возникающие разностные схемы - вариационно-разностными или проекционно-разностными схемами. Этот прием позволяет строить разностные схемы на нерегулярных сетках, более мелких там, где решение меняется более часто.

Тема 2 РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Лекция 1 Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

- 1 Решение задачи Коши.
- 2 О порядке аппроксимации разностных схем.
- 3 Об устойчивости двухслойных разностных схем.
- 4 Наилучшая расчетная формула.

1 Решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (2.1)$$

с условием на прямой $t = 0$

$$u(x, 0) = \psi(x). \quad (2.2)$$

Здесь $u = u(x, t)$ - температура и t - время.

Необходимо найти функцию $u = u(x, t)$ удовлетворяющую (2.1) – (2.2). Будем считать, что задача (2.1) – (2.2) имеет в верхней полуплоскости единственное решение $u(x, t)$, непрерывное вместе со своими производными $u_t^{(j)}$, $j = 1, 2$ и $u_x^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Запишем задачу (2.1) – (2.2) в виде

$$Lu = f, \quad (2.3)$$

где

$$Lu = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) \end{cases}, \quad f = \begin{cases} \varphi(x, t) \\ \psi(x) \end{cases}.$$

Будем считать, что $t \in [0, T]$.

Выберем прямоугольную сетку и заменим область $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ сеточной областью

$$\Omega_h : \left\{ x_m = mh, t_n = n\tau; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right], h > 0, \tau > 0 \right\}.$$

Заменим задачу (2.3) разностной схемой $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$. Обозначим через $[u]_{x_m, t_n} = u(x_m, t_n)$ точное значение решения задачи (2.3) в узле (x_m, t_n) , через u_m^n - соответственно приближенное сеточное значение. Имеем

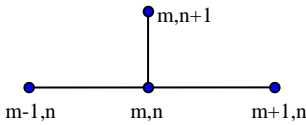
$$L[u]_h = \begin{cases} u'_t \Big|_{(x_m, t_n)} - u''_{xx} \Big|_{(x_m, t_n)} \\ u(x_m, 0) \end{cases}, \quad f \Big|_{(x_m, t_n)} = \begin{cases} \varphi(x_m, t_n) \\ \psi(x_m) \end{cases}.$$

Для замены выражений $u'_t \Big|_{(x_m, t_n)}$ и $u''_{xx} \Big|_{(x_m, t_n)}$ разностными отношениями воспользуемся формулами численного дифференцирования. Получим

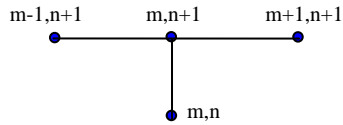
$$u'_t \Big|_{(x_m, t_n)} = \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_{tt} \Big|_{(x_m, t_n)},$$

$$u''_{xx} \Big|_{(x_m, t_n)} = \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{xxxx} \Big|_{(x_m, t_n)}.$$

Приведем наиболее употребляемые для параболических уравнений шаблоны:



Явный двухслойный шаблон



Неявный двухслойный шаблон

Рассмотрим явный двухслойный шаблон. Тогда

$$L[u]_h = \begin{cases} \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\tau} - \frac{u(x_{m+1}, t_n) - 2u(x_m, t_n) + u(x_{m-1}, t_n))}{h^2} \\ u(x_m, 0) \end{cases} + r_{mn}(h)$$

где

$$r_{mn}(h) = -\frac{\tau}{2} u''_{tt} \Big|_{(x_m, t_n)} - \frac{h^2}{12} u^{(4)}_{x^4} \Big|_{(x_m, t_n)}.$$

Обозначая $f^{(h)} = \begin{cases} \varphi(x_m, t_n) \\ \psi(x_m) \end{cases}$, имеем следующую разностную схему

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (2.4)$$

где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ u_m^0, & n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right] = N \end{cases}. \quad (2.5)$$

Если же воспользоваться неявной разностной схемой, то оператор L_h примет вид

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}, & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ u_m^0, & n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right] = N \end{cases}. \quad (2.6)$$

Учитывая вышеизложенное, можно записать

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{F}^{(h)},$$

где $\mathcal{F}^{(h)} = \begin{cases} r_{mn}(h) \\ 0 \end{cases}$.

2 О порядке аппроксимации разностных схем

Выясним порядок аппроксимации разностных схем (2.4)-(2.5) и (2.4)-(2.6). В качестве F_h возьмем линейное множество всех пар ограниченных функций $g^{(h)} = \begin{cases} \alpha_m^n \\ \beta_m \end{cases}$. Норму в F_h определим по правилу

$$\|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\alpha_m^n| + \max_m |\beta_m|.$$

Заметим, что если \max не достигается, то вместо него будем брать \sup .

Пусть $\tau = rh^s$ где r, s - некоторые положительные числа. Предположим, что имеют место оценки

$$\max_{\Omega} |u_{tt}''| \leq M_1, \quad \max_{\Omega} |u_{x^4}^{(4)}| \leq M_2.$$

Тогда имеем

$$\|\mathcal{F}^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |r_{m,n}(h)| \leq \left(\frac{r}{2} M_1 + \frac{h^{2-s}}{12} M_2 \right) h^s. \quad (2.7)$$

Для параболических уравнений, как увидим далее, в случае схемы (2.4)-(2.5) можно взять $s = 2$, а в случае схемы (2.4)-(2.6) - $s = 1$.

Таким образом, из (2.7) следует, что разностные схемы (2.4)-(2.5) и (2.4)-(2.6) аппроксимируют задачу (2.3) на решении $u(x, t)$ с погрешностью порядка $O(\tau + h^2)$.

Разностная схема (2.4)-(2.5) позволяет по значениям решения на нулевом слое u_m^0 вычислять значения на первом слое u_m^1 . Потом по значениям u_m^1 вычисляются значения u_m^2 и т.д. В силу таких вычислительных свойств разностную схему (2.4)-(2.5) называют **явной**. Разностная схема (2.4)-(2.6) упомянутыми выше свойствами не обладает, так как для вычисления значения на первом слое $\dots, u_{-2}^1, u_{-1}^1, u_0^1, u_1^1, u_2^1, \dots$ необходимо решать бесконечную систему линейных уравнений. По этой причине разностную схему (2.4)-(2.6) называют **неявной**.

3 Об устойчивости двухслойных разностных схем

Определим норму в пространстве U_h следующим образом

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_{m,n} |u_m^n|.$$

Рассмотрим явную разностную схему (2.4)-(2.5). Выясним, при каких значениях r , $\tau = rh^2$, возможна устойчивость рассматриваемой схемы.

Для доказательства устойчивости надо показать, что разностная схема однозначно разрешима и при любых $g^{(h)} = \begin{cases} \alpha_m^n, \\ \beta_m \end{cases}$, $g^{(h)} \in F_h$

имеет место оценка

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq M \|g^{(h)}\|_{F_h},$$

где M - постоянная не зависящая от h и $g^{(h)}$ и

$$L_h z^{(h)} = g^{(h)}. \quad (2.8)$$

Так как разностная схема (2.4)-(2.5) явная, то ее однозначная разрешимость очевидна. Перепишем (2.8) в виде

$$z_m^{n+1} = r(z_{m+1}^n + z_{m-1}^n) + (1-2r)z_m^n + \tau \alpha_m^n, \quad z_m^0 = \beta_m. \quad (2.9)$$

Пусть выполнено условие $1-2r \geq 0$ или

$$r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (2.10)$$

Тогда из (2.9) имеем

$$\max_m |z_m^{n+1}| \leq r(\max_m |z_m^n| + \max_m |z_m^n|) + (1-2r) \max_m |z_m^n| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|$$

или

$$\max_m |z_m^{n+1}| \leq \max_m |z_m^n| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|. \quad (2.11)$$

Из (2.11) следует, что при $\alpha_m^n = 0$ $\max_m |z_m^{n+1}|$ не превосходит $\max_m |z_m^n|$,

т.е. $\max_m |z_m^n|$ не возрастает с ростом n . Это свойство однородной раз-

ностной схемы (2.4) называют **принципом максимума**. Как и ранее,

пусть $n = 0, 1, \dots, \left[\frac{T}{\tau} \right] - 1$, $N = \left[\frac{T}{\tau} \right]$. Тогда

$$\max_m |z_m^N| \leq \max_m |z_m^{n-1}| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$
$$\max_m |z_m^1| \leq \max_m |z_m^0| + \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|.$$

Просуммировав эти неравенства, получим

$$\begin{aligned} \max_m |z_m^N| &\leq \max_m |\beta_m| + N \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n| \leq \max_m |\beta_m| + T \max_{m,n} |\alpha_m^n| \leq \\ &\leq \max[1, T] (\max_m |\beta_m| + N \tau \max_{m,n} |\alpha_m^n|) = M \|g^{(h)}\|_{F_h}. \end{aligned}$$

Так как это неравенство верно для любого n , то имеем

$$\max_{m,n} |z_m^n| \leq M \|g^{(h)}\|_{F_h} \quad \text{или} \quad \|z^{(h)}\|_{U_h} \leq M \|g^{(h)}\|_{F_h}.$$

Таким образом, разностная схема (2.4)-(2.5) при выполнении условия (2.10) устойчива. Отметим, что условие (2.10) налагает жесткие ограничения на выбор τ . Это приводит к тому, что если мы хотим сохранить устойчивость, то при вычислениях по схеме (2.4)-(2.5) шаг τ приходится брать достаточно малым.

Замечание. Для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad a(x, t) > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

достаточное условие (2.10) приняло бы вид

$$r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2 \max_{(x,t) \in \Omega} |a(x,t)|}.$$

Пусть теперь оператор L_h задает неявную разностную схему (2.6). Тогда перепишем разностную схему (2.4)-(2.6) в виде

$$-r(u_{m+1}^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}) + (1 + 2r)u_m^{n+1} = u_m^n + \tau\varphi(x_m, t_n), \quad u_m^0 = \psi(x_m).$$

Это есть бесконечная система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\dots, u_{-2}^{n+1}, u_{-1}^{n+1}, u_0^{n+1}, u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots (n = 0, 1, \dots, N)$.

Решение таких систем является сложной и трудоемкой задачей. Поэтому разностные схемы (2.4)-(2.6) неудобны для задач Коши на бесконечных отрезках. Однако, если отрезок оси x конечен, т.е. $a \leq x \leq b$, а на границах $x = a$ и $x = b$ заданы некоторые ограничения на решение $u(x, t)$, то разностные схемы вида (2.4)-(2.6) оказываются весьма эффективными. В частности, как будет показано ниже, такие схемы являются абсолютно устойчивыми, т.е. устойчивы при любом $r = \frac{\tau}{h^2} > 0$. В этом случае указанную систему можно решать, например, методом прогонки.

Отметим, что из аппроксимации $O(\tau + h^2)$ и устойчивости разностной схемы (2.4)-(2.5) следует ее сходимость.

4 Наилучшая расчетная формула

Получим наилучшую расчетную формулу для явной разностной схемы (2.4)-(2.5). Запишем оператор $L_h[u]_h$ в разложениях соответствующих функций в ряды Тейлора, учитывая, что $\tau = rh^2$:

$$\begin{aligned} L_h[u]_h = & \left\{ \frac{1}{r} \left[u|_{m,n} + u'_t|_{m,n} rh^2 + \frac{(rh^2)^2}{2!} u''_{tt}|_{m,n} + \frac{(rh^2)^3}{3!} u'''_{ttt}|_{m,n} - u|_{m,n} \right] - \right. \\ & - \left[u|_{m,n} + hu'_x|_{m,n} + \frac{h^2}{2!} u''_{xx}|_{m,n} + \frac{h^3}{3!} u'''_{xxx}|_{m,n} + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}_{xxxx}|_{m,n} - 2u|_{m,n} + \right. \\ & \left. \left. + u|_{m,n} - hu'_x|_{m,n} + \frac{h^2}{2!} u''_{xx}|_{m,n} - \frac{h^3}{3!} u'''_{xxx}|_{m,n} + \frac{h^4}{4!} u^{(4)}_{xxxx}|_{m,n} \right] \right\} \frac{1}{h^2} + O(h^4) \end{aligned}$$

После приведения подобных членов будем иметь

$$L_h[u]_h = (u'_t - u''_{xx})|_{m,n} + h^2 \left(\frac{r}{2} u''_{tt} - \frac{1}{12} u^{(4)}_{xxxx} \right)|_{m,n} + O(h^4). \quad (2.12)$$

Так как $u(x, t)$ является решением однородной задачи $u'_t = u''_{xx}$, то $u''_{tt} = u^{(4)}_{xxxx}$. Подставляя эти равенства в (2.12) получаем

$$L_h[u]_h = h^2 \left(\frac{r}{2} - \frac{1}{12} \right) u^{(4)}_{xxxx} + O(h^4).$$

Выберем r так, чтобы $\frac{r}{2} - \frac{1}{12} = 0$. Отсюда следует, что $r = \frac{1}{6}$. При этом погрешность будет $O(h^4)$, в то время как для других $r \leq \frac{1}{2}$ - $O(h^2)$.

Таким образом, наилучшая расчетная формула имеет вид

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{6}(u_{m-1}^n + 4u_m^n + u_{m+1}^n).$$

Лекция 2 Решение смешанных граничных задач

- 1 Решение смешанной задачи.
- 2 Необходимое спектральное условие устойчивости Неймана.
- 3 Разностные схемы расщепления.

1 Решение смешанной задачи

Пусть требуется определить функцию $u(x, t)$, которая в области $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t) \quad (2.13)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.14)$$

$$[\alpha_0(t)u'_x + \beta_0(t)u]_{x=0} = \gamma_0(t), \quad (2.15)$$

$$[\alpha_1(t)u'_x + \beta_1(t)u]_{x=1} = \gamma_1(t).$$

Функции $\varphi(x, t), \psi(x), \gamma_i(t), \alpha_i(t), \beta_i(t)$ - известны, причем $\alpha_i^2(t) + \beta_i^2(t) > 0$ ($i = 0, 1$). Кроме того будем считать, что задача (2.13)-(2.15) имеет единственное решение, непрерывное вместе со своими производными $u'_l, u''_l, u_{x\dots x}^{(l)}$ ($l = 1, 2, 3, 4$) в области Ω .

