Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. В. БОРОДИЧ

ВЕКТОРНАЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практическое руководство

для студентов физических специальностей вуза

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2016

УДК 512:514.123.1(076)
ББК 22.1 я73
В 937

Рецензенты:
доктор физико-математических наук А. Н. Скиба,
кандидат физико-математических наук С. П. Новиков

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Бородич, Т. В.

Б 937 **Векторная и аналитическая геометрия** : практическое руководство / Т. В. Бородич ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – 47 с.

ISBN 978-985-439-591-3

В практическом руководстве рассматриваются теоретические проблемы векторной геометрии и аналитической геометрии на плоскости : геометрические векторы, системы координат, преобразование системы координат, уравнение прямой на плоскости, уравнение плоскости в пространстве, взаимное расположение прямой и плоскости. Даются примеры, задания, вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля.

Адресовано студентам физических специальностей вуза.

УДК 512:514.123.1(076)
ББК 22.1 я73

ISBN 978-985-439-908-9

Оглавление

Введение

Курс «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» занимает важное место в математическом образовании студентов физического факультета. Математические методы аналитической геометрии и линейной алгебры лежат в основе классической механики, теории тяготения, теории света, физических полей, гидро- и аэродинамики, акустики и всех других направлений исследования в области физики. Математические методы позволяют получить количественные характеристики физических явлений, рассчитать с заданной точностью ход реальных процессов, проникнуть в суть закономерностей физических явлений, предсказать новые эффекты.

Известно, что геометрия возникла из практики, в частности из измерения земли, а само слово «геометрия» и означает «землемерие». Основными задачами геометрии являются изучение взаимного расположения тел, а также преобразования тел.

Аналитическая геометрия – геометрия координатного метода. В ней геометрические объекты описываются алгебраическими уравнениями в декартовых (иногда аффинных) координатах и затем исследуются методами алгебры и анализа.

Аналитическая геометрия позволяет решать геометрические задачи аналитически, то есть алгебраическими методами. Это означает, что вместо рисования чертежа и изучения составляющих его геометрических объектов пишутся формулы. Аналитическая геометрия легко справляется с задачами в пространствах любой размерности, в то время как геометрические методы решения в этом случае или очень сложны, или просто невозможны.

Методы аналитической геометрии и линейной алгебры применяются в качестве аппарата и инструмента исследования физических явлений. Современный физик должен иметь широкую и глубокую математическую подготовку, хорошо владеть новейшими математическими методами исследования, которые могут применяться в области его деятельности.

1 Пространство геометрических векторов

1.1 Понятие геометрического вектора

Некоторые физические величины (например: температура, масса, объём, длина) могут быть охарактеризованы одним числом, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Такие величины называются *скалярными***.** Другие величины (например: сила, скорость, ускорение) характеризуются не только числом, но и направлением. Эти величины называются *векторными***.** Для описания таких величин в математике введено понятие «вектор».

Любая упорядоченная пара точек A и B пространства определяет *направленный отрезок*, то есть отрезок с заданным на нём направлением. Направленный отрезок называется *вектором.* На рисунке направление вектора обычно изображают стрелкой. Если в упорядоченной паре точка A первая, то её называют *началом векторам*, а точку B – *концом вектора*, в этом случае вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Иногда векторы обозначают малыми буквами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и так далее

Модулем вектора $\vec{a}$ называется его длина. Обозначают модуль $|\vec{a}|$ или a. *Нуль-вектор* **(**или *нулевой вектор***)** – это вектор, начало и конец которого совпадают; обозначается он $\vec{o}$. Модуль нуль-вектора равен нулю, а направление не определено. *Единичным* называется вектор, длина которого равна единице.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными***,** если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы могут быть направлены одинаково или противоположно (рисунок 1.1).

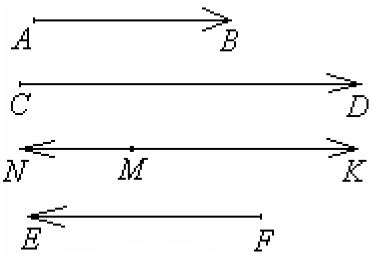

Рисунок 1.1

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными* (обозначается $\vec{a}=\vec{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные модули.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *противоположными* (обозначается $\vec{a}=-\vec{b}$), если они коллинеарны, противоположно направлены и имеют равные модули.

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются *компланарными***,** если они лежат в одной плоскости.

1.2 Операция сложения векторов и её свойства

К линейным операциям над векторами относятся: сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число.

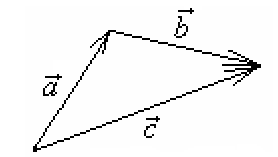

Рисунок 1.2

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ отложен из конца вектора $\vec{a}$ (рисунок 1.2). Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

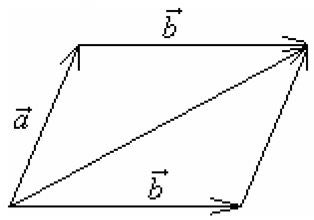

Рисунок 1.3

Суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}_1$, а конец – с концом вектора $\vec{a}_n$, если каждый последующий вектор $\vec{a}_{i+1}$ отложен из конца предыдущего $\vec{a}_i$ для $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

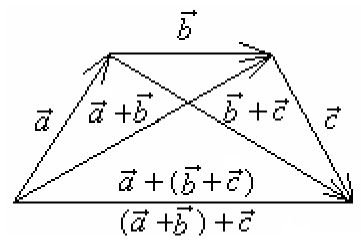

Рисунок 1.4

Свойства суммы векторов

1. Свойство коммутативности: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (рисунок 1.3).
2. Свойство ассоциативности:
$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (рисунок 1.4).
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

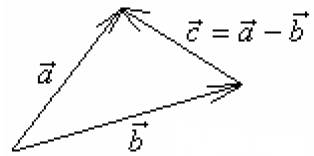

Рисунок 1.5

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (обозначается: $\vec{a} - \vec{b}$) называется такой вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$, то есть $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рисунок 1.5).

Нетрудно заметить, что $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

1.3 Операция умножения вектора на число и её свойства

Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ на число $\alpha \neq 0$ называется вектор $\vec{b}$ (обозначается $\vec{b} = \alpha\vec{a}$), удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$;

б) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

в) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены при $\alpha > 0$ и противоположно направлены при $\alpha < 0$.

Свойства произведения вектора на число

1. $(\vec{a}\beta)\alpha = \vec{a}(\beta\alpha)$.

2. $(\vec{a}_1 + ... + \vec{a}_n)\alpha = \vec{a}_1\alpha + ... + \vec{a}_n\alpha$.

3. $\vec{a}(\alpha_1 + ... + \alpha_n) = \vec{a}\alpha_1 + ... + \vec{a}\alpha_n$.

4. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ для некоторого α.

1.4 Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось ℓ и некоторый вектор $\overrightarrow{AB}$ (рисунок 1.6). Пусть A_1 – проекция точки A на ось ℓ, B_1 – проекция точки B на ось ℓ.