В области Ω введем прямоугольную сетку

$$\Omega_h = \left\{ x_m = mh, t_n = n\tau; m = 0, 1, \dots, M, n = 0, 1, \dots, N, h = \frac{1}{M} > 0, \tau > 0, N\tau \leq T < (N+1)\tau \right\}$$

Аппроксимируем граничные условия (2.15)

$$u'_x|_{(x_0, t_n)} = \frac{u(x_1, t_n) - u(x_0, t_n)}{h} - \frac{h}{2} u''_{xx}|_{(x_0^{(1)}, t_n)}, \quad x_0 < x_0^{(1)} < x_1,$$

$$u'_x|_{(x_M, t_n)} = \frac{u(x_M, t_n) - u(x_{M-1}, t_n)}{h} - \frac{h}{2} u''_{xx}|_{(x_M^{(1)}, t_n)}, \quad x_{M-1} < x_M^{(1)} < x_M.$$

Тогда при $t = t_n$ краевые условия (2.15) переписуются в виде

$$\alpha_{0n} \frac{u(x_1, t_n) - u(x_0, t_n)}{h} + \beta_{0n} u(x_0, t_n) = \gamma_{0n} + \frac{\alpha_{0n} h}{2} u''_{xx}|_{(x_0^{(1)}, t_n)},$$

$$\alpha_{1n} \frac{u(x_M, t_n) - u(x_{M-1}, t_n)}{h} + \beta_{1n} u(x_M, t_n) = \gamma_{1n} - \frac{\alpha_{1n} h}{2} u''_{xx}|_{(x_M^{(1)}, t_n)}, \quad (2.16)$$

где $\alpha_{in} = \alpha_i(t_n)$, $\beta_{in} = \beta_i(t_n)$, $\gamma_{in} = \gamma_i(t_n)$ ($i = 0, 1$).

Отбрасываем в (2.16) члены, имеющие первый порядок относительно h , получаем сеточные граничные условия

$$\begin{cases} \alpha_{0n} \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \beta_{0n} u_0^n = \gamma_{0n} \\ \alpha_{1n} \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h} + \beta_{1n} u_M^n = \gamma_{1n} \end{cases}. \quad (2.17)$$

Построим явную и неявную разностные схемы

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (2.18)$$

аппроксимирующие задачу (2.13 – (2.15) с погрешностью порядка $O(\tau + h^2)$. На явном шаблоне получаем следующую явную разностную схему

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, & m = \overline{0, M-1}; n = \overline{0, N-1} \\ u_m^0, & m = 0, 1, \dots, M \\ \alpha_{0n} \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \beta_{0n} u_0^n, & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ \alpha_{1n} \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h} + \beta_{1n} u_M^n \end{cases}. \quad (2.19)$$

Правая часть $f^{(h)}$ из (2.18) определяется следующим образом

$$f^{(h)} = \begin{cases} \varphi_m^n, & m = \overline{0, M-1}; n = \overline{0, N-1} \\ \psi_m, & m = \overline{0, M} \\ \gamma_{0, n+1}, & n = \overline{0, N-1} \\ \gamma_{1, n+1} \end{cases}.$$

На неявном шаблоне получаем следующую неявную разностную схему

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}, & m = \overline{0, M-1}; n = \overline{0, N-1} \\ u_m^0, & m = \overline{0, M} \\ \alpha_{0n+1} \frac{u_1^{n+1} - u_0^{n+1}}{h} + \beta_{0n+1} u_0^{n+1}, & n = \overline{0, N-1} \\ \alpha_{1n+1} \frac{u_M^{n+1} - u_{M-1}^{n+1}}{h} + \beta_{1n+1} u_M^{n+1} \end{cases} \quad (2.20)$$

Правая часть для оператора (2.20) определяется также как и для оператора (2.19).

Явная разностная схема (2.18)-(2.19) устойчива при $\tau \leq \frac{h^2}{2}$, а неявная схема (2.18)-(2.20) устойчива при любых соотношениях шагов τ и h . Кроме того явная и неявная разностные схемы аппроксимируют исходную задачу (2.13)-(2.15) с порядком $O(\tau + h^2)$, а, значит, являющиеся сходящимися: явная схема – при $r = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, а неявная при любом $r = \frac{\tau}{h^2} > 0$. Неявная разностная схема приводит к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, которая может быть решена методами прогонки.

2 Необходимое спектральное условие устойчивости Неймана

Для многих задач несложным путем могут быть указаны необходимые условия устойчивости. Такие условия позволяют отбрасывать те схемы, для которых они не выполняются и не проводить для этих схем доказательства устойчивости.

Вывод этого условия дадим на примере следующей задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \quad a = const \quad (2.21)$$

с условием

$$u(x, 0) = \psi(x).$$

Как и ранее, запишем две разностные схемы

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \quad (2.22)$$

явную:

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a^2 \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, & m = 0, \pm 1, \dots; \\ u_m^0, & n = \overline{0, N-1} \end{cases}, \quad (2.23)$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} \varphi(x_m, t_n); \\ \psi(x_m) \end{cases};$$

неявную:

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - a^2 \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^n + 1 + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}, & m = 0, \pm 1, \dots; \\ u_m^0, & n = \overline{0, N-1} \end{cases}. \quad (2.24)$$

Из выше изложенного следует, что явная и неявная схемы аппроксимируют задачу (2.21) с погрешностью $O(\tau + h^2)$. Остановимся на устойчивости.

Пусть схема (2.22)-(2.23) устойчива. Тогда по определению устойчивости существует такое $h_0 > 0$, что для любого $h < h_0$ и любого $f^{(h)} \in F_h$ выполняется условие

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq M \|f^{(h)}\|_{F_h},$$

где M - постоянная, не зависящая от h и $f^{(h)}$. Так как $f^{(h)}$ есть лю-

бой элемент из F_h и $f^{(h)} = \begin{cases} \varphi_m^n \\ \psi_m \end{cases}$. Так что, в частности, может быть

$\varphi_m^n = \varphi(x_m, t_n)$ и $\psi_m = \psi(x_m)$, и, следовательно, $f^{(h)}$ будет совпадать с правой частью (2.22)-(2.23). Из определения норм последнее неравенство перепишем в виде

$$\max_{m,n} |u_m^n| \leq M (\max_{m,n} |\varphi_m^n| + \max_m |\psi_m|).$$

Поскольку это неравенство имеет место для любых $f^{(h)} \in F_h$, поло-

жим $f^{(h)} = \begin{cases} 0 \\ \psi_m \end{cases}$. Тогда оно примет вид

$$\max_{m,n} |u_m^n| \leq M \max_m |u_m^0|, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (2.25)$$

так как здесь u_m^n является решением разностной схемы со специальной правой частью

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \equiv \begin{cases} 0 \\ \psi_m \end{cases}. \quad (2.26)$$

Говорят, что разностная схема (2.22)-(2.23) **устойчива по начальным данным**, если для нее имеет место оценка (2.25).

Оценка (2.25) должна иметь место при некоторых частных значениях u_m^0 . Положим

$$u_m^0 = \psi_m \equiv e^{i\alpha m}, \quad (2.27)$$

где α - некоторый численный параметр, $-\infty < \alpha < \infty$.

Выпишем решение задачи (2.26) при условии (2.27). Это можно сделать, используя метод разделения переменных. Положим

$$u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}. \quad (2.28)$$

Подберем здесь численный параметр λ так, чтобы выполнялось однородное разностное уравнение из схемы (2.26). Подставляя это значение u_m^n в однородное уравнение, будем иметь

$$\frac{\lambda^{n+1} e^{i\alpha m} - \lambda^n e^{i\alpha m}}{\tau} - a^2 \frac{\lambda^n e^{i\alpha(m+1)} - 2\lambda^n e^{i\alpha m} + \lambda^n e^{i\alpha(m-1)}}{h^2} = 0.$$

Сокращая на $\lambda^n e^{i\alpha m}$ и преобразовывая оставшуюся часть, получим

$$\frac{\lambda^1 - 1}{\tau} - a^2 \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h^2} = 0.$$

Учитывая, что

$$e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha} = \left(e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{-\frac{i\alpha}{2}} \right)^2 = -4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad r = \frac{\tau}{h^2}$$

имеем

$$\lambda = 1 - 4a^2 r \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (2.29)$$

На основании (2.28) можно записать

$$\max_{m,n} |u_m^n| \leq |\lambda^n|, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

так как $|e^{i\alpha m}| = 1$. Из этого неравенства видно, что его правая часть может быть ограниченной при любых сколь угодно больших значениях n , например, в случае, когда

$$|\lambda| \leq 1 + C\tau, \quad (2.30)$$

где C - постоянная, не зависящая от τ . Действительно,

$$|\lambda|^n = (1 + C\tau)^n \leq (1 + C\tau)^N \leq (1 + C\tau)^{\frac{T}{\tau}} \leq e^{CT}.$$

Их формулы (2.29) следует, что неравенство (2.30) будет выполняться при

$$r \leq \frac{1}{2a^2}.$$

Условие (2.30) называют **необходимым спектральным условием устойчивости Неймана**. Для схемы (2.22)-(2.23) это условие будет выполняться только для $r \leq \frac{1}{2a^2}$, т.е. при $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$.

После соответствующих вычислений для неявной разностной схемы (2.22)-(2.24) выражение для λ будет иметь вид

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4ra^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Из этого выражения видно, что для разностной схемы (2.22)-(2.24) необходимое спектральное условие Неймана будет выполняться при любых значениях $r > 0$.

3 Разностные схемы расщепления

В тех случаях, когда число пространственных переменных в задачах теплопроводности больше или равно двум, сильно возрастает объем вычислительной работы, которую необходимо выполнить при численной реализации разностных схем. Схемы, которые наряду со свойством устойчивости обладают и свойством минимальности объема вычислений, называются **схемами расщепления**.

Рассмотрим следующую задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad 0 < t \leq T, \quad u(x, y, 0) = \varphi(x, y). \quad (2.31)$$

Обозначим $Au \equiv u''_{xx} + u''_{yy}$. Выберем квадратную сетку по пространству с шагом $h > 0$ по направлению x и y ; по времени t - шаг τ , причем $N\tau \leq T < (N+1)\tau$. Таким образом, координаты некоторого узла (x_m, y_n, t_p) будут определяться формулами

$$x_m = mh, \quad y_n = nh, \quad t_p = p\tau; \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p = 0, 1, \dots, N.$$

Предположим, что нам известно решение задачи (2.31) в момент времени $t = t_p$, т.е. известны значения функции $u(x, y, t_p) \equiv u^p$.

Поставим задачу: Найти значение u^{p+1} через u^p и значение оператора A . Воспользовавшись формулой Тейлора, запишем

$$\begin{aligned} u(x, y, t_{p+1}) &= u(x, y, t_p + \tau) = u(x, y, t_p) + \frac{\tau}{1!} \frac{\partial u(x, y, t_p)}{\partial t} + O(\tau^2) = \\ &= u(x, y, t_p) + \frac{\tau}{1!} Au(x, y, t_p) + O(\tau^2) = (I + \tau A)u(x, y, t_p) + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Здесь I – единичный оператор. Положим $A_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $A_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, тогда оператор $A = A_1 + A_2$. Наряду с задачей (2.31) рассмотрим две вспомогательные задачи ($-\infty < x, y < \infty$):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t_p < t \leq t_{p+1}, \quad v(x, y, t_p) = u(x, y, t_p), \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad t_p < t \leq t_{p+1}, \quad w(x, y, t_p) = v(x, y, t_{p+1}). \quad (2.34)$$

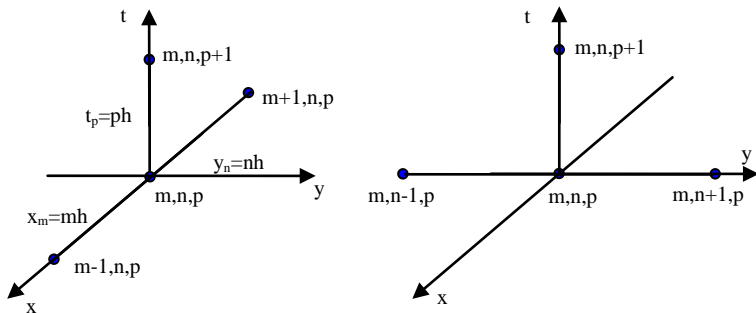
Задачи (2.33) и (2.34) являются одномерными и их можно решать последовательно, сначала задачу (2.33) (найдем $v(x, y, t_{p+1})$), затем задачу (2.34) (найдем $w(x, y, t_{p+1})$). Установим связь между значениями $u(x, y, t_{p+1})$ и значениями $w(x, y, t_{p+1})$. Учитывая зависимости (2.32) – (2.34), имеем

$$\begin{aligned} v(x, y, t_{p+1}) &= (I + \tau A_1)u(x, y, t_p) + O(\tau^2), \\ w(x, y, t_{p+1}) &= (I + \tau A_2)w(x, y, t_p) + O(\tau^2) = (I + \tau A_2)v(x, y, t_{p+1}) + O(\tau^2) = \\ &= (I + \tau A_2) \left[(I + \tau A_1)u(x, y, t_p) + O(\tau^2) \right] = (I + \tau A)u(x, y, t_p) + O(\tau^2) = \\ &= u(x, y, t_{p+1}) + O(\tau^2) \end{aligned} \quad .$$

Таким образом, отыскание решения двумерной задачи (2.31) заменили последовательным нахождением решений одномерных задач (2.33) и (2.34), причем решения $u(x, y, t_{p+1})$ и $w(x, y, t_{p+1})$ будут отличаться на величину $O(\tau^2)$.

Построим схемы расщепления для задачи (2.31), заменяя задачи (2.33) и (2.34) подходящими разностными аппроксимациями.

Возьмем два явных двухслойных шаблона следующих видов:



Теперь разностные схемы для (2.33) и (2.34) запишутся

$$\frac{v_{mn}^{p+1} - v_{mn}^p}{\tau} = \Lambda_{xx}(v_{mn}^p), \quad v_{mn}^p = u_{mn}^p, \quad (2.35)$$

где

$$\Lambda_{xx}(v_{mn}^p) = \frac{v_{m+1,n}^p - 2v_{mn}^p + v_{m-1,n}^p}{h^2}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$\frac{w_{mn}^{p+1} - w_{mn}^p}{\tau} = \Lambda_{xx}(w_{mn}^p), \quad w_{mn}^p = v_{mn}^{p+1}, \quad (2.36)$$

где

$$\Lambda_{xx}(w_{mn}^p) = \frac{w_{m,n+1}^p - 2w_{mn}^p + w_{m,n-1}^p}{h^2}, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p = 0, 1, \dots, N-1.$$

Формулы (2.35) и (2.36) в совокупности образуют численную разностную схему расщепления задачи (2.31).

Численная реализация этой схемы осуществляется так. При $p=0$ значения u_{mn}^0 - известны, поэтому в (2.35) при $p=0$ имеем $v_{mn}^0 = u_{mn}^0 = \varphi(x_m, y_n)$. Значение v_{mn}^{p+1} при $p=0$ вычисляем по явной формуле

$$v_{mn}^1 = \varphi(x_m, y_n) + \tau \Lambda_{xx}(v_{mn}^0).$$

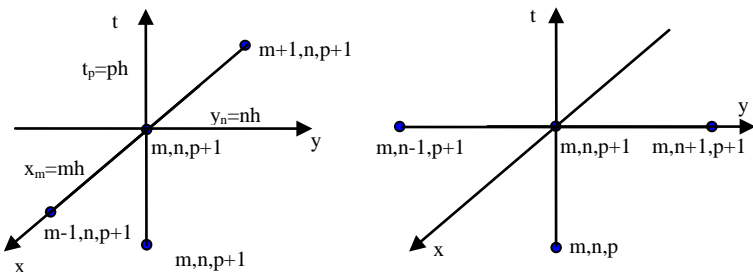
Полагая в (2.36) $p=0$, вычисляем значение w_{mn}^1 по формуле

$$w_{mn}^1 = v_{mn}^1 + \tau \Lambda_{yy}(v_{mn}^1).$$

Таким образом, вычислим все значения w_{mn}^1 ($m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) на первом временном слое. Далее, полагая $u_{mn}^1 \approx w_{mn}^1$, получаем приближенное решение задачи (2.31) на первом временном слое. И далее, по u_{mn}^1

находим u_{mn}^2 и т.д. Для устойчивости вычислений схемы (2.35) и (2.36) требуют жестких ограничений на шаг τ : $\tau \leq \frac{h^2}{2}$.

Рассмотрим теперь два следующих неявных шаблона:



Согласно этим шаблонам задачи (2.33) и (2.34) запишутся:

$$\frac{v_{mn}^{p+1} - v_{mn}^p}{\tau} = \Lambda_{xx}(v_{mn}^{p+1}), \quad v_{mn}^p = u_{mn}^p, \quad (2.37)$$

$$\frac{w_{mn}^{p+1} - w_{mn}^p}{\tau} = \Lambda_{xx}(w_{mn}^{p+1}), \quad w_{mn}^p = v_{mn}^{p+1}. \quad (2.38)$$

Формулы (2.37) - (2.38) в совокупности образуют неявную разностную схему расщепления для задачи (2.31). **Численная реализация** этой схемы осуществляется следующим образом. Полагая в (2.37) $p = 0$ вычисляем значения v_{mn}^1 как решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$v_{mn}^1 - \tau \Lambda_{xx}(v_{mn}^1) = \varphi(x_m, y_n), \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Так как $v_{mn}^0 = u_{mn}^0 = \varphi(x_m, y_n)$, то полагая $p = 0$ в (2.38) вычисляем значение w_{mn}^1 как решение системы линейных алгебраических уравнений:

$$w_{mn}^1 - \tau \Lambda_{xx}(w_{mn}^1) = v_{mn}^1, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где v_{mn}^1 уже вычислено на первом этапе. Затем полагаем $u_{mn}^1 \approx w_{mn}^1$. Далее по аналогии вычисляем u_{mn}^2 , u_{mn}^3 и т.д. Для решения приведенных систем линейных алгебраических уравнений можно применить метод прогонки.

Разностные схемы (2.37) и (2.38) устойчивы, а значит и сходящиеся при любом τ и h .

Лекция 3 Экономические разностные схемы

- 1 Постановка задачи.
- 2 Построение экономических разностных схем.
- 3 Метод прогонки.

1 Постановка задачи

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.39)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0,$$

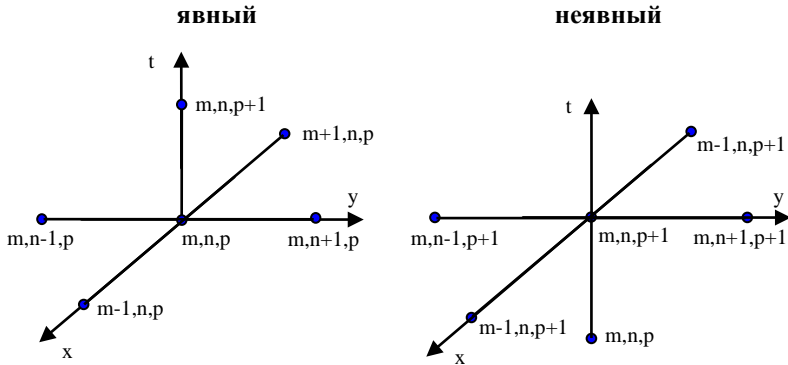
где $\partial\Omega$ - боковые грани прямоугольного параллелепипеда $\Omega = \{0 \leq x, y \leq 1, 0 < t \leq T\}$. Предположим, что задача (2.39) имеет единственное решение $u(x, y, t)$, непрерывное в $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ со своими производными $\partial_t^i u$ ($i = 1, 2$), $\partial_x^k u$, $\partial_y^k u$ ($k = 3, 4$).

В рассматриваемой области Ω введем такую сетку, что

$$(x_m, y_n, t_p) = (mh, nh, p\alpha),$$

$$m, n = 0, 1, \dots, M; \quad h = \frac{1}{M}; \quad \alpha > 0; \quad p = 0, 1, \dots, N; \quad N\tau \leq \tau \leq (N+1)\tau.$$

Выберем следующие шаблоны:



Запишем для задачи (2.39) явную и неявную разностные схемы

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}. \quad (2.40)$$

Явная разностная схема запишется

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{mn}^{p+1} - u_{mn}^p}{\tau} - \Lambda_{xx}(u_{mn}^p) - \Lambda_{yy}(u_{mn}^p), & m, n = \overline{0, M-1}; p = \overline{0, N-1} \\ u_{mn}^0, & m, n = \overline{0, M} \\ u_{mn}^{p+1}, & (mh, nh, (p+1)\tau) \in \partial\Omega_h \end{cases} \quad (2.41)$$

где $\partial\Omega_h$ - узлы сетки, принадлежащие $\partial\Omega$.

Правая часть для разностного оператора $f^{(h)}$ определяется следующим образом

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} 0 \\ \varphi(x_m, y_n) \\ 0 \end{cases}$$

Неявная разностная схема имеет вид

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{mn}^{p+1} - u_{mn}^p}{\tau} - \Lambda_{xx}(u_{mn}^{p+1}) - \Lambda_{yy}(u_{mn}^{p+1}), & m, n = \overline{0, M-1}; p = \overline{0, N-1} \\ u_{mn}^0, & m, n = \overline{0, M} \\ u_{mn}^{p+1}, & (mh, nh, (p+1)\tau) \in \partial\Omega_h \end{cases} \quad (2.42)$$

Разностные схемы (2.40)-(2.42) аппроксимируют задачу (2.39) с погрешностью $O(\tau + h^2)$. С помощью принципа максимума можно

показать, что явная схема (2.40)-(2.41) устойчива при $\tau \leq \frac{h^2}{4}$, в то время

как схема (2.40)-(2.42) устойчива при любых значениях $r = \frac{\tau}{h^2} > 0$.

При использовании явной разностной схемы для перехода от уже известного значения решения $u^k = \{u_{mn}^k, m, n = \overline{0, 1, \dots, M}\}$, $k = \overline{0, 1, \dots, N'} < N$ к неизвестному $u^{k+1} = \{u_{mn}^{k+1}\}$ требуется проделать арифметические действия в количестве, пропорциональном числу $(M-1)^2$ неизвестных значений $\{u_{mn}^{k+1}\}$. В этом смысле явная схема не улучшаемая. Разностные схемы, в которых число арифметических действий для перехода от u^k к $u^{k+1} = \{u_{mn}^{k+1}\}$ пропорционально числу неизвестных значений, называются **экономичными**. Явная схема, буду-

чи экономичной, устойчива лишь при жестком ограничении $\tau \leq \frac{h^2}{4}$ на шаг τ сетки. Неявная разностная схема (2.40)-(2.42) является абсолютно устойчивой, но она не является экономичной. Для определения неизвестных $\{u_{mn}^{p+1}\}$ приходится решать сложную систему линейных алгебраических уравнений. Для решения такой системы необходимо произвести арифметические действия в количестве, пропорциональном не первой степени числа неизвестных, как в экономичных схемах, а третьей, если пользоваться каким-либо методом исключения неизвестных.

2 Построение экономичных разностных схем

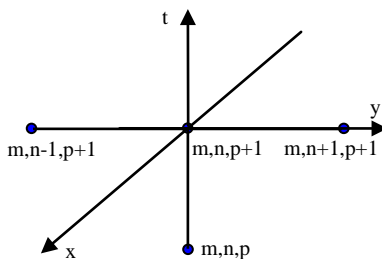
Построим разностную схему, которая является экономичной и безусловно устойчивой, т.е. соединяющей достоинства явной и неявной разностной схемы.

Для этого проведем расщепление многомерной задачи (2.39) в цепочку одномерных задач:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad v(x, y, t_p) = w(x, y, t_{p+1}), \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad w(x, y, t_p) = u(x, y, t_{p+1}), \quad w|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.44)$$

Для решения одномерной задачи (2.43) не неявном шаблоне



построим разностную схему вида

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (2.45)$$

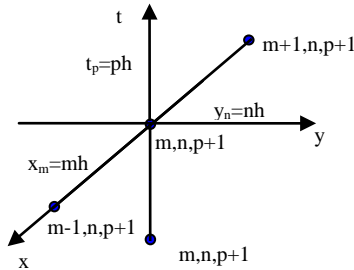
где

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{mn}^{p+1} - u_{mn}^p}{\tau} - \Lambda_{yy}(u_{mn}^{p+1}), & m, n = \overline{0, M-1}; p = \overline{0, N-1} \\ u_{mn}^p, & m, n = \overline{0, M}; p = \overline{0, N-1} \\ u_{mn}^{p+1}, & (mh, nh, (p+1)\tau) \in \partial\Omega_h \end{cases}.$$

Правая часть для этого оператора определяется следующим образом

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} 0 \\ \tilde{u}_{mn}^{p+1} \\ 0 \end{cases}.$$

Для определения сеточной функции \tilde{u}_{mn}^{p+1} на неявном шаблоне



строим вспомогательную разностную схему, которая аппроксимирует дифференциальную задачу (2.44)

$$\begin{cases} \frac{\tilde{u}_{mn}^{p+1} - u_{mn}^p}{\tau} - \Lambda_{yy}(\tilde{u}_{mn}^{p+1}), & m, n = \overline{0, M-1}; p = \overline{0, N-1} \\ u_{mn}^0, & m, n = \overline{0, M} \\ \tilde{u}_{mn}^{p+1}, & (mh, nh, (p+1)\tau) \in \partial\Omega_h \end{cases}, \quad (2.46)$$

где

$$\Lambda_{xx}(v^{(p)}) = \frac{v_{m+1,n}^p - 2v_{m,n}^p + v_{m-1,n}^p}{h^2}, \quad \Lambda_{yy}(v^{(p)}) = \frac{v_{m,n+1}^p - 2v_{m,n}^p + v_{m,n-1}^p}{h^2}.$$

Можно показать, что разностная схема (2.45) аппроксимирует задачу (2.39) с погрешностью $O(\tau + h^2)$, устойчива и экономична.

Остановимся на **реализации** разностной схемы (2.45).

Положим в (2.46) $p = 0$, получим

$$\frac{\tilde{u}_{mn}^1 - u_{mn}^0}{\tau} = \frac{\tilde{u}_{m+1,n}^1 - 2\tilde{u}_{mn}^1 + \tilde{u}_{m-1,n}^1}{h^2}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \quad (2.47)$$

$\tilde{u}_{0n}^1 = 0$, $\tilde{u}_{Mn}^1 = 0$ - граничные значения, $n = 1, 2, \dots, M-1$.

Формулы (2.47) представляют собой при фиксированном n линейную граничную задачу для разностного уравнения второго порядка. Для решения этой задачи применим метод прогонки.

3 Метод прогонки

Пусть n - фиксировано. Представим (2.47) в виде:

$$\begin{cases} r\tilde{u}_{m+1,n}^1 - (1+2r)\tilde{u}_{mn}^1 + r\tilde{u}_{m-1,n}^1 = \varphi_{mn}, & m = 1, 2, \dots, M-1 \\ \tilde{u}_{0n}^1 = 0, \quad \tilde{u}_{Mn}^1 = 0, & r = \frac{\tau}{h^2} > 0 \end{cases}. \quad (2.48)$$

Пусть \tilde{u}_{kn}^1 ($0 \leq k \leq M$) - искомое решение задачи (2.48). Предположим, что между двумя соседними значениями этого решения существует связь

$$\tilde{u}_{in}^1 = \alpha_{in}\tilde{u}_{i+1,n}^1 + \beta_{in}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (2.49)$$

где α_{in} , β_{in} - некоторые числовые коэффициенты. При $i=0$ определим α_{0n} , β_{0n} таким образом, чтобы выполнялось граничное условие на левой границе $\tilde{u}_{0n}^1 = 0$. Для этого положим

$$\alpha_{0n} = 0, \quad (2.50)$$

$$\beta_{0n} = 0. \quad (2.51)$$

Возьмем $i = m-1$. Значение \tilde{u}_{in}^1 из (2.49) подставим в (2.48) и выполним элементарные преобразования. Получим

$$\tilde{u}_{mn}^1 = \frac{r}{(1+2r) - r\alpha_{m-1,n}} \tilde{u}_{m-1,n}^1 - \frac{\varphi_{mn} - r\beta_{m-1,n}}{(1+2r) - r\alpha_{m-1,n}}. \quad (2.52)$$

Выберем α_{in} , β_{in} так, чтобы выражение (2.49) при $i = m$ и (2.52) совпадали. Это дает следующие формулы

$$\alpha_{mn} = \frac{r}{(1+2r) - r\alpha_{m-1,n}}, \quad (2.53)$$

$$\beta_{mn} = \frac{r\beta_{m-1,n} - \varphi_{mn}}{(1+2r) - r\alpha_{m-1,n}}. \quad (2.54)$$

Теперь по методу разностной прогонки можно вычислить \tilde{u}_{1n}^1 , $\tilde{u}_{2n}^1, \dots, \tilde{u}_{M-1,n}^1$, а именно:

1) По формулам (2.50), (2.53) и (2.51), (2.54) при $m = 1, 2, \dots, M - 1$ последовательно вычисляются коэффициенты $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{M-1n}$ и $\beta_{1n}, \beta_{2n}, \dots, \beta_{M-1n}$ - этот процесс называют **прямым ходом** метода прогонки.