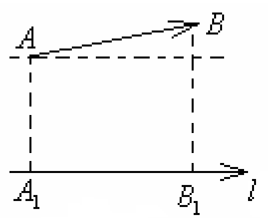

Рисунок 1.6

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось ℓ называется величина A_1B_1 вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, взятая со знаком «+», если $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси ℓ, и со знаком «–», если $\overrightarrow{A_1B_1}$ противоположно направлен направлению оси ℓ. Обозначается: $np_l\overrightarrow{AB}$.

Свойства проекции векторов на ось

1. $np_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \wedge l)$ (рисунок 1.7).

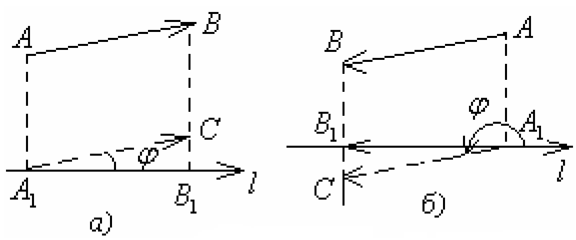

Рисунок 1.7

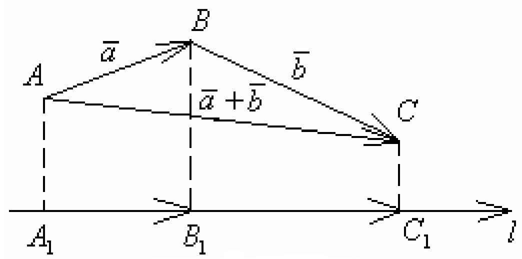

Рисунок 1.8

2. $np_l(\vec{a} + \vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$ (рисунок 1.8).

3. $np_l(\vec{a}_1 + ... + \vec{a}_n) = np_l\vec{a}_1 + \ldots + np_l\vec{a}_n$.

4. $np_l(\vec{a}\alpha) = (np_l\vec{a})\alpha$ (рисунок 1.9).

5. $np_l(\vec{a}_1\alpha_1 + ... + \vec{a}_n\alpha_n) = (np_l\vec{a}_1)\alpha_1 + \ldots + (np_l\vec{a}_n)\alpha_n$.

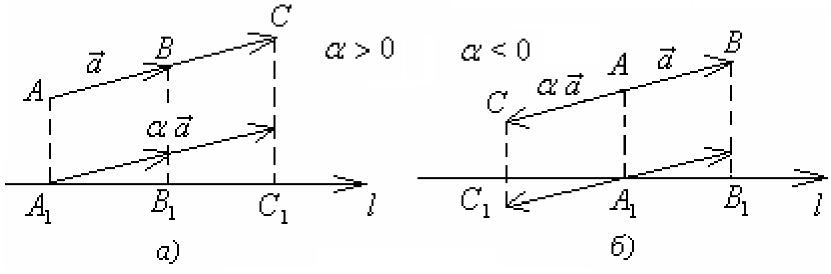

Рисунок 1.9

1.4 Базисы прямой, плоскости и трехмерного пространства

Множество векторов на прямой назовем *одномерным векторным пространством,* множество векторов на плоскости – *двумерным векторным пространством,* в пространстве – *трехмерным векторным пространством.*

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ называется вектор $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_s\vec{a}_s$.

Примеры линейных комбинаций

Векторы $\vec{d}, \vec{f}, \vec{g}$ и $\vec{h} = \vec{0}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (рисунок 1.10): $\vec{d} = 2\vec{a} + (-1)\vec{b} + (-3)\vec{c}$, $\vec{f} = 0 \cdot \vec{a} + 2\vec{b} + (-2)\vec{c}$, $\vec{g} = 1 \cdot \vec{a} + 0{,}5 \cdot \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{h} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$.

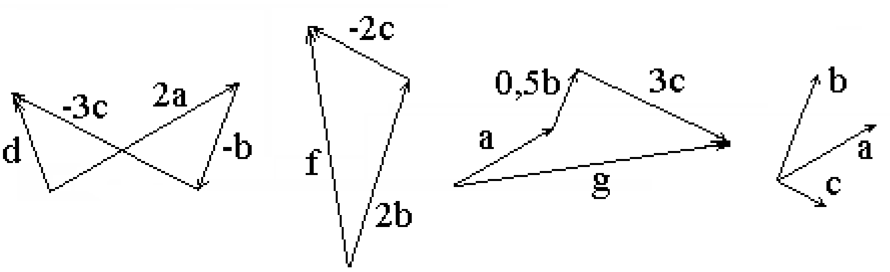

Рисунок 1.10

Будем говорить, что *вектор* $\vec{b}$ *раскладывается по векторам* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_s$, если $\vec{b}$ является линейной комбинацией этих векторов.

Теорема 1.1. Если $\vec{a} \neq 0$, то любой вектор $\vec{b}$, коллинеарный $\vec{a}$ представим и причем единственным образом в виде $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, где α – число.

Замечание 1.1. Пусть *L* – одномерное векторное пространство, $\vec{e}_1$ – система векторов пространства *L*, состоящая из одного ненулевого вектора. Тогда любой вектор из *L* раскладывается по этой системе векторов единственным образом.

Теорема 1.2. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ два неколлинеарных вектора. Тогда любой вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, раскладывается по ним, причем единственным образом $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, где α и β – числа.

Замечание 1.2. Пусть *L* – двумерное векторное пространство, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – система неколлинеарных векторов из *L*. Тогда любой вектор из *L* раскладывается по этой системе единственным образом.

Теорема 1.3. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ – некомпланарные векторы. Тогда любой вектор $\vec{d}$ раскладывается единственным образом по этим векторам

$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, где α, β, γ – числа.

Базисом векторного пространства L будем называть упорядоченную систему векторов пространства, состоящую: из одного ненулевого вектора, если пространство одномерное; из двух неколлинеарных векторов, если пространство двумерное; из трех некомпланарных векторов, если пространство трехмерное.

В любом векторном пространстве можно выбрать бесконечно много базисов, число векторов в каждом из них равно размерности пространства. Слова «упорядоченная система векторов» означают, что указан порядок перечисления векторов.

1.6 Координаты вектора в пространстве

Координатами (или компонентами) вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ называются коэффициенты разложения вектора $\vec{a}$ по векторам базиса. Для указания, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, мы будем использовать запись $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Очевидно, что в фиксированном базисе каждый вектор имеет свой, единственный, набор координат. Если же взять другой базис, то координаты вектора в общем случае изменятся.

Пусть $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2), \ldots$, $\vec{a}_n = (x_n; y_n; z_n)$ – векторы пространства, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – ненулевые числа. Используя свойства проекции векторов на ось, получим следующие утверждения:

1) $\vec{a}_1\alpha_1 = (\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 z_1)$;

2) $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = (x_1 + \ldots + x_n; y_1 + \ldots + y_n; z_1 + \ldots + z_n)$;

3) $\vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$;

4) $\vec{a}_1\alpha_1 + \ldots + \vec{a}_n\alpha_n = (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n; \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n; \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n)$;

5) $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 \Rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$.

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение вектора. Как находится модуль вектора?

2 Какие вектора называются коллинеарными, равными, противоположными, компланарными?

3 Как складываются вектора? Свойства суммы векторов.

4 Как находится произведение вектора на скаляр? Каковы его свойства?

5 Что является проекцией вектора на ось? Каковы свойства проекции.

6 Дайте определение базиса на прямой, на плоскости и в пространстве.

7 Что называется координатами вектора?

2 Системы координат прямой, плоскости и трехмерного пространства

Система координат – это совокупность условий, определяющих положение точек на прямой, на плоскости или в пространстве с помощью чисел. Эти числа называются координатами точек в рассматриваемой системе координат.

2.1 Система координат на прямой

Пусть дана произвольная прямая. Выберем на ней положительное направление, начало O и линейную единицу. Получим числовую ось. Рассмотрим на числовой оси точку M. Координатой точки M на числовой оси называется величина направленного отрезка $\overrightarrow{OM}$ этой оси; она обозначается символом x_M : $x_M = OM$.

Из этого определения следует, что каждая точка числовой оси имеет определенную координату, причем разным точкам соответствуют разные координаты. Каждому вещественному числу x можно поставить ту точку числовой оси, которая имеет координату x. Поэтому имеет место взаимно-однозначное соответствие между множеством точек числовой оси и множеством вещественных чисел.

Теорема 2.1. Величина направленного отрезка оси $\overrightarrow{AB}$ равна разности между координатами его конца и начала $AB = x_B - x_A$.

Следствие 2.1. Длина направленного отрезка оси $\overrightarrow{AB}$ равна абсолютному значению разности между координатами конца и начала отрезка: $|\overrightarrow{AB}| = |x_B - x_A|$.

2.2 Системы координат на плоскости

2.2.1 Прямоугольная декартова система координат (ПДСК) на плоскости

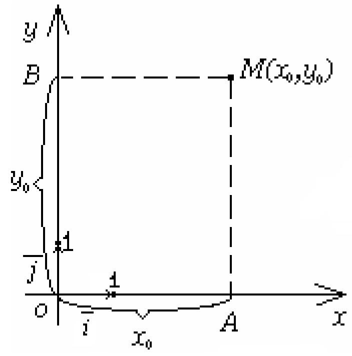

Рисунок 2.1

Две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу (рисунок 2.1), образуют *прямоугольную (декартову) систему координат на плоскости*. Ось Ox называется *осью абсцисс*, ось Oy – *осью ординат*, а обе оси вместе – *осями координат*. Точка O пересечения осей называется *началом координат*. Плоскость, в которой расположе зывается *координатной плоскостью* и обозначается *Oxy*, $\vec{i}$, $\vec{j}$ $(|\vec{i}|=|\vec{j}|=1, \vec{i} \perp \vec{j})$ – базисные векторы.

Пусть *M* – произвольная точка плоскости. Опустим из неё перпендикуляры *MA* и *MB* на оси *Ox* и *Oy*. Точке *M* на плоскости ставят в соответствие два числа: *абсцисса* x_0, равная расстоянию от *O* до *A*; *ордината* y_0, равная расстоянию от точки *O* до *B*. Абсцисса и ордината точки *M* называются *прямоугольными (декартовыми) координатами точки M.* Запись $M(x_0, y_0)$ означает, что точка *M* имеет абсциссу, равную x_0, и ординату, равную y_0.

2.2.2 Декартова косоугольная (афинная) система координат на плоскости

Две неколлинеарные координатные оси Ox_1 и Ox_2, имеющие общее начало *O* и одинаковую масштабную единицу (рисунок 2.2), образуют *декартову косоугольную (афинную) систему координат на плоскости*. Ось Ox_1 и Ox_2 называются *осями координат*. Вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ называются базисными векторами. Точка *O* пересечения осей называется *началом координат*. Плоскость, в которой расположены оси Ox_1 и Ox_2, называется *координатной плоскостью* и обозначается $Ox_1 x_2$.

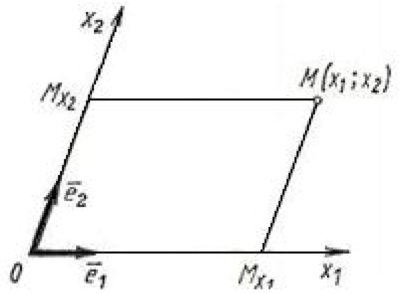

Рисунок 2.2

Пусть *M* – произвольная точка плоскости. Проведем две прямые через нее, параллельные осям координат. Точки пересечения с осями Ox_1 и Ox_2 соответственно обозначим M_{x_1} и M_{x_2} (M_{x_1} – проекция точки *M* на ось Ox_1 параллельно оси Ox_2, аналогично M_{x_2}). Значения $x_1 = OM_{x_1}$, $x_2 = OM_{x_2}$ – координаты точки *M*.

2.2.3 Полярная система координат

Полярная система координат состоит из некоторой точки *O*, называемой *полюсом*, и исходящего из неё луча *OE* – *полярной оси.* Кроме того, задаётся *единица масштаба* для измерения длин отрезков.

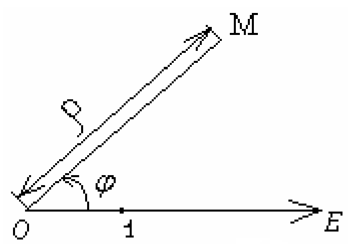

Рисунок 2.3

Пусть задана полярная система координат и пусть *M* – произвольная точка плоскости. Пусть ρ – расстояние от *M* до полюса *O*; φ – угол, на который надо повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом *OM* (рисунок

2.3).

Полярными координатами точки М называются числа ρ и φ. При этом число ρ считается первой координатой и называется *полярными радиусами*, число φ – второй координатой и называется *полярным углом.* Точка *М* с полярными координатами ρ и φ обозначается $M(\rho;\varphi)$, причём $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Однако в ряде случаев приходится рассматривать углы, большие 2π, а также отрицательные углы, то есть. отсчитываемые от полярной оси по часовой стрелке. Полюсу *О* соответствует полярный радиус $\rho = 0$, а полярный угол для него не определён.

Чтобы установить *связь между полярными координатами точки и её прямоугольными координатами,* будем предполагать, что начало прямоугольной системы координат находится в полюсе, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью. Пусть точка *М* имеет прямоугольные координаты x_0 и y_0, и полярные координаты ρ и φ (рисунок 2.4).