2) Учитывая, что $\tilde{u}_{Mn}^1 = 0$, по формуле (2.49) вычисляются искомые значения $\tilde{u}_{1n}^1, \tilde{u}_{2n}^1, \dots, \tilde{u}_{M-1,n}^1$ при $i = M - 1, M - 2, \dots, 1, 0$ - это **обратный ход** метода прогонки.

Нетрудно видеть, что $0 \leq \alpha_{mn} < 1$ и потому метод прогонки устойчив к ошибкам округления.

Указанные вычисления необходимо проделать для каждого значения n , т.е. необходимо вычислять

$$\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{M-1,1}, \quad \beta_{11}, \beta_{21}, \dots, \beta_{M-1,1}, \quad \tilde{u}_{M-1,1}^1, \tilde{u}_{M-2,1}^1, \dots, \tilde{u}_{1,1}^1, \\ \alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{M-1,2}, \quad \beta_{12}, \beta_{22}, \dots, \beta_{M-1,2}, \quad \tilde{u}_{M-1,2}^1, \tilde{u}_{M-2,2}^1, \dots, \tilde{u}_{1,2}^1,$$

и так далее до $n = M - 1$.

Так как для дальнейших вычислений требуются только значения \tilde{u}_{mn}^1 , то их следует хранить в памяти ЭВМ.

Рассмотрим теперь **решение задачи (2.45)**. Положив $p = 0$, получим

$$\frac{u_{mn}^1 - \tilde{u}_{mn}^1}{\tau} = \frac{u_{m,n+1}^1 - 2u_{mn}^1 + u_{m,n-1}^1}{h^2} \quad (2.55)$$

$$u_{m0}^1 = 0, \quad u_{mM}^1 = 0, \quad m, n = 1, 2, \dots, M - 1.$$

Пусть m - фиксировано. Тогда задачу (2.55) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} ru_{m,n+1}^1 - (1 + 2r)u_{mn}^1 + ru_{m,n-1}^1 = \tilde{u}_{mn}^1, & n = 1, 2, \dots, M - 1 \\ u_{m0}^1 = 0, \quad u_{mM}^1 = 0, \quad r = \frac{\tau}{h^2} > 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

Метод прогонки для решения задачи (2.55) полностью аналогичен методу прогонки для задачи (2.48). Поэтому укажем только порядок вычислений:

1) По формулам

$$\gamma_{mn} = \frac{r}{(1+2r) - r\gamma_{m,n-1}}, \quad \gamma_{m0} = 0,$$

$$\delta_{mn} = \frac{r\delta_{m,n-1} - \tilde{u}_{mn}^1}{(1+2r) - r\gamma_{m,n-1}}, \quad \delta_{m0} = 0$$

вычисляются прогоночные коэффициенты $\gamma_{m1}, \gamma_{m2}, \dots, \gamma_{m,M-1}$ и $\delta_{m1}, \delta_{m2}, \dots, \delta_{m,M-1}$.

2) Приближенные значения u_{mn}^1 на первом слое вычисляются по формулам

$$u_{mi}^1 = \gamma_{mi}u_{m,i+1}^1 + \delta_{mi}, \quad u_{mM}^1 = 0, \quad i = M-1, M-2, \dots, 1, 0.$$

Вычисления в 1) и 2) необходимо проделать для каждого m , $1 \leq m \leq M-1$, т.е. необходимо вычислить

$$\begin{aligned} &\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1,M-1}; \quad \delta_{11}, \delta_{12}, \dots, \delta_{1,M-1}, \quad u_{11}^1, u_{12}^1, \dots, u_{1,M-1}^1, \\ &\gamma_{21}, \gamma_{22}, \dots, \gamma_{2,M-1}; \quad \delta_{21}, \delta_{22}, \dots, \delta_{2,M-1}, \quad u_{21}^1, u_{22}^1, \dots, u_{2,M-1}^1, \\ &\dots\dots\dots \\ &\gamma_{M-1,1}, \dots, \gamma_{M-1,M-1}; \quad \delta_{M-1,1}, \dots, \delta_{M-1,M-1}, \quad u_{M-1,1}^1, \dots, u_{M-1,M-1}^1. \end{aligned}$$

Отметим, что как при вычислении таблиц $\alpha_{mn}, \beta_{mn}, \tilde{u}_{mn}^1$, так и при вычислении таблиц $\gamma_{mn}, \delta_{mn}, u_{mn}^1$ необходимо выполнять число арифметических операций, которое пропорционально $(M-1)^2$, т.е. пропорционально числу неизвестных u_{mn}^1 . Поэтому схема (2.45) является экономичной.

Далее, при вычислении \tilde{u}_{mn}^2 поступаем так же, как и при вычислении \tilde{u}_{mn}^1 только $u_{mn}^0 = \varphi_{mn}$ заменяем на u_{mn}^1 ; при вычислении u_{mn}^2 правую часть \tilde{u}_{mn}^1 заменяем на \tilde{u}_{mn}^2 и т.д., пока не получим таблицу значений u_{mn}^p для $m, n = 1, 2, \dots, M-1$; $p = 1, 2, \dots, N$.

В заключение рассмотрения параболического случая отметим, что существуют и другие разностные схемы содержащие, отличные от рассмотренных, шаблоны.

Тема 3 РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Лекция 1 Краевые задачи для уравнений эллиптического типа

- 1 Постановка краевых задач.
- 2 Единственность решения задачи Дирихле.
- 3 Построение разностных аппроксимаций для уравнений.

1 Постановка краевых задач

Исследование стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность и др.) часто приводят к уравнениям эллиптического типа

$$L[u] \equiv \Delta u + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \quad (3.1)$$

где a, b, c, f - непрерывные функции от x, y . Для этих уравнений обычно ставятся лишь краевые задачи, так как задача Коши для них может быть некорректной.

В лекции 1 темы 1 были приведены наиболее часто встречающиеся краевые задачи. А именно:

Первая краевая задача. Найти функцию $u(P)$, удовлетворяющую внутри области Ω уравнению (3.1) и принимающую на границе области значение $\varphi(P)$, т.е.

$$\begin{aligned} L[u(P)] &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ u(P) &= \varphi(P), \quad P \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Здесь $\partial\Omega$ граница области Ω .

Вторая краевая задача. Найти функцию $u(P)$, удовлетворяющую внутри области Ω уравнению (3.1), нормальная производная которой на границе области принимает заданные значение $\psi(P)$, т.е.

$$\begin{aligned} L[u(P)] &= f(P), \quad P \in \Omega, \\ \frac{\partial u(P)}{\partial n} &= \psi(P), \quad P \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Третья краевая задача. Найти функцию $u(P)$ такую, чтобы

$$L[u(P)] = f(P), \quad P \in \Omega,$$

$$\alpha u(P) + \beta \frac{\partial u(P)}{\partial n} = \chi(P), \quad P \in \partial\Omega,$$

где $|\alpha| + |\beta| \neq 0$.

Если область Ω ограниченная и $P \in \Omega$, то соответствующая краевая задача называется внутренней, в противном случае – внешней.

Для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ первая краевая задача называется **задачей Дирихле**, вторая – **задачей Неймана** и третья – **смешанной краевой задачей**.

2 Единственность решения задачи Дирихле

Определение. Функция $u(x, y)$, имеющая непрерывные частные производные второго порядка в области Ω и удовлетворяющая внутри области уравнению Лапласа, называется **гармонической** функцией.

Задача Дирихле можно сформулировать и так: найти функцию, непрерывную в данной замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, гармоническую в области Ω и принимающую на ее границе $\partial\Omega$ непрерывные заданные значения.

Единственность решения задачи Дирихле и ее непрерывная зависимость от краевых условий (корректность краевой задачи) вытекает из следующих свойств гармонических функций.

Свойство 1 (принцип максимума). Гармоническая в ограниченной области функция, непрерывная в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, не может принимать внутри этой области значений больших, чем максимум ее значений на границе $\partial\Omega$, и меньших, чем минимум ее значений на $\partial\Omega$.

Свойство 2 (единственность задачи Дирихле). Задача Дирихле для замкнутой и ограниченной области может иметь лишь единственное решение.

Доказательство. Допустим, что две функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, гармонические в области Ω , совпадают всюду на ее границе. Рассмотрим функцию $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$. Очевидно, что $u(x, y)$ - гармоническая функция, обращающаяся в нуль на границе. По свойству 1 эта функция не может принимать внутри Ω значений больше или меньше нуля, следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ внутри Ω и $u_1(x, y) \equiv u_2(x, y)$.

Замечание. Из свойства 2 не следует, что задача Дирихле для ограниченной и замкнутой области Ω имеет решение; это свойство лишь утверждает, что если существует решение задачи Дирихле для области Ω , то оно единственно.

Свойство 3 (корректность задачи Дирихле). Решение задачи Дирихле для ограниченной и замкнутой области непрерывно зависит от граничных данных.

Доказательство. Допустим, что функции $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$ являются решениями задачи Дирихле, соответственно принимающие на границе значения $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$.

Пусть всюду на границе $\partial\Omega$ выполнено неравенство

$$|\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)| < \varepsilon,$$

где ε - произвольное малое положительное число. Рассмотрим гармоническую функцию $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$. На границе $\partial\Omega$ эта функция принимает значение $\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)$. Так как $-\varepsilon < \varphi(x, y) < \varepsilon$ на $\partial\Omega$, то по свойству 1 имеем $-\varepsilon < u(x, y) < \varepsilon$ при $(x, y) \in \Omega$, т.е. $-\varepsilon < u_1(x, y) - u_2(x, y) < \varepsilon$ или

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| < \varepsilon.$$

Таким образом, требование корректности для задачи Дирихле выполнено.

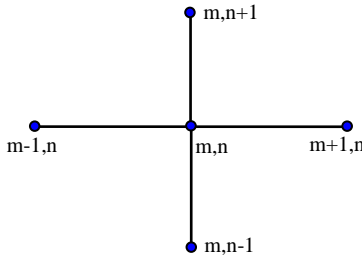
3 Построение разностных аппроксимаций для уравнений

Пусть область Ω ограничена простой кусочно-гладкой линией $\partial\Omega$. Построим разностную аппроксимацию для уравнения Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (3.2)$$

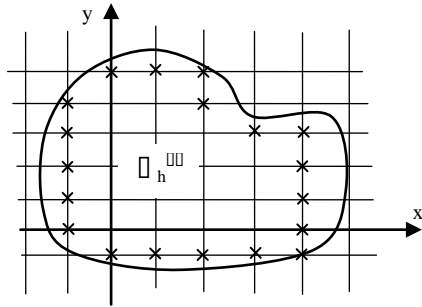
Выберем прямоугольную сетку, в которой координаты узла (x_m, y_n) определяются $x_m = mh, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $y_n = nl, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $h > 0, l > 0$. К сеточной области Ω_h отнесем все узлы, принадлежащие $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$.

Возьмем следующий пятиточечный шаблон (крест):



Пользуясь расположением точек в этом шаблоне, разобьем узлы области на две категории: **внутренние** и **граничные**.

Узел (m, n) будем считать внутренним, если он сам и четыре соседних точки шаблона принадлежат области Ω_h . Множество таких узлов обозначим через Ω_h^0 .



Остальные узлы назовем граничными и их множество обозначим через $\partial\Omega_h$. Таким образом, $\Omega_h = \Omega_h^0 + \partial\Omega_h$.

Заметим, что разбиение узлов области Ω_h на внутренние и внешние зависит от того какой шаблон выбран для аппроксимации дифференциального уравнения.

Пусть узел $(m, n) \in \Omega_h^0$. Замену дифференциального уравнения (3.2) разностным будем осуществлять только во внутренних узлах. Имеем

$$u''_{xx}|_{(x_m, y_n)} + u''_{yy}|_{(x_m, y_n)} = f(x_m, y_n).$$

Воспользовавшись формулой Тейлора, после некоторых преобразований, получим

$$\begin{aligned} & \frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \\ & + \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1}))}{l^2} - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})} = f(x_m, y_n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $(m, n) \in \Omega_h^0$, $x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}$, $y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}$.

Пусть функции $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4}$ ограничены по абсолютной величине в области $\overline{\Omega}$, тогда при достаточно малых h l можно пренебречь членами, содержащими h^2 и l^2 , получим искомое разностное уравнение

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (3.4)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0, \\ f^{(h)} = f(x_m, y_n).$$

Здесь через $u_{m,n}$ обозначено приближенное сеточное значение решения $u(x, y)$ уравнения (3.2), т.е. $u_{m,n} = u(x_m, y_n)$.

В силу определения аппроксимации из (3.3) и (3.4) получаем

$$L_h [u]_h = f^{(h)} + \mathcal{J}^{(h)}, \quad (3.5)$$

где

$$\mathcal{J}^{(h)} \equiv \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0.$$

Следовательно, при сделанных выше предположениях относительно четвертых производных по x и y , имеет место оценка

$$\|\mathcal{J}^{(h)}\|_{F_h} \leq Mh^2, \quad (3.6)$$

где норма понимается как и ранее, M - постоянная не зависящая от h , и считаем, что $l = \alpha h$, $\alpha > 0$.