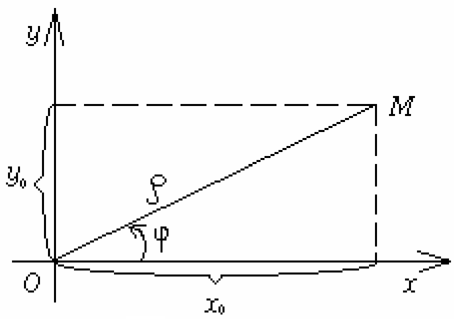

Рисунок 2.4

Связь между декартовой и полярной системами координат:

а) Переход от полярных координат к декартовым координатам

$$x_0 = \rho\cos\varphi, \quad y_0 = \rho\sin\varphi. \tag{2.1}$$

б) Переход от декартовых координат к полярным координатам:

$$\rho = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\ , \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y_0}{x_0}; \tag{2.2}$$

Заметим, что формула $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{y_0}{x_0}$ определяет два значения полярного угла φ, так как $0 \le \varphi < 2\pi$. Из этих двух значений угла φ выбирают то, при котором удовлетворяются равенства (2.1).

Полярный угол также можно найти как

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \text{ и } \sin\varphi = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Пример 2.1. Даны прямоугольные координаты: (2;2). Найти её полярные координаты, считая, что полюс совмещён с началом прямоугольной системы координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс.

⊲ По формулам (2.2) имеем $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{2}{2} = 1$.

Тогда $\varphi=\frac{\pi}{4}$ или $\varphi=\frac{5\pi}{4}$. Но так как $x>0$ и $y>0$, то данная точка находится в первой координатной четверти. Следовательно, $\varphi=\frac{\pi}{4}$. ▷

Расстояние между двумя точками на плоскости

Пусть задана прямоугольная система координат.

Теорема 2.2. Для любых двух точек $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ плоскости расстояние *d* между ними выражается формулой

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M – любая точка этого отрезка, отличная от точки M_1M_2 (рисунок 2.5). Число λ, определяемое равенством $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$, называется *отношением, в котором точка M делит отрезок* M_1M_2.

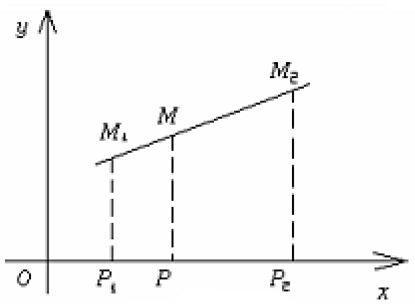

Рисунок 2.5

Теорема 2.3. Если точка $M(x;y)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},$$

где $(x_1;y_1)$ – координаты точки M_1; $(x_2;y_2)$ – координаты точки M_2.

Следствие 2.2. Если $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ – две произвольные точки и точка $M(x;y)$ – середина отрезка M_1M_2, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Площадь треугольника

Теорема 2.4. Для любых точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ и $C(x_3;y_3)$, не лежащих на одной прямой, площадь *S* треугольника *ABC*:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right|.$$

2.3 Системы координат в трехмерном пространстве

2.3.1 Прямоугольная декартова система координат (ПДСК) в пространстве

Три взаимно перпендикулярные оси *Ox*, *Oy* и *Oz*, имеющие общее начало *O* и одинаковую масштабную единицу (рисунок 2.6), образуют *прямоугольную (декартову) систему координат в пространстве*. Ось *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно называется *осью абсцисс*, *осью ординат* и *осью аппликат*, а все три оси вместе – *осями координат*.

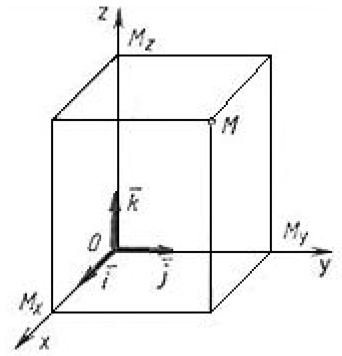

Рисунок 2.6

Точка *O* пересечения осей называется *началом координат*. Плоскости *Oxy*, *Oxz* и *Oyz* называется *координатными плоскостями*. Вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ($|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1, \vec{i}\perp\vec{j}, \vec{i}\perp\vec{k}, \vec{j}\perp\vec{k}$) называются *базисными векторами или ортами*.

Пусть *M* – произвольная точка пространства, тогда $x = OM_x$ – абсцисса точки *M* (M_x – проекция точки *M* на ось *Ox* параллельно плоскости *Oyz*), $y = OM_y$ – ордината точки *M* (M_y – проекция точки *M* на ось *Oy* параллельно плоскости *Oxz*), $z = OM_z$ – ордината точки *M* (M_z – проекция точки *M* на ось *Oz* параллельно плоскости *Oxy*).

Абсцисса, ордината и аппликата точки *M* называются *прямоугольными (декартовыми) координатами точки M*. Запись $M(x_0; y_0; z_0)$ означает, что точка *M* имеет абсциссу, равную x_0, ординату, равную y_0 и аппликату, равную z_0.

2.3.2 Декартова косоугольная (афинная) система координат в пространстве

Три некомпланарные оси Ox_1, Ox_2 и Ox_3 имеющие общее начало *O* и одинаковую масштабную единицу (рисунок 2.7), образуют *декартову косоугольную (афинную) систему координат в пространстве*. Ось Ox_1, Ox_2 и Ox_3 называются *осями координат*. Точка *O* пересечения осей называется *началом координат*.

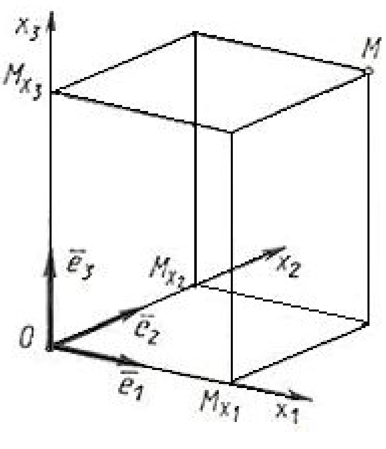

Рисунок 2.7

Плоскости Ox_1x_2, Ox_1x_3 и Ox_2x_3 называются *координатными плоскостями*.

Пусть M – произвольная точка пространства, тогда, $x_i = OM_{x_i}$, где $i \in \{1, 2, 3\}$ – координаты точки M (M_{x_1} – проекция точки M на ось Ox_1 параллельно плоскости Ox_1x_3; аналогично M_{x_2}, M_{x_3}). Вектора $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$ ($\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3} \neq 0$) являются базисными векторами.

2.3.3 Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат состоит из некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из неё луча OE в плоскости Oxy – *полярной оси и высоты* z **.** Кроме того, задаётся *единица масштаба* для измерения длин отрезков.

Пусть задана цилиндрическая система координат и пусть M – произвольная точка пространства. Пусть ρ – расстояние от N до полюса O; φ – угол, на который надо повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с лучом ON; z – высота точки над плоскостью Oxy (рисунок 2.8).