Оценка (3.6) означает, что разностное уравнение (3.4) аппроксимирует дифференциальное уравнение (3.2) на решении $u(x, y)$ с погрешностью порядка $O(h^2)$.

Замечание. Для уравнения Лапласа ($f(x, y) = 0$) разностное уравнение (3.4) принимает вид

$$u_{m,n} = \frac{1}{4}(u_{m-1,n} + u_{m+1,n} + u_{m,n-1} + u_{m,n+1}),$$

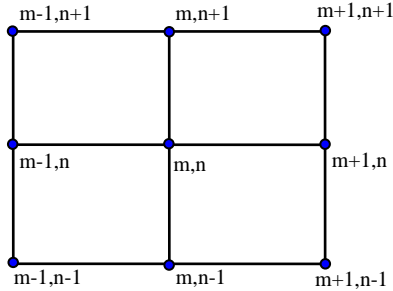
где $h = l$ и $(x_{m\pm 1}, y_{n\pm 1})$ - расчетные точки из области Ω_h^0 .

Теперь рассмотрим случай, когда эллиптическое уравнение имеет вид

$$au''_{xx} + 2bu''_{xy} + cu''_{yy} = f(x, y), \quad (3.7)$$

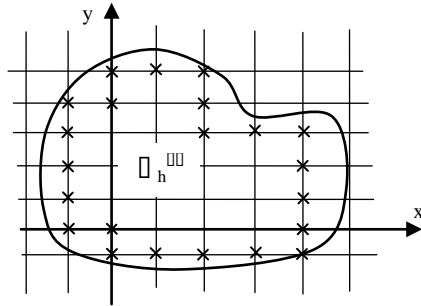
причем a, b, c - постоянные величины и $b^2 - ac < 0$.

Для замены дифференциального уравнения разностным, выберем следующий девятиточечный шаблон (решетка):



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

Используя этот шаблон, выделим в области Ω_h множество внутренних узлов Ω_h^0 и множество граничных узлов $\partial\Omega_h$. Будем считать узел (m, n) внутренним, если этот узел и восемь соседних с ним узлов, содержащихся в шаблоне, принадлежат Ω_h .



Оставшиеся узлы области Ω_h отнесем к граничным и их множество обозначим через $\partial\Omega_h$.

Запишем разностные выражения для замены смешанной производной u''_{xy} через центральные разности.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{(x_m, y_n)} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{(x_m, y_n)} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_{m+1}, y_n)} - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_{m-1}, y_n)}}{2h} + O(h^2) = \\ &= \frac{1}{2h} \left[\frac{u(x_{m+1}, y_{n+1}) - u(x_{m+1}, y_{n-1})}{2l} + O(l^2) - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{u(x_{m-1}, y_{n+1}) - u(x_{m-1}, y_{n-1})}{2l} \Big] + O(l^2) =$$

$$= \frac{u(x_{m+1}, y_{n+1}) - u(x_{m+1}, y_{n-1}) - u(x_{m-1}, y_{n+1}) + u(x_{m-1}, y_{n-1})}{4hl} + O(h^2 + l^2).$$

Будем полагать, что $\frac{l}{h} = const$. Теперь, аналогично тому, как было построено разностное уравнение (3.4), построим для уравнения (3.7) разностное уравнение, обладающее аппроксимацией порядка $O(h^2 + l^2)$.
Имеем

$$a \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + 2b \frac{u_{m+1,n+1} - u_{m+1,n-1} - u_{m-1,n+1} + u_{m-1,n-1}}{4hl} +$$

$$+ c \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2} = f(x_m, y_n), \quad (m, n) \in \Omega_h^0$$

Лекция 2 Аппроксимация граничных условий

- 1 Виды граничных условий.
- 2 Точность вычислений.
- 3 Процесс усреднения Либмана.

1 Виды граничных условий

Для уравнений эллиптического типа могут ставиться на границе $\partial\Omega$ области Ω следующие граничные условия:

1) Первого рода: $u|_{\partial\Omega} = \varphi(y), \quad y \in \partial\Omega. \quad (3.8)$

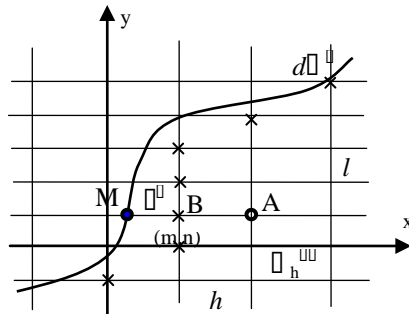
2) Второго рода: $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \psi(y), \quad y \in \partial\Omega, \quad (3.9)$

здесь n - внешняя нормаль.

3) Третьего рода: $\left[\alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x, y) u \right] \Big|_{\partial\Omega} = \chi(y), \quad (3.10)$

где α, β, φ - известные функции.

Рассмотрим замену граничных условий (3.8), (3.9) разностными условиями. Отметим, что эти усло-



вия заменяются разностными условиями на множестве граничных узлов $\partial\Omega_h$.

Пусть (m, n) - некоторый узел из $\partial\Omega_h$ - узел B . $(m+1, n)$ - внутренний узел, ближайший к B по направлению x - узел A . Буквой M обозначим точку контура $\partial\Omega$, ближайшую к B по направлению оси x . Аналогично можно поступать и в том случае, когда ближайшая к B точка будет лежать в направлении оси y .

Координаты этих точек таковы: $M(x_m - \delta, y_n)$ ($0 < \delta < h$), $B(x_m, y_n)$, $A(x_{m+1}, y_n)$. Тогда согласно (3.8) можно положить

$$u_{mn} = \varphi(M) \quad (3.11)$$

для узлов $(m, n) \in \partial\Omega_h$.

2 Точность вычислений

Определим погрешность этой формулы.

$$\varphi(M) = u(x_m - \delta, y_n) = u(x_m, y_n) - \frac{\delta}{1!} u'_x \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)}, \quad x_m - \delta < x_m^{(1)} < x_m.$$

Откуда

$$u(x_m, y_n) - \varphi(M) = u(x_m, y_n) - u_{mn} = \frac{\delta}{1!} u'_x \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)}.$$

Теперь видно, что погрешность формулы (3.11) будет иметь первый порядок относительно h , если предположить, что $\delta = kh$, $k > 0$ - постоянная величина. Если точки M и B совпадают, то формула (3.11) будет точной.

3 Процесс усреднения Либмана

Точность вычисления u_{mn} при $(m, n) \in \partial\Omega_h$ можно повысить, если воспользоваться еще значением $u(x, y)$ в точке A (процесс Либмана). Имеем

$$u(M) = u(x_m - \delta, y_n) = u(B) - \frac{\delta}{1!} u'_x \Big|_{(B)} + \frac{\delta^2}{2!} u''_{xx} \Big|_{(\tilde{B})}, \quad (3.12)$$

где точка \tilde{B} лежит между точками M и B ,

$$u(A) = u(x_m + h, y_n) = u(B) + \frac{\delta}{1!} u'_x \Big|_{(B)} + \frac{\delta^2}{2!} u''_{xx} \Big|_{(\tilde{A})}, \quad (3.13)$$

где точка \tilde{A} лежит между точками A и B . Исключив из (3.12) $u'_x \Big|_{(B)}$ с помощью формулы (3.13), получим

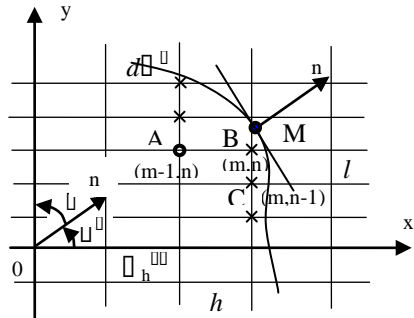
$$u(B) = \frac{h\varphi(M) + \delta u(A)}{h + \delta} + O(h^2).$$

Отбросив величину $O(h^2)$, получим разностное граничное условие, аппроксимирующее граничное условие (3.8) в узле $(m, n) \in \partial\Omega_h$ с погрешностью порядка $O(h^2)$:

$$u(B) = \frac{h\varphi(M) + \delta u(A)}{h + \delta}. \quad (3.14)$$

Формулы вида (3.11), (3.14) могут быть записаны для любого узла $(m, n) \in \partial\Omega_h$.

Обратимся теперь к задаче (3.9). Рассмотрим граничный узел B с координатами (x_m, y_n) , M - ближайшая к B точка контура $\partial\Omega$, A - внутренний узел с координатами (x_{m-1}, y_n) , C - граничный узел с координатами (x_m, y_{n-1}) и \vec{n} - внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке M . Далее $\alpha = \angle(Ox, \vec{n})$, $\beta = \angle(\vec{n}, Oy)$.



Легко видеть, что $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Заменим граничное условие (3.9) разностным в граничном узле B . По определению, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha.$$

Предположим, что в точке B направление нормали \vec{n} сохраняется таким же, как в точке M . Поскольку расстояние между точками M и B есть величина порядка $O(h)$, то это предположение связано с внешением погрешности того же порядка $O(h)$. Значит

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{(M)} \approx \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{(B)}.$$

Поэтому будем иметь

$$\frac{u(x_m, y_n) - u(x_{m-1}, y_n)}{h} \cos \alpha + \frac{u(x_m, y_n) - u(x_m, y_{n-1})}{l} \sin \alpha + O(h+l) = \varphi(M)$$

Отбрасывая погрешность, получим сеточное уравнение

$$\frac{u_{mn} - u_{m-1,n}}{h} \cos \alpha + \frac{u_{mn} - u_{m,n-1}}{l} \sin \alpha = \varphi(M). \quad (3.15)$$

Формула (3.15) есть искоемое разностное уравнение, аппроксимирующее в узле $(m, n) \in \partial\Omega_h$ граничное условие (3.9) с погрешностью порядка $O(h+l)$. Выражения (3.15) должны быть записаны для всех граничных узлов $(m, n) \in \partial\Omega_h$, после чего будут получены разностные граничные условия, аппроксимирующие граничное условие (3.9).

Как видим процесс замены граничных условий разностными может оказаться громоздкой и сложной задачей, особенно если контур $\partial\Omega$ имеет непростую форму.

Замена граничных условий вида (3.10) может быть осуществлена с помощью формул вида (3.11), (3.14), (3.15).

Вопросы сходимости и устойчивости разностных схем для уравнений эллиптического типа рассмотрим на примере задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

Лекция 3 Разностная схема для задачи Дирихле

- 1 Построение разностной схемы задачи Дирихле для уравнения Пуассона.
- 2 Об устойчивости разностной схемы.
- 3 Метод матричной прогонки.

1 Построение разностной схемы задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Пусть в области $\Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (3.16)$$

а на границе $\partial\Omega$ этой области – условие Дирихле

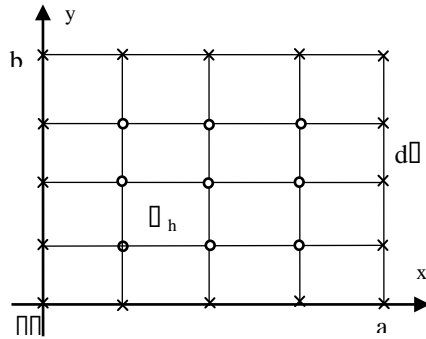
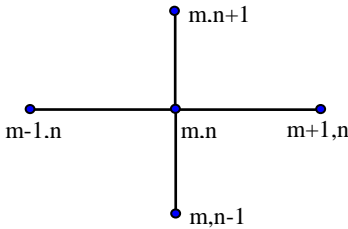
$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(M), \quad (3.17)$$

где φ - известная функция, точка $M \in \partial\Omega$. Будем считать, что задача (3.16), (3.17) имеет единственное решение $u(x, y)$ в области

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ и это решение имеет непрерывные производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$.

Введем в области Ω прямоугольную сетку. К множеству внутренних узлов Ω_h относятся все узлы, лежащие в Ω , а к множеству граничных узлов $\partial\Omega_h$ относятся все узлы, лежащие на границе $\partial\Omega$ области $\bar{\Omega}$.

Для аппроксимации уравнения (3.16) выберем пятиточечный шаблон – крест:



Замену дифференциального уравнения разностным уравнением будем осуществлять только во внутренних узлах сетки. В результате получим

$$u''_{xx}|_{(x_m, y_n)} + u''_{yy}|_{(x_m, y_n)} = f(x_m, y_n).$$

Используя формулу Тейлора, после некоторых преобразований, будем иметь

$$\frac{u(x_{m+1}, y_n) - 2u(x_m, y_n) + u(x_{m-1}, y_n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} +$$

$$+ \frac{u(x_m, y_{n+1}) - 2u(x_m, y_n) + u(x_m, y_{n-1}))}{l^2} - \frac{l^2}{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})} = f(x_m, y_n),$$

где $(m, n) \in \Omega_h^0$, $x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}$, $y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}$.

Пусть функции $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial y^4}$ ограничены по абсолютной величине в области $\bar{\Omega}$. Тогда при достаточно малых h и l можно пренебречь членами, содержащими h^2 и l^2 . В результате получаем следующее разностное уравнение

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}, \quad (3.18)$$

где

$$\delta f^{(h)} \equiv \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0.$$

Условие на границе (3.17) аппроксимируется точно

$$u_{mn} = \varphi(x_m, y_n), \quad (mh, nl) \in \partial\Omega_h.$$

В результате получаем разностную схему, аппроксимирующую задачу (3.16), (3.17) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (3.19)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, \quad (m, n) \in \Omega_h^0,$$

$$f^{(h)} \equiv f(x_m, y_n).$$

Разностная схема (3.19) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, причем число уравнений и число неизвестных u_{mn} равно $(M-1) \times (N-1)$.

2 Об устойчивости разностной схемы

Доказательство устойчивости разностной схемы (3.19) сводится к доказательству следующих двух свойств:

1) Разностная схема

$$L_h z^{(h)} = g^{(h)}, \quad \text{где } g^{(h)} \equiv \begin{cases} \alpha_{mn} \\ \beta_{mn} \end{cases},$$

$g^{(h)}$ - произвольный элемент из F_h , однозначно разрешима.