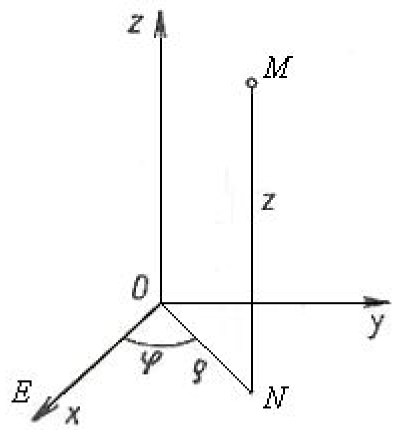

Рисунок 2.8

Цилиндрическими координатами точки M называются числа ρ, φ и z. При этом число ρ считается первой координатой и называются *полярными радиусами*, число φ – второй координатой и называется *полярным углом*, число z – третьей координатой и *называется высотой*. Точка M с цилиндрическими координатами ρ, φ и z обозначается $M(\rho; \varphi; z)$, причём $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$.

Связь между декартовыми прямоугольными и цилиндрическими координатами:

а) Переход от цилиндрических координат к декартовым координатам:

$$x = \rho \cos \varphi,\ y = \rho \sin \varphi,\ z = z;$$

б) Переход от декартовых координат к цилиндрическим координатам:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right),\ z = z.$$

Цилиндрические координаты удобны при анализе поверхностей, симметричных относительно какой-либо оси.

Пример 2.2. Если взять бесконечно длинный круглый цилиндр, симметричный относительно оси Z, то в прямоугольных координатах он имеет уравнение $x^2 + y^2 = c^2$, а в цилиндрических – уравнение $\rho = c$.

2.3.4 Сферическая система координат

Сферическая система координат состоит из некоторой точки *O*, называемой *полюсом*, ρ – кратчайшего расстояния от точки до начала координат, а также θ (или ψ) и φ – зенитного и азимутального углов соответственно. Кроме того, задаётся *единица масштаба* для измерения длин отрезков.

Пусть задана сферическая система координат и пусть *M* – произвольная точка пространства. Пусть ρ – расстояние от *M* до полюса *O*; φ – угол, на который надо повернуть против часовой стрелки полярную ось для совмещения с проекцией радиус-вектора ρ в плоскости *Oxy*; θ – угол между положительным направлением оси *Oz* и радиус-вектором ρ, иногда применяется ψ – угол между радиус-вектором ρ и его проекцией в плоскости *Oxy* (рисунок 2.9).

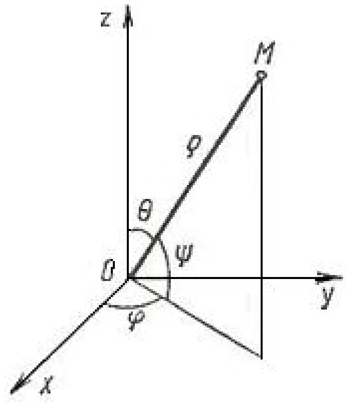

Рисунок 2.9

Сферическими координатами точки M называются числа ρ, φ и θ (или ψ). При этом число ρ считается первой координатой и называется *полярными радиусами*, число φ – второй координатой и называется *азимутным углом*, число θ (или ψ) – третьей координатой и *называется зенитным углом.* Точка *M* со сферическими координатами ρ, φ и θ (или ψ) обозначается $M(\rho;\varphi;\theta)$ или $M(\rho;\varphi;\psi)$, причём $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$ ($0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$).

Связь между декартовыми прямоугольными и сферическими координатами:

а) Переход от цилиндрических координат к декартовым координатам:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta,\ \text{или}$$
$$x = \rho\cos\psi\cos\varphi,\ y = \rho\cos\psi\sin\varphi,\ z = \rho\sin\psi;$$

б) Обратно, переход от декартовых координат к сферическим координатам:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right),\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Координаты вектора в трехмерном пространстве

Пусть в пространстве заданы прямоугольная система координат $Oxyz$ и произвольный вектор $\overrightarrow{AB}$. Пусть $X = np_x \overrightarrow{AB}$ – проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox, $Y = np_y \overrightarrow{AB}$ – проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Oy и $Z = np_z \overrightarrow{AB}$ – проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Oz. Проекции X, Y, Z вектора $\overrightarrow{AB}$ на оси координат называют его *координатами.* При этом пишут $\overrightarrow{AB} = (X, Y, Z)$.

Теорема 2.5. Для любых точек $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, определяются формулами:

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1.$$

Разложение вектора по базису

Пусть задана прямоугольная система координат в пространстве (рисунок 2.10). Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – *базисные векторы системы координат.*

Пусть $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$ – произвольный вектор пространства. Отложим из начала координат O вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$. По свойствам координат $\overrightarrow{OM} = (x_0, y_0, z_0)$. Пусть числу x_0 на оси Ox соответствует точка M_x, числу y_0 на Oy – M_y и числу z_0 на оси Oz – точка M_z. Тогда $\overrightarrow{OM_x} = \vec{i} x_0$, $\overrightarrow{OM_y} = \vec{j} y_0$, $\overrightarrow{OM_z} = \vec{k} z_0$.

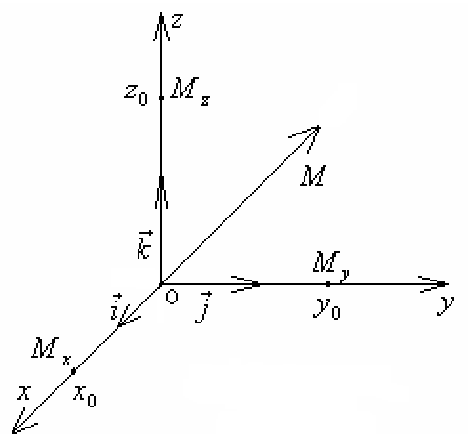

Рисунок 2.10

Так как $\overrightarrow{OM}$ – диагональ прямоугольного параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$, то нетрудно заметить, что $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$, откуда $\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \vec{i} x_0 + \vec{j} y_0 + \vec{k} z_0$.

Последняя формула даёт *разложение вектора* $\vec{a}$ по базисным векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Длина вектора в пространстве. Расстояние между точками в пространстве

Пусть дан произвольный вектор $\vec{a} = (x_0; y_0; z_0)$, то длина вектора $\vec{a}$ через его координаты выражается формулой:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}\,. \qquad (2.3)$$

Пусть вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, где известны координаты начальной точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и конечной точки $B(x_2; y_2; z_2)$. По теореме 2.5. координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Из формулы (2.3) его длина

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Так как *d* – расстояние между точками *A* и *B*, и равно $|\overrightarrow{AB}|$, то имеем формулу для нахождения расстояния между точками *A* и *B*

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Деление отрезка в данном отношении в пространстве

Теорема 2.6. Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Если точка $M(x_0; y_0; z_0)$ делит отрезок M_1M_2 в отношении α, то

$$x_0 = \frac{x_1 + \alpha \cdot x_2}{1 + \alpha}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \alpha \cdot y_2}{1 + \alpha}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \alpha \cdot z_2}{1 + \alpha}$$

Следствие 2.3. Пусть $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Если $M(x_0; y_0; z_0)$ – середина отрезка M_1M_2, то

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как задается система координат на прямой?

2 Какие вы знаете системы координат на плоскости?

3 Какая система координат на плоскости называется:

а) прямоугольной декартовой?

б) декартовой косоугольной (аффинной)?

в) полярной? Укажите ее связь с прямоугольной декартовой системой.

4 Как находится площадь треугольника по трем вершинам?

5 Какие вы знаете системы координат в пространстве?

6 Какая система координат в пространстве называется:

а) прямоугольной декартовой?

б) декартовой косоугольной (аффинной)?

в) цилиндрической? Укажите ее связь с прямоугольной декартовой системой.

г) сферической? Укажите ее связь с прямоугольной декартовой системой.

7 Как раскладывается вектор по базису? Как находится его координата?

8 Как вычисляется расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве?

9 Как производится деление отрезка в данном соотношении на плоскости и в пространстве?

3 Произведения геометрических векторов

3.1 Скалярное произведение векторов и его свойства

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между векторами. Обозначение $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Итак, по определению $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения

1. $(\vec{a})^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}|^2$;

2. Свойство коммутативности: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$;

4. Косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};$$

5. $\vec{a}\cdot(\vec{b}\alpha)=(\vec{a}\cdot\vec{b})\alpha$, $(\vec{a}\alpha)\cdot(\vec{b}\beta)=(\vec{a}\cdot\vec{b})(\alpha\beta)$;

6. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Теорема 3.1. Если векторы заданы в координатной форме $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то их скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Следствие 3.1. Если векторы заданы в координатной форме $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Пример 3.1. Найти угол между векторами $\vec{a}$ = (7; 2; -8) и $\vec{b}$ = (11; -8; -7).

◁ По следствию 3.1.

$$\cos\varphi = \frac{77-16+56}{\sqrt{49+4+64}\cdot\sqrt{121+64+49}} = \frac{117}{117\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ тогда } \varphi = \frac{\pi}{4}. \triangleright$$

3.2 Векторное произведение векторов и его свойства

3.2.1 Правая и левая система координат

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятых в указанном порядке называют *тройкой векторов*. Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отложены из одной точки. Будем смотреть с конца вектора $\vec{c}$ на плоскость, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *правой тройкой* (рисунок 3.1). Если же указанный поворот совершается по часовой стрелке, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *левой* (рисунок 3.2).

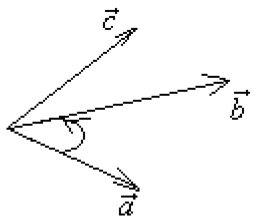

Рисунок 3.1

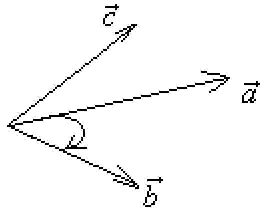

Рисунок 3.2

Декартовая прямоугольная система координат $Oxyz$ называется *правой*, если тройка её базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ является правой, и *левой*, если тройка $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – левая.

В основном используют правые прямоугольные системы координат.

3.2.2 Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ – правая.

Свойства векторного произведения

1. $\vec{a}\times\vec{a} = 0$ для любого вектора $\vec{a}$.

2. Площадь параллелограмма, построенного на неколлинеарных векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S_{парал} = |\vec{a}\times\vec{b}|$, а треугольника – $S_{треуг} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

3. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

4. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

5. $(\vec{a}\alpha)\times(\vec{b}\beta) = (\vec{a}\times\vec{b})(\alpha\beta)$.

Теорема 3.2. Если векторы заданы в координатной форме $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Следствие 3.2. Площадь параллелограмма, построенного на неколлинеарных векторах $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ равна модулю векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$, то есть

$$S_{парал} = |\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Следствие 3.3. Площадь треугольника, построенного на неколлинеарных векторах $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, вычисляется по формуле

$$S_{треуг} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2}.$$

Пример 3.2. Найти площадь треугольника *ABC*, если $A(-1;-1;1)$, $B(1;-3;4)$, $C(3;-1;-5)$.

⊲ Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1-(-1);\ -3-(-1);\ 4-1) = (2;-2;3),$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-(-1); -1-(-1); -5-1) = (4;0;-6).$$

Тогда

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 12 + \vec{j}\cdot 24 + \vec{k}\cdot 8.$$

В координатной форме $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = (12;\ 24;\ 8)$. Следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+24^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2(3^2+6^2+2^2)}=2\sqrt{9+36+4}=14.$$

Ответ: S_{ABC} =14 (кв.ед). ▹

3.3 Смешанное произведение векторов и его свойства

Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Умножим вектор $\vec{a}$ на $\vec{b}$ векторно, а затем векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ умножим скалярно на $\vec{c}$. В результате получим число $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, которое называют *смешанным произведением* трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Смешанное произведение также обозначается: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Теорема 3.3. Смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ трёх некомпланарных векторов равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятому со знаком «+», если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, и со знаком «−», если эта тройка – левая.

Свойство 3.4. Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, тогда для них справедливо следующее утверждение: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ = $(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$ = $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Свойство 3.5. Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, тогда для них справедливо следующее утверждение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}$.

Теорема 3.4. Если векторы заданы в координатной форме $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ и $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$,

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 3.3. Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$ =(3;1;2), $\vec{b}$ = (2;2;3), $\vec{c}$ = (1;3;1).

$$\triangleleft\ V=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\left|6+12+3-4-27-2\right|=\left|-12\right|=12.$$

Ответ: V =12 (куб. ед.). ▹

3.4 Критерии ортогональности, коллинеарности и компланарности векторов

Теорема 3.5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Теорема 3.6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулю $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Теорема 3.7. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется скалярным произведением двух векторов? Каковы его свойства?

2 Как находится угол между двумя векторами в координатной форме?

3 Какие системы координат называют правыми (левыми)?

4 Что называется векторным произведением двух векторов? Каковы его свойства?

5 Как находится площадь параллелограмма и треугольника с использованием векторного произведения?

6 Что называется векторно-скалярным (смешанным) произведением векторов? Каковы его свойства?

7 Как вычисляется объем параллелепипеда?

8 Сформулируйте критерии ортогональности, коллинеарности и компланарности.

4 Преобразование системы координат

4.1 Перенос начала системы координат

Положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно некоторой системы координат. Координаты точки изменятся, если мы выберем другую систему координат. Задача преобразования координат состоит в том, чтобы, зная координаты точки в одной системе координат, найти ее координаты в другой системе. Эта задача будет разрешена, если мы установим формулы, связывающие координаты произвольной точки по двум системам, причем в коэффициенты этих формул войдут постоянные величины, определяющие взаимное положение систем.