2) Имеет место оценка

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} \leq C \|g^{(h)}\|_{F_h},$$

где C - постоянная, не зависящая от h и $g^{(h)}$. Нормы в пространствах имеют вид

$$\|z^{(h)}\|_{U_h} = \max_{m,n} |z_{mn}|, \quad \|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\alpha_{mn}| + \max_{m,n} |\beta_{mn}|.$$

Обозначим

$$\Lambda_h u^{(h)} \equiv \Lambda_{xx} u^{(h)} + \Lambda_{yy} u^{(h)}.$$

Лемма 1. Пусть $v^{(h)} = \{v_{mn}\}$, (v_{mn} - не тождественная константа) некоторая сеточная функция, определенная на $\Omega_h = \Omega_h^0 \cup \partial\Omega_h$. Если выполняется условие $\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} \geq 0$, где $(x_m, y_n) \in \Omega_h^0$, то $v^{(h)}$ достигает своего наибольшего значения на Ω_h в граничных точках, т.е. на $\partial\Omega_h$.

Лемма 2. Пусть $v^{(h)} = \{v_{mn}\}$, (v_{mn} - не тождественная константа) некоторая сеточная функция, определенная на $\Omega_h = \Omega_h^0 \cup \partial\Omega_h$. Если выполняется условие $\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} \leq 0$, где $(x_m, y_n) \in \Omega_h^0$, то $v^{(h)}$ достигает своего наименьшего значения на Ω_h в граничных точках, т.е. на $\partial\Omega_h$.

Теорема (принцип максимума). Каждое решение разностного уравнения

$$\Lambda_h v^{(h)}|_{(x_m, y_n)} = 0, \quad (x_m, y_n) \in \Omega_h^0,$$

принимает свое наибольшее и наименьшее значение в некоторых точках границы $\partial\Omega_h$.

Эта теорема применяется к доказательству однозначной разрешимости разностной схемы $L_h z^{(h)} = g^{(h)}$ для любого $g^{(h)} \in F_h$. С этой целью рассматривается однородная разностная схема $L_h z^{(h)} = 0$ и показывается, что она имеет только нулевое решение $z^{(h)} = 0$. Отсюда и будет следовать однозначная разрешимость разностной схемы (3.19).

3 Метод матричной прогонки

Для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при аппроксимации задачи (3.16), (3.17) разностной схемой (3.19), используется метод матричной прогонки.

Перепишем разностную схему (3.19)

$$L_h u^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2} + \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}, & m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ u_{mn}, & (mh, nl) \in \partial\Omega_h \end{cases}$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} f(x_m, y_n) \\ \varphi(x_m, y_n) \end{cases}. \quad (3.20)$$

в следующем виде

$$u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n} + \alpha(u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}) = h^2 f(x_m, y_n) \\ (m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1),$$

$$u_{0n} = \varphi(0, y_n), \quad u_{Mn} = \varphi(a, y_n) \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.21)$$

$$u_{m0} = \varphi(x_m, 0), \quad u_{mN} = \varphi(x_m, b) \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \quad \alpha^2 = \frac{h^2}{l^2} > 0.$$

Пусть $M \gg N$. Введем обозначение

$$u_m = \begin{pmatrix} u_{m1} \\ u_{m2} \\ \dots \\ u_{mN-1} \end{pmatrix}, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \quad (3.22)$$

Положим в формулах (3.21) $n = 1, 2, \dots, N-1$, и, учитывая (3.22), запишем систему уравнений (3.21) в векторной форме:

$$\begin{cases} u_{m+1} + Au_m + u_{m-1} = f_m, & m = 1, 2, \dots, M-1 \\ u_0 = \varphi_0, \quad u_M = \varphi_a \end{cases}, \quad (3.23)$$

где A - трехдиагональная матрица порядка $N-1$ вида

$$A = \begin{pmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) \end{pmatrix},$$

$$f_m = \begin{pmatrix} h^2 f(x_m, y_1) - \alpha \varphi(x_m, 0) \\ h^2 f(x_m, y_2) \\ \dots \\ h^2 f(x_m, y_{N-2}) \\ h^2 f(x_m, y_{N-1}) - \alpha \varphi(x_m, b) \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi(0, y_1) \\ \varphi(0, y_2) \\ \dots \\ \varphi(0, y_{N-1}) \end{pmatrix}, \quad \varphi_a = \begin{pmatrix} \varphi(a, y_1) \\ \varphi(a, y_2) \\ \dots \\ \varphi(a, y_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

Метод матричной прогонки для решения системы линейных алгебраических уравнений (3.23) можно описать следующим образом:

1) По формуле $R_{m+1} = -(A + R_m)^{-1}$, $m = 1, 2, \dots, M-1$, полагая $R_1 = 0$, вычисляем матрицы

$$R_m = \left(R_{ij}^{(m)} \right)_1^{N-1}, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Затем по формуле $S_{m+1} = R_{m+1}(S_m - f_m)$, $m = 1, 2, \dots, M - 1$, полагая

$S_1 = \varphi_0$, вычисляем векторы $S_m = (S_1^{(m)}, S_2^{(m)}, \dots, S_{N-1}^{(m)})^T$, $m = 1, 2, \dots, M$.

2) По формуле $u_{m-1} = R_m u_m + S_m$, $m = M, M - 1, \dots, 1$, полагая $u_M = \varphi_a$, последовательно определяются искомые значения решения задачи (3.23): $u_M, u_{M-1}, \dots, u_1, u_0$.

Указанный алгоритм устойчив к ошибкам округления, если для любого m выполняется условие $\|R_m\|_{III} \leq 1$ (здесь норма матрицы есть корень квадратный из наибольшего собственного значения матрицы $R_m^* R_m$, где * означает переход к комплексно сопряженной и транспонированной матрице).

В описанном выше методе направление прогонки выбирается совпадающим с направлением оси Ox . Такое направление особенно выгодно брать при условии $M \gg N$, так как основной объем вычислений в методе прогонки приходится на определение матриц $R_{m+1} = -(A + R_m)^{-1}$. Этот объем вычислений будет тем меньше, чем меньше порядок матриц $A + R_m$.

Если задача (3.23) такая, что $N \gg M$, то алгоритм метода прогонки следует видоизменить, взяв за направление прогонки ось Oy .

Лекция 4 Метод итерации для решения задачи Дирихле

- 1 Правило Рунге.
- 2 Идея метода итерации.
- 3 Различные итерационные схемы.

1 Правило Рунге

Это правило позволяет на основе вычислений судить о том, с какой точностью получены приближенные сеточные значения решения.

Пусть $u(x, y)$ - точное решение некоторой граничной задачи, а $u_h(x, y)$ - приближенное решение этой задачи, полученное по методу

сеток с шагами h и l , $\frac{l}{h} = const$. В методе сеток часто известен порядок погрешности относительно h

$$\varepsilon_h(x, y) = u(x, y) - u_h(x, y).$$

Предположим, что для $\varepsilon_h(x, y)$ имеет место представление $\varepsilon_h(x, y) = K(x, y) \cdot h^p$, верное с точностью до величин порядка $O(h^{p+1})$, где $K(x, y)$ - некоторая положительная, ограниченная в области Ω функция, p - положительное число.

При шаге, в два раза большем чем h , получим

$$\varepsilon_{2h}(x, y) = u(x, y) - u_{2h}(x, y),$$

$$\varepsilon_{2h}(x, y) = K(x, y) \cdot (2h)^p = 2^p \varepsilon_h(x, y).$$

Из последних формул получается следующее правило для определения $\varepsilon_h(x, y)$ через сеточные значения $u_h(x, y)$ и $u_{2h}(x, y)$:

$$\varepsilon_h(x, y) = \frac{\varepsilon_h(x, y) - \varepsilon_{2h}(x, y)}{2^p - 1}.$$

Эта формула является приближенной, но ее достоинство состоит в том, что $\varepsilon_h(x, y)$ можно реально вычислить.

Учитывая погрешность $\varepsilon_h(x, y)$ получаем, что значение

$$\tilde{u}_h(x, y) = u_h(x, y) + \varepsilon_h(x, y)$$

будет более точное, чем $u_h(x, y)$. В этом и состоит смысл правила Рунге для уточнения сеточных значений $u_h(x, y)$.

Обычно в действительных вычислениях поступают следующим образом. Находят решение при шаге h , потом вычисляют решение при шаге $2h$ и сравнивают значения $u_h(x, y)$ и $u_{2h}(x, y)$ в одинаковых узлах. Если значения совпадают при заданном числе знаков, то решение $u_h(x, y)$ является искомым, в противном случае шаг h делят пополам и вычисляют решение $u_h(x, y)$. И так далее.

2

2 Идея метода итерации

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega = \{0 < x < a, 0 < y < b\}, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}, \quad (3.24)$$

Запишем для задачи (3.24) разностную схему в виде:

$$\Lambda_{xx}(u_{mn}) + \Lambda_{yy}(u_{mn}) = f(x_m, y_n), \quad m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1}. \quad (3.25)$$

$$u_{mn} = \varphi(x_m, y_n), \quad (x_m = mh, y_n = nl) \in \partial\Omega_h$$

Здесь

$$\Lambda_{xx}(u_{mn}) = \frac{u_{m+1,n} - 2u_{m,n} + u_{m-1,n}}{h^2},$$

$$\Lambda_{yy}(u_{mn}) = \frac{u_{m,n+1} - 2u_{m,n} + u_{m,n-1}}{l^2}.$$

Сопоставим задачу (3.24) с родственной ей нестационарной задачей о распространении тепла

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0 \\ v|_{\partial\Omega} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \\ v(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \end{array} \right., \quad (3.26)$$

где $\psi(x, y)$ - произвольная функция, которая выбирается таким образом, чтобы она как можно меньше отличалась от решения задачи (3.24).

В задаче (3.26) источник тепла $f(x, y)$ и температура на границе $\varphi(x, y)$ не зависят от времени t . Поэтому естественно ожидать, что при $t \rightarrow \infty$ будет выполняться соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial t} \rightarrow 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t; x, y) = u(x, y),$$

а, значит,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t; x, y) = u(x, y),$$

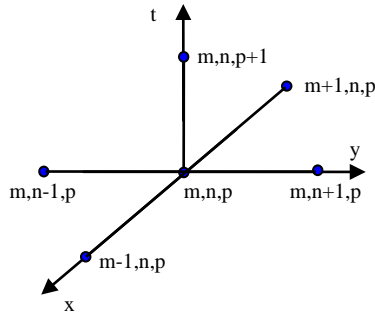
так как в этом случае задачи (3.24) и (3.26) совпадают. Таким образом, можно предполагать, что для достаточно больших значений с необходимой точностью будет верно приближенное равенство

$$v(t; x, y) \approx u(x, y).$$

На этой закономерности основана идея метода решения стационарных задач, состоящая в замене их подходящими нестационарными задачами. Этот метод называется методом установления.

3 Различные итерационные схемы

Запишем разностную схему, реализующую метод установления. Исползуем следующий шеститочечный шаблон



Теперь для задачи (3.26) простейшая явная двухслойная разностная схема будет иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_{mn}^{p+1} - v_{mn}^p}{\tau} = \Lambda_{xx}(v_{mn}^p) + \Lambda_{yy}(v_{mn}^p) - f(x_m, y_n) \\ v_{mn}^{p+1} = \varphi(x_m, y_n), \quad (mh, nl) \in \partial\Omega_h, \quad m = 1, 2, \dots, M-1. \\ v_{mn}^0 = \psi(x_m, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (3.27)$$

Доопределим функцию $\psi(x, y)$ так, чтобы при $(mh, nl) \in \partial\Omega_h$ выполнялось условие $\psi(x_m, y_n) = \varphi(x_m, y_n)$.

Разностная схема (3.27) имеет преимущества по сравнению со схемой (3.25). Схема (3.25) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с числом неизвестных $(M-1) \times (N-1)$. При больших M и N решение таких систем на ЭВМ представляет собой достаточно трудную задачу. В то же время вычисления по формуле (3.27) довольно просты и носят итерационный характер. Разностная схема (3.27) представляет собой простейший **явный метод установления**.

Кроме схемы (3.27) для решения задачи Дирихле можно использовать еще и следующую схему

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w_{mn} - v_{mn}^p}{\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_{xx}(w_{mn}) + \Lambda_{yy}(v_{mn}^p) - f(x_m, y_n)) \\ \frac{v_{mn}^{p+1} - w_{mn}}{\tau} = \frac{1}{2} (\Lambda_{xx}(w_{mn}) + \Lambda_{yy}(v_{mn}^{p+1}) - f(x_m, y_n)) \\ v_{mn}^{p+1} = w_{mn} = \varphi(x_m, y_n), \quad (mh, nl) \in \partial\Omega_h, \quad m = 1, 2, \dots, M-1 \\ v_{mn}^0 = \psi(x_m, y_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad p = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Вычисления по схеме (3.28) сложнее, чем вычисления по схеме (3.27), но гораздо проще, чем по схеме (3.25). Это особенно видно, когда при решении задачи (3.28) воспользоваться методом разностной прогонки по направлению переменной x для вычисления значений $\{w_{mn}\}$ и методом разностной прогонки по направлению переменной y для вычисления значений $\{v_{mn}^p\}$.

Разностную схему (3.28) называют **методом переменных направлений**.

Лекция 5 Метод Рунца для решения задачи Дирихле

1 Метод Рунца.

2 Метода прямых для уравнения Пуассона.

1 Метод Рунца

Будем искать решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.29)$$

и

$$u|_{\partial\Omega} = f(x, y), \quad (3.30)$$

где $\partial\Omega$ - простой замкнутый контур, ограничивающий конечную область Ω , а функция $f(x, y)$ непрерывная на $\partial\Omega$.

Согласно методу Рунца, эта краевая задача эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$F[y] = \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (3.31)$$

в классе функций, имеющих непрерывные частные производные до второго порядка включительно в замкнутой области $\Omega + \partial\Omega$ и удовле-

ле. Точность приближения зависит от выбора координатных функций и от числа этих функций.