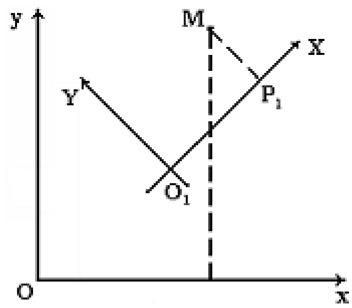

Рисунок 4.1

Пусть даны две декартовы системы координат xOy и XO_1Y (рисунок 4.1). Положение новой системы XO_1Y относительно старой системы xOy

будет определено, если известны координаты a и b нового начала O_1 по старой системе и угол α между осями Ox и O_1X .

Преобразованием системы координат называется переход от одной системы координат к другой. При такой замене надо установить формулы, позволяющие по известным координатам точки в одной системе координат определить ее координаты в другой.

Главной целью преобразования координат является определение такой координатной системы, в которой уравнение данной линии становится наиболее простым. Это имеет важное значение для исследования свойств кривой.

Преобразование уравнения кривой второго порядка к простейшему виду достигается в общем случае 1) параллельным переносом координатной системы без изменения направления осей и 2) поворотом осей.

4.2 Преобразование координат при параллельном переносе осей без изменения их направления

При параллельном переносе системы координат (рисунок 4.2.) базис не изменяется. Находим координаты вектора переноса начала координат: $\vec{s} = \overrightarrow{OO'} = x_s\vec{i} + y_s\vec{j}$. Тогда формулу связи можно записать в виде $\begin{cases} x = x_s + x', \\ y = y_s + y'. \end{cases}$

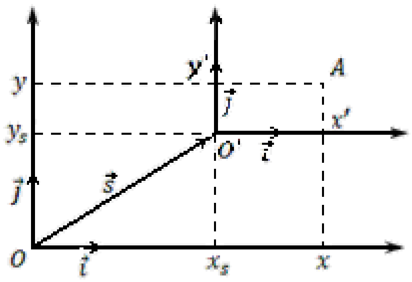

Рисунок 4.2

4.3 Преобразование координат при повороте осей

При повороте системы координат на угол φ (рисунок 4.3) начало O' новой системы координат совпадает с началом O старой, поэтому вектор переноса нулевой: $\vec{s} = \overrightarrow{OO'} = \vec{o}$. Разлагая новые базисные векторы $\vec{i}', \vec{j}'$ по старому базису, получаем $\vec{i}' = \cos\varphi \cdot \vec{i} + \sin\varphi \cdot \vec{j}$, $\vec{j}' = -\sin\varphi \cdot \vec{i} + \cos\varphi \cdot \vec{j}$. Тогда формулу преобразования координат можно записать в виде $\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$

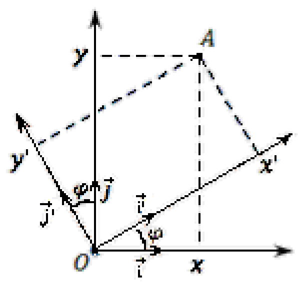

Рисунок 4.3

При зеркальном отражении в оси абсцисс (изменении направления оси ординат на противоположное) (рисунок 4.4.) начало O' новой системы координат совпадает с

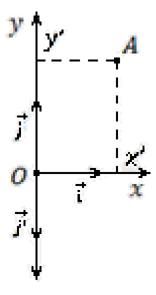

Рисунок 4.4

началом старой O, поэтому вектор переноса нулевой: $\vec{s} = \overrightarrow{OO'} = \vec{o}$. Разлагая новые базисные векторы $\vec{i}'$, $\vec{j}'$ по старому базису, получаем $\vec{i}' = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ (так как $\vec{i}' = \vec{i}$), $\vec{j}' = 0 \cdot \vec{i} + (-1) \cdot \vec{j}$ или $\vec{j}' = -\vec{j}$. Тогда формулу преобразования координат запишем в виде $\begin{cases} x = x', \\ y = -y'. \end{cases}$.

Аналогично определяется зеркальное отражение в оси ординат (изменение направления оси абсцисс на противоположное).

4.4 Преобразование координат в общем виде

Покажем, что любое преобразование прямоугольной системы координат сводится к последовательному применению рассмотренных преобразований, то есть к *композиции преобразований систем координат*. Действительно, пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$. Сначала, если точки O и O' не совпадают, выполним параллельный перенос старой системы координат на вектор $\vec{s} = \overrightarrow{OO'}$, при этом получим систему координат $O'\vec{i}\vec{j}$. Затем при помощи поворота на угол φ совместим вектор $\vec{i}$ с вектором $\vec{i}'$, при этом получим систему координат $O'\vec{i}'\vec{j}''$, где вектор $\vec{j}''$ либо совпадает с вектором $\vec{j}'$ ($\vec{j}'' = \vec{j}'$), либо противоположен ему ($\vec{j}'' = -\vec{j}'$). В первом случае, когда обе системы $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ одноименные, никаких преобразований делать уже не надо, так как полученная система координат $O'\vec{i}'\vec{j}''$ совпадает с заданной $O'\vec{i}'\vec{j}'$ (рисунок 4.5, а). Во втором случае, когда системы $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ разноименные, для получения системы $O'\vec{i}'\vec{j}'$ достаточно изменить направление оси ординат на противоположное, то есть выполнить зеркальное отражение $O'\vec{i}'\vec{j}''$ в оси $O'\vec{i}'$ (рисунок 4.5,б).

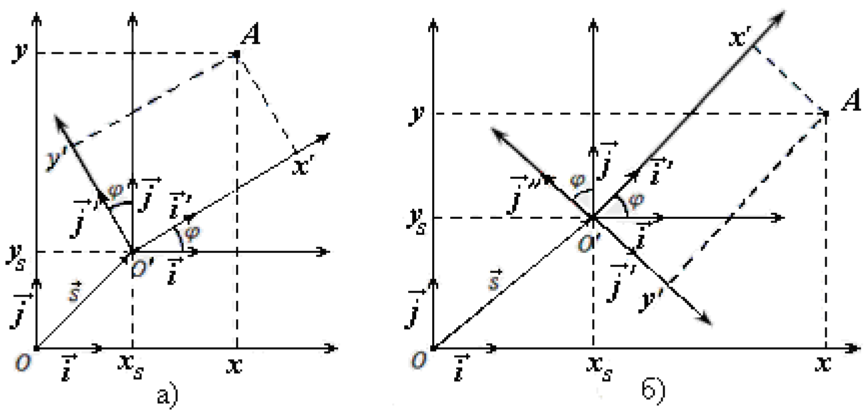

Рисунок 4.5

Формулы, связывающие старые и новые координаты точки, имеют вид:

– при одноименных системах координат (рисунок 4.5, а):

$$\begin{cases} x = x_s + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = y_s + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi; \end{cases}$$

– при разноименных системах координат (рисунок 4.5, б):

$$\begin{cases} x = x_s + x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \\ y = y_s + x'\sin\varphi - y'\cos\varphi. \end{cases}$$

Таким образом, любое преобразование прямоугольной системы координат на плоскости сводится к композиции преобразований, каждое из которых является либо параллельным переносом, либо поворотом, либо зеркальным отражением оси координат.