2 Метода прямых для уравнения Пуассона

Метод прямых можно рассматривать как предельный случай метода сеток, когда при применении прямоугольной сетки один из ее линейных размеров стремится к нулю, а множество узлов в пределе заполняет некоторую систему прямолинейных параллельных отрезков. Если коэффициенты в исходном уравнении не зависят от переменной x , то система метода прямых состоит из линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решение последних не вызывает трудностей.

Этот метод применим для уравнения Пуассона. Пусть в прямоугольной области $R\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ задано уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3.36)$$

и требуется найти решение $u = u(x, y)$ этого уравнения, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} u(x, c) = \varphi_0(x), & u(x, d) = \varphi_1(x) \\ u(a, y) = \psi_0(x), & u(b, y) = \psi_1(x) \end{cases}, \quad (3.37)$$

где функции f, ψ_k ($k = 0, 1$) непрерывны и $\varphi_k \in C^{(2)}[a, b]$ ($k = 0, 1$).

Будем решать краевую задачу (3.36) – (3.37) **методом прямых**.

Для этого выберем шаг $h = \frac{d-c}{n}$ и через точки деления $y_j = y_0 + hj$ ($j = 0, 1, \dots, n; y_0 = c, y_n = d$) проведем параллели $y = y_j$. Пусть $u_j(x) = u(x, y_j)$. Предполагая, что функция $u(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по y до шестого порядка включительно, разложим функции $u_{j+1}(x) = u(x, y_j + h)$ и $u_{j-1}(x) = u(x, y_j - h)$ по формуле Тейлора с точностью до $O(h^6)$. Имеем

$$\begin{aligned} u_{j+1}(x) = u_j(x) + \frac{\partial u(x, y_j)}{\partial y} h + \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 u(x, y_j)}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \\ + \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^5 u(x, y_j)}{\partial y^5} \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 u(x, y_j + \theta_1 h)}{\partial y^6} \frac{h^6}{6!}, \quad 0 < \theta_1 < 1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

и

$$\begin{aligned}
u_{j-1}(x) = & u_j(x) - \frac{\partial u(x, y_j)}{\partial y} h + \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 u(x, y_j)}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \\
& + \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} - \frac{\partial^5 u(x, y_j)}{\partial y^5} \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 u(x, y_j - \theta_2 h)}{\partial y^6} \frac{h^6}{6!}, \quad 0 < \theta_2 < 1
\end{aligned} \quad (3.39)$$

Сложив равенства (3.38) и (3.39), получим

$$u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} + O(h^6). \quad (3.40)$$

Заменяя в формуле (3.40) функции

$$u_k(x) = u(x, y_k), \quad k = j+1, j, j-1$$

соответствующими вторыми производными $\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2}$ и ограничива-

ясь членами порядка h^2 , будем иметь

$$\frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} = \frac{\partial^4 u(x, y_j)}{\partial y^4} h^2 + O(h^4). \quad (3.41)$$

Исключая из формул (3.40) и (3.41), производную четвертого порядка и отбрасывая члены порядка h^6 , получаем приближенную формулу

$$\begin{aligned}
u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \\
= h^2 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} \right],
\end{aligned}$$

которая после приведения подобных членов принимает вид

$$\begin{aligned}
u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x) = \\
= \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x, y_{j+1})}{\partial y^2} + 10 \frac{\partial^2 u(x, y_j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{j-1})}{\partial y^2} \right]. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Формула (3.42), имеющая точность $O(h^6)$, может быть использована для решения краевой задачи (3.36) – (3.37). Действительно, из уравнения (3.36) при $y = y_k$ имеем

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} = f_k(x) - u_k''(x), \quad (3.43)$$

где $f_k(x) = f(x, y_k)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Отсюда, заменяя в формуле (3.42) вторые частные производные по y их значениями из формулы (3.43),

для определения решений $u_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u_{i+1}''(x) + 10u_i''(x) + u_{i-1}''(x) + \frac{12}{h^2}[u_{i+1}(x) - 2u_i(x) + u_{i-1}(x)] = \\ = f_{i+1}(x) + 10f_i(x) + f_{i-1}(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Эта усовершенствованная система (3.44) метода прямых была предложена М.Г.Слободянским и аппроксимирует уравнение Пуассона с точностью до $\frac{12}{h^2}O(h^6) = O(h^4)$.

На основании краевых условий (3.37) дополнительно получаем $u_0(x) = \varphi_0(x)$, $u_n(x) = \varphi_1(x)$; $u_j(a) = \psi_0(y_j)$, $u_j(b) = \psi_1(y_j)$ $(j = 1, 2, \dots, n-1)$.

Отсюда

$$u_0''(x) = \varphi_0''(x), \quad u_n''(x) = \varphi_1''(x).$$

Общее решение системы (3.44), как известно, складывается из частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы

$$v_{i+1}''(x) + 10v_i''(x) + v_{i-1}''(x) + \frac{12}{h^2}[v_{i+1}(x) - 2v_i(x) + v_{i-1}(x)] = 0. \quad (3.46)$$

Очевидно, что общее решение системы (3.46) не зависит от области R и краевых условий (3.37) и для данного уравнения (3.36) может быть получено раз и навсегда. Приведем без вывода формулы общего решения системы (3.46):

$$v_i(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k (y_i - y_0)}{l} (A_k e^{\sigma_i x} + B_k e^{-\sigma_i x}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $l = d - c$, A_k , B_k - произвольные постоянные и

$$\sigma_i^2 = \frac{24}{h^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi (y_i - y_0)}{2l}}{5 + \cos \frac{\pi (y_i - y_0)}{l}}.$$

Частное решение неоднородной системы (3.44) находится обычным путем, в крайнем случае, можно применить метод вариации произвольных постоянных. Для отыскания постоянных A_k , B_k на основании условий (3.45) получается алгебраическая система $2n - 2$ уравнений.

Тема 4 РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Лекция 1 Метод сеток для уравнений гиперболического типа

- 1 Постановка задач для уравнений гиперболического типа.
- 2 Решение задачи Коши.
- 3 Треугольник определенности.

1 Постановка задач для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим волновое уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (4.1)$$

где $f(x, y)$ - известная дважды непрерывно дифференцируемая в области Ω функция.

Будем рассматривать следующие задачи:

1) **Задача Коши.** В области $\Omega = \{y > 0; -\infty < x < \infty\}$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y)$, которая в этой области удовлетворяла бы уравнению (4.1), а на прямой $y = 0$ - начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \psi(x), \quad (4.2)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции.

2) **Смешанная граничная задача.** В области $\Omega = \{y > 0; a < x < b\}$ найти дважды непрерывно дифференцируемую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (4.1), а на границе области $\partial\Omega$ при $y = 0$ - начальным условиям (4.2) и при $x = a$ и $x = b$ - одному из граничных условий:

а) первого рода:

$$u(a, y) = \mu_1(y), \quad u(b, y) = \mu_2(y). \quad (4.3)$$

б) второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \sigma_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = \sigma_2(y). \quad (4.4)$$

в) третьего рода:

$$\begin{cases} \left[\tau_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_2(y) u \right]_{x=a} = \omega_1(y) \\ \left[\delta_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(y) u \right]_{x=b} = \omega_2(y) \end{cases}, \quad (4.5)$$

где $\mu_i, \sigma_i, \tau_i, \delta_i, \omega_i$ ($i=1,2$) - известные функции, причем $|\tau_1(y)| + |\tau_2(y)| > 0$, $|\delta_1(y)| + |\delta_2(y)| > 0$.

2 Решение задачи Коши

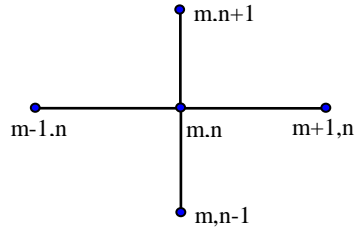
Для решения задачи Коши (4.1), (4.2) будем использовать метод сеток. Выберем прямоугольную сетку:

$$x_m = mh, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad y_n = nl, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad h > 0, \quad l > 0$$

и на этой сетке рассмотрим трехслойный пятиточечный шаблон вида крест.

В соответствии с выбранным шаблоном к множеству внутренних узлов относятся узлы $(x_m, y_n) \in \Omega$, а к $\partial\Omega_h$ - узлы, лежащие на прямой $y = 0$.

Используя выбранный шаблон, а также соответствующие формулы для замены вторых производных, получим следующую разностную схему:



$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (4.6)$$

где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2} \\ u_m^0 \\ \frac{u_m^1 - u_m^0}{l} \end{cases}, \quad f^{(h)} = \begin{cases} f(x_m, y_n) \\ \varphi(x_m) \\ \psi(x_m) \end{cases},$$

причем $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots$.

Эта схема аппроксимирует уравнение (4.1) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$, а начальное условие – с погрешностью $O(l)$. Действительно, по определению погрешности аппроксимации получим

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \mathcal{E}f^{(h)},$$

где $[u]_h$ - значение точного решения задачи (4.1), (4.2) в узлах сетки Ω_h , а $\mathcal{E}f^{(h)}$ - погрешность аппроксимации, которая имеет вид

$$\mathcal{E}f^{(h)} \equiv \begin{cases} \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(x_m^{(1)}, y_n)} + \frac{l^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, & x_{m-1} < x_m^{(1)} < x_{m+1}, \\ 0, & y_{n-1} < y_n^{(1)} < y_{n+1}, \\ \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{(x_m, y_n^{(1)})}, & y_0 < y_0^{(1)} < y_1, m = 0, \pm 1, \dots; n = 1, 2, \dots \end{cases} .$$

Если предположить, что решение задачи (4.1), (4.2) продолжимо в область $\Omega = \{-l \leq y \leq 0, -\infty < x < +\infty\}$, то порядок аппроксимации начальных условий можно повысить. Используя центральную разностную производную, получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_m, 0)} = \frac{u(x_m, y_1) - u(x_m, y_{-1})}{2l} - \frac{l^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{(x_m, y_0^{(2)})}, \quad y_{-1} = l, -l < y_0^{(2)} < l.$$

Отбрасывая погрешность порядка $O(l^2)$, будем иметь

$$\frac{u_m^1 - u_m^{-1}}{2l} = \psi(x_m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.7)$$

Значение u_m^{-1} исключим из (4.7). Для этого используем само разностное уравнение при $n = 0$

$$\frac{u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0}{h^2} - \frac{u_m^1 - 2u_m^0 + u_m^{-1}}{l^2} = f(x_m, y_n).$$

В результате равенство (4.7) примет вид

$$\frac{u_m^1 - u_m^0}{l} = \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_m^0) - \frac{l}{2} f(x_m, y_n),$$

где $\Lambda_{xx}(u_m^0) \equiv \frac{u_{m+1}^0 - 2u_m^0 + u_{m-1}^0}{h^2}$.

Таким образом, вместо разностной схемы (4.6) можно рассмотреть разностную схему

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (4.8)$$

которая аппроксимирует задачу (4.1), (4.2) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$. Здесь оператор L_h - такой же как и ранее, а $f^{(h)}$ определяется по формуле

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f(x_m, y_n), & m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; n = 1, 2 \\ \varphi(x_m) \\ \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_m^0) - \frac{l}{2} f(x_m, y_n) \end{cases}.$$

Представим разностное уравнение в схеме (4.8) в виде

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n + l^2 \Lambda_{xx}(u_m^n) - u_m^{n-1} - l^2 f(x_m, y_n), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.9)$$

Тогда численная реализация разностной схемы (4.8) проводится следующим образом:

Из (4.8) определяется решение на нулевом и первом слоях

$$u_m^0 = \varphi(x_m),$$

$$u_m^1 = \varphi(x_m) + l[\psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(\varphi(x_m)) - \frac{l}{2} f(x_m, y_0)], \quad m = 0, \pm 1, \dots \quad (4.10)$$

Так как значения u_m^0 и u_m^1 известны, то по формуле (4.9) при $n = 1$ можно вычислить значение u_m^2 , $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Далее по формуле (4.9) определяется решение при $n = 2, 3, 4, \dots$.

Разностная схема (4.8) устойчива при $l \leq h$.

3 Треугольник определенности

Рассмотрим вопрос о связи $\frac{l}{h}$, т.е. каким может быть $\gamma > 0$

($\gamma = \frac{l}{h}$) в случае гиперболического уравнения.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (4.1) с начальными условиями (4.2). Разностная схема (4.8) в этом случае записывается

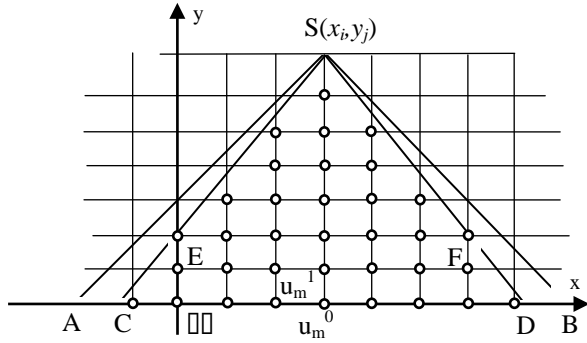
$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= \gamma^2 u_{m+1}^n + (2 - 2\gamma^2) u_m^n + \gamma^2 u_{m-1}^n - u_m^{n-1}, & (4.11) \\ u_m^0 &= \varphi(x_m), \quad u_m^1 = \varphi(x_m) + l\psi(x_m). \end{aligned}$$

Учитывая шаблон, значения u_i^j в конечном счете может быть выражено через значения u_m^0 и u_m^1 . Все эти значения находятся внутри ΔSCD , причем $\angle SDC = \arctg(-\gamma)$, а $\angle SCD = \arctg(\gamma)$. Треугольник

ΔSCD называют **треугольником определенности** разностной схемы (4.11).

Таким образом, значение u_i^j в точке S определяется разностным уравнением (4.11) и начальными значениями $u_m^0 \in CD$ и $u_m^1 \in EF$.

Точное же значение решения $u(x, y)$ этой задачи с



начальными условиями (4.2), как известно из математической физики, определяется этим однородным уравнением и начальными условиями, содержащимися на отрезке, отсекаемом характеристиками, проходящими через точку S , на прямой $y = 0$, т.е. на отрезке AB . Эти характеристики образуют соответственно углы $\angle SAB = \frac{\pi}{4}$ и $\angle SDB = \frac{3\pi}{4}$. Треугольник SAB называется **треугольником определенности** дифференциального уравнения.

В случае, когда $\angle SAB < \angle SCD$ и $\text{tg}(\angle SCD) = \gamma = \frac{l}{h} > 1$, соотношение шагов оказывается неудачным, так как в этом случае $\Delta SCD \subset \Delta ASB$. И если мы каким-либо образом изменим начальные условия на отрезках AC и DB , то это может изменить и решение исследуемой задачи во всей области Ω , в том числе и в точке S . Однако сеточное значение u_i^j в точке S от таких изменений зависеть не будет и остается прежним. Значит, в этом случае нельзя надеяться на сходимость решения разностной схемы (4.11), а значит эта разностная схема не может быть устойчивой. Значит, при $\gamma > 1$ - устойчивости нет.

Но если $\Delta ASB \subset \Delta SCD$, то это означает, что $\frac{l}{h} = \gamma \leq 1$, и можно надеяться на устойчивость. Таким образом, в разностной схеме (4.11) для устойчивости необходимо положить $\gamma \leq 1$.

Заметим, что мысль о том, что треугольник определенности дифференциального уравнения должен содержаться в треугольнике

определенности разностного уравнения, была высказана впервые Курантом, Фридрихсом и Леви.

Лекция 2 Метод сеток для решения смешанной задачи

1 Решение смешанной задачи.

2 Метод прямых для уравнения колебания струны.

1 Решение смешанной задачи

Пусть уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (4.12)$$

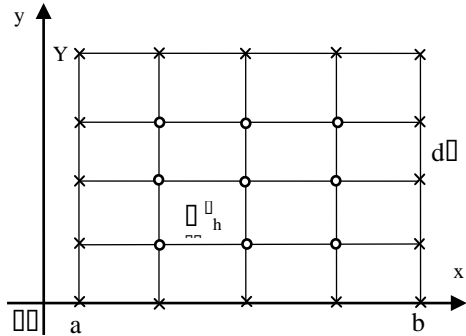
задано в области

$$\Omega = \{0 < y \leq Y < +\infty, a < x < b\}$$

Будем считать, что решение уравнения (4.12) удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u'_y|_{y=0} &= \psi(x) \end{aligned} \quad (4.13)$$

при $a \leq x \leq b$ и граничным условиями



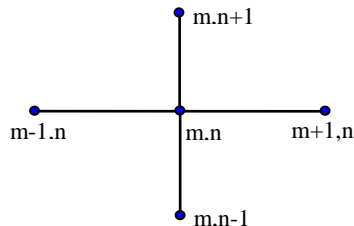
$$\begin{aligned} \left[\tau_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_2(y) u \right]_{x=a} &= \omega_1(y) \\ \left[\delta_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_2(y) u \right]_{x=b} &= \omega_2(y) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Предположим, что смешанная задача (4.12) – (4.14) имеет единственное решение в области $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ - контур области Ω), непрерывные вместе с четвертыми производными по x и y в области $\bar{\Omega}$.

Выберем в области Ω прямоугольную и равномерную сетку

$$x_m = mh, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad h = \frac{b-a}{M},$$

$$y_n = nl, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad l > 0$$



и на этой сетке рассмотрим пятиточечный явный шаблон

$$\begin{aligned}\Omega_h &= \Omega_h^0 + \partial\Omega_h, \\ \Omega_h^0 &= \{(x_m, y_n), \\ & \quad m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1},\end{aligned}$$

$$\partial\Omega_h = \{(x_m, y_n), m = 0, 1, \dots, M, n = 0; m = 0, n = 0, 1, \dots, N\}.$$

На выбранном шаблоне уравнение (4.12) и начальные условия (4.13) аппроксимируются разностной схемой (4.8). Для замены граничных условий на прямых $x = a$ и $x = b$ воспользуемся формулами

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(m,n)} &= \frac{u(x_{m+1}, y_n) - u(x_m, y_n)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_m^{(1)}, y_n)}, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{(m,n)} &= \frac{u(x_m, y_n) - u(x_{m-1}, y_n)}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{(x_m^{(2)}, y_n)}.\end{aligned}$$

Таким образом, соответствующие разностные граничные условия будут аппроксимировать (4.14) с порядком $O(h)$.

Окончательно разностная схема, аппроксимирующая граничную задачу (4.12) – (4.14) с погрешностью порядка $O(h + l^2)$, имеет вид

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (4.15)$$

где

$$L_h u^{(h)} \equiv \left\{ \begin{aligned} & \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{l^2}, \quad m = \overline{1, M-1}, n = \overline{1, N-1} \\ & u_m^0, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ & \frac{u_m^1 - u_m^0}{l}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \\ & \tau_{1n} \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \tau_{2n} u_0^n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \\ & \delta_{1n} \frac{u_M^n - u_{M-1}^n}{h} + \delta_{2n} u_M^n, \quad n = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \right. ,$$

$$f^{(h)} \equiv \left\{ \begin{array}{l} f(x_m, y_n), \quad m=1,2,\dots,M-1; n=1,2,\dots,N-1, \\ \varphi(x_m), \quad m=0,1,\dots,M, \\ \psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(u_m^0) - \frac{l}{2} f(x_m, 0), \quad m=0,1,\dots,M, \\ \omega_{1n}, \quad n=0,1,\dots,N, \\ \omega_{2n}, \quad n=0,1,\dots,N \end{array} \right.$$

Если $\tau_1(y) = \delta_1(y) = 0$ и $\tau_2(y) = \delta_2(y) = 1$, то разностная схема (4.15) аппроксимирует граничную задачу (4.12) – (4.14) с погрешностью порядка $O(h^2 + l^2)$.

Численная реализация разностной схемы (4.15) осуществляется следующим образом. Вначале, используя формулы

$$u_m^0 = \varphi(x_m),$$

$$u_m^1 = \varphi(x_m) + l[\psi(x_m) + \frac{l}{2} \Lambda_{xx}(\varphi(x_m)) - \frac{l}{2} f(x_m, 0)], \quad m=0, \pm 1, \dots, M,$$

вычисляем значения на нулевом и первом слоях u_m^0 и u_m^1 . Затем по уравнению

$$u_m^{n+1} = 2u_m^n + l^2 \Lambda_{xx}(u_m^n) - u_m^{n-1} - l^2 f(x_m, y_n)]$$

при $n=1$ определяются значения $u_1^2, u_2^2, \dots, u_{M-1}^2$. Для вычисления значений u_0^2 и u_M^2 используются разностные граничные условия при $n=2$ вида

$$u_0^2 = \frac{\tau_{12}}{\tau_{12} - h\tau_{22}} u_1^2 - \frac{h\omega_{12}}{\tau_{12} - h\tau_{22}},$$

$$u_M^2 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{12} + h\delta_{22}} u_{M-1}^2 - \frac{h\omega_{22}}{\delta_{12} + h\delta_{22}},$$

причем $\tau_{12} - h\tau_{22} \neq 0$ и $\delta_{12} + h\delta_{22} \neq 0$.

Аналогично, по значениям u_m^1, u_m^2 ($m=0,1,\dots,M$), вычисляются значения u_m^3 и т.д.

2 Метод прямых для уравнения колебания струны

Рассмотрим метод прямых приближенного решения простейшего уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (4.16)$$

в области $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t < \infty$ при следующих начальных и граничных условиях

$$\begin{aligned} u \Big|_{t=0} &= \varphi_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_2(x), \\ u(0, t) &= \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Проведем систему параллельных прямых

$$x = x_k = kh \quad (k = 0, 1, \dots, n+1; \quad h = \frac{l}{n+1})$$

и обозначим через $u_k(x)$ значения точного решения $u(x, t)$ задачи

$$(4.16) - (4.17) \text{ на прямой } x = x_k, \text{ т.е. } u_k(x) = u(x_k, t). \text{ Если } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=x_k}$$

заменить разностным отношением

$$\frac{u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t))}{h^2}$$

то получим следующую систему уравнений метода прямых:

$$\begin{cases} U_k''(t) - \frac{U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)}{h^2} = f_k(t), & k = 1, 2, \dots, n \\ U_0(t) = \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{cases} \quad (4.18)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} U_k(0) = \varphi_1(x_k) = \varphi_{1,k} \\ U_k'(0) = \varphi_2(x_k) = \varphi_{2,k} \end{cases}, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (4.19)$$

аппроксимирующую уравнение (4.16) с точностью до h^2 .

Чтобы получить систему уравнений метода прямых, более точно аппроксимирующую уравнение (4.16), воспользуемся равенством, аналогичным равенству (3.40):

$$\begin{aligned} u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t) &= \\ &= \frac{5h^2}{6} \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2} \right] + O(h^6). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Из дифференциального уравнения (4.16) получим

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial t^2} - f(x_k, t) = u_k''(t) - f_k(t).$$

Тогда соотношение (4.20) после подстановки значений вместо производных

водных $\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2}$ дает

$$\begin{aligned} & \frac{5}{6} u_k''(t) + \frac{1}{12} [u_{k+1}''(t) + u_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)] = \\ & = \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)] + O(h^4) \end{aligned}$$

Отбрасывая член $O(h^4)$ и заменяя при этом $u_k(t)$ на $U_k(t)$, получим следующую систему уравнений метода прямых:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{5}{6} U_k''(t) + \frac{1}{12} [U_{k+1}''(t) + U_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = \\ & = \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)], \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ & U_0(t) = \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right. \quad (4.21)$$

с начальными условиями

$$U_k(0) = \varphi_1(x_k) = \varphi_{1k}, \quad U_k'(0) = \varphi_2(x_k) = \varphi_{2k}. \quad (4.22)$$

Эта система уже дает аппроксимацию порядка h^4 .

Отметим, что общее решение однородных систем, соответствующих системам дифференциальных уравнений метода прямых (4.18) и (4.21), несложно построить.

Построим для примера общее решение системы

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{5}{6} U_k''(t) + \frac{1}{12} [U_{k+1}''(t) + U_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = 0 \\ & U_0(t) = U_{n+1}(t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right. \quad (4.23)$$

соответствующей системе (4.21). Частные решения этой системы будем искать в виде

$$U_k(t) = \gamma(k)v(t).$$

Подставляя эти значения в систему (4.23), получим

$$\begin{aligned} & v''(t) \left[\frac{5}{6} \gamma(k) + \frac{1}{12} \gamma(k+1) + \frac{1}{12} \gamma(k-1) \right] - \\ & - \frac{v(t)}{h^2} [\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)] = 0, \\ & \gamma(0) = \gamma(n+1) = 0. \end{aligned}$$

или

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{h^2 \left[\frac{5}{6}\gamma(k) + \frac{1}{12}\gamma(k+1) + \frac{1}{12}\gamma(k-1) \right]} = -\delta^2 = \text{const} \quad (4.24)$$

Для отыскания $\gamma(k)$ получаем разностное уравнение

$$\left[1 + \frac{1}{12}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k+1) - \left[2 - \frac{5}{6}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k) + \left[1 + \frac{1}{12}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k-1) = 0 \quad (4.25)$$

с граничными условиями

$$\gamma(0) = \gamma(n+1) = 0. \quad (4.26)$$

Его общее решение имеет вид

$$\gamma(k) = C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k,$$

где λ_1 и λ_2 - корни уравнения

$$\lambda^2 - \frac{2[12 - 5\delta^2 h^2]}{12 + \delta^2 h^2} \lambda + 1 = 0.$$

Из граничных условий имеем

$$\gamma(0) = C_1 + C_2 = 0, \quad C_2 = -C_1,$$

$$\gamma(n+1) = C_1 \lambda_1^{n+1} + C_2 \lambda_2^{n+1} = C_1 (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n+1 \sqrt[2]{1} = e^{\frac{2\pi is}{n+1}}, \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

или, так как $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, то

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = e^{\frac{\pi is}{n+1}}.$$

Далее, согласно теореме Виета

$$\frac{2[12 - 5\delta^2 h^2]}{12 + \delta^2 h^2} = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos \frac{\pi s}{n+1},$$

откуда

$$\delta_s^2 = \frac{24 \sin^2 \frac{ns}{2(n+1)}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{ns}{2(n+1)} \right]} = \frac{24 \sin^2 \frac{n(y_s - y_0)}{2l}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{n(y_s - y_0)}{2l} \right]} \quad (4.27)$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots, n),$$

а

$$\gamma_s(k) = C_1 \left(e^{\frac{\pi isk}{n+1}} - e^{-\frac{\pi isk}{n+1}} \right) = C \sin \frac{\pi isk}{n+1} = C \sin \frac{\pi sx_k}{l} \quad (4.28)$$

(при $s = 0$ получаем тривиальное решение $\gamma_0(k) \equiv 0$).

Из уравнения (4.24) имеем

$$v''(t) + \delta_s^2 v(t) = 0,$$

или

$$v_s(t) = A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t.$$

Таким образом,

$$U_{k,s} = \sin \frac{\pi sx_k}{l} (A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t).$$

Общее решение однородной системы (4.23) имеет вид:

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi sx_k}{l} (A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t). \quad (4.29)$$

где A_s, B_s - произвольные постоянные.

Нвйдя методом вариации постоянных частное решение неоднородной системы (4.21), получим общее решение ее как сумму частного решения и построенного общего решения (4.29) однородной системы. Постоянные A_s и B_s ($s = 1, 2, \dots, n$) находятся из условий (4.22).

Без вывода приведем общее решение однородной системы, соответствующей системе (4.18)

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi sx_k}{l} (C_s \cos \delta'_s t + D_s \sin \delta'_s t),$$

где $\delta'_s = \frac{4 \sin^2 \frac{\pi x_s}{2l}}{h^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$

Сходимость решений, полученных методом прямых, к обобщенному решению задачи (4.16) – (4.17) имеет место в любом прямоугольнике $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$, если начальные и граничные условия нулевые, а функция $f(x, t)$ ограничена некоторой положительной константой. Общий случай начальных и граничных условий сводится к этому случаю при выполнении некоторых требований на гладкость функций $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ и условий сопряжения.