Вопросы для самоконтроля

1 Как осуществляется перенос начала координат?

2 Как преобразуются координаты:

а) при параллельном переносе осей без изменения направления?

б) при повороте системы координат на угол φ?

в) при зеркальном отображении оси абсцисс?

3 Как производится преобразование системы координат в общем виде:

а) при одноименных системах координат?

б) при разноименных системах координат?

5 Алгебраические линии первого порядка на плоскости

5.1 Понятие об уравнении линии

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат и некоторая линия *L*.

Определение 5.1. Уравнение вида $F(x, y) = 0$, связывающее переменные величины *x* и *y*, называется *уравнением линии L* (в заданной системе координат), если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии *L*, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Примеры уравнений линий на плоскости

1 Рассмотрим прямую, параллельную оси *Oy* прямоугольной системы координат (рисунок 5.1). Обозначим буквой А точку пересечения этой прямой с осью *Ox*, $(a,0)$ – её координаты. Уравнение $x = a$ является уравнением данной прямой. Действительно, этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки $M(a,0)$ этой прямой и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на прямой. Если $a = 0$, то прямая совпадает с осью *Oy*, которая имеет уравнение $x = 0$.

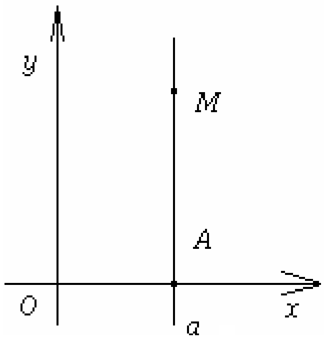

Рисунок 5.1

2 Уравнение $x - y = 0$ определяет множество точек плоскости, составляющих биссектрисы I и III координатных углов.

3 Уравнение $x^2 - y^2 = 0$ – это уравнение биссектрис всех координатных углов.

4 Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет на плоскости единственную точку $O(0,0)$.

5 Уравнение $x^2 + y^2 = 25$ – уравнение окружности радиуса 5 с центром в начале координат.

5.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть *l* – прямая, не параллельная оси *Oy* (рисунок 5.2). Обозначим точку пересечения *l* с осью *Oy* буквой $B(0,b)$, а угол между положительным направлением оси *Ox* и прямой *l* обозначим φ. Угол φ, отсчитываемый от оси *Ox* против часовой стрелки (0 ≤ φ < π), называется *углом наклона* прямой *l* к оси *Ox*.

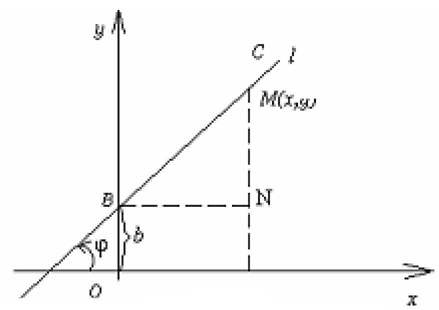

Рисунок 5.2

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой *l*. Из Δ BMN имеем

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{MN}{BN} = \frac{y-b}{x}.$$

Эту величину $\mathrm{tg}\varphi$ обозначают *k* и называют *угловым коэффициентом прямой.* Тогда

$$k = \frac{y-b}{x},$$

откуда

$$y = kx + b. \qquad (5.1)$$

Уравнение (5.1) называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

В частности, если $k=0$, то $\varphi=0$ и получаем уравнение прямой $y=b$, параллельной оси *Ox* и проходящей через точку $B(0,b)$. Если к тому же $b=0$, то $y=0$ – уравнение координатной оси *Ox*.

Пусть данная прямая имеет угловой коэффициент k и проходит через точку $M_1(x_1,y_1)$. Искомое уравнение прямой $y=kx+b$. Наша задача: определить неизвестное число *b*.

Так как координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению прямой, то $y_1=kx_1+b$,откуда $b=y_1-kx_1$. Имеем $y=kx+(y_1-kx_1)$,
или $y-y_1=k(x-x_1)$. (5.2)

Уравнение (5.2) называется уравнением прямой *по точке и угловому коэффициенту*.

5.3 Общее уравнение прямой на плоскости

Теорема 5.1. Каждая прямая на плоскости в прямоугольной системой координат определяется уравнением первой степени

$$Ax+By+C=0, \qquad (5.3)$$

где *A* и *B* одновременно не равны 0, и, обратно, уравнение (5.3) при произвольных коэффициентах *A*, *B* и *C* (*A* и *B* одновременно не равны нулю) определяет некоторую прямую на плоскости.

Уравнение первой степени (5.3) называется *общим уравнением прямой на плоскости.*

5.4 Неполные уравнения прямой

Пусть задано общее уравнение прямой $Ax+By=0$.

Возможны следующие частные случаи:

1) $C=0$. Уравнение $Ax+By+C=0$ определяет прямую, проходящую через начало координат;

2) один из коэффициентов при текущих координатах равен нулю и выполняются условия:

а) $C\neq 0$, тогда прямая параллельна соответствующей координатной оси:

$A=0$, прямая имеет вид: $y=-\frac{C}{B}$, которая параллельна оси *Ox*;

$B=0$, прямая имеет вид: $x=-\frac{C}{A}$, которая параллельна оси *Oy*;

б) $C=0$, тогда прямая проходит через соответствующую координатную ось:

$A = 0$, прямая $By = 0$ совпадает с осью Ox;

$B = 0$, прямая $Ax = 0$ совпадает с осью Oy.

5.5 Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Искомое уравнение прямой $y = kx + b$, где k и b – неизвестные числа.

Так как прямая проходит через точку M_1 и известен угловой коэффициент, то приходим к уравнению (5.2): $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Поскольку координаты точки M_2 также удовлетворяют этому уравнению, то

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1), \text{ откуда } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (5.4)$$

Тогда искомое уравнение прямой

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ или } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (5.5)$$

Замечание 5.1. Формула (5.4) определяет угловой коэффициент прямой, проходящей через точки M_1 и M_2.

Замечание 5.2. В уравнении (5.5) один из знаменателей $(x_2 - x_1)$ или $(y_2 - y_1)$ может оказаться равным нулю (оба этих числа одновременно не могут быть равны нулю, ибо точки M_1 и M_2 различные). Так как пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ мы понимаем как равенство $ad = bc$, то обращение в нуль одного из знаменателей означает обращение в нуль и соответствующего сомножителя. Если, например $x_2 = x_1$, то $y_2 - y_1 \neq 0$ и из (5.5) имеем $(y - y_1) \cdot 0 = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1)$, откуда следует равенство $x = x_1$ – это есть уравнение прямой по двум точкам в случае, когда $x_2 = x_1$.

5.6 Уравнение прямой в отрезках по осям

Пусть прямая пересекает оси Ox и Oy соответственно в точках A и B (рисунок 5.3). Пусть $A(a,0)$ и $B(0,b)$. Из уравнения (5.5) имеем

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}.$$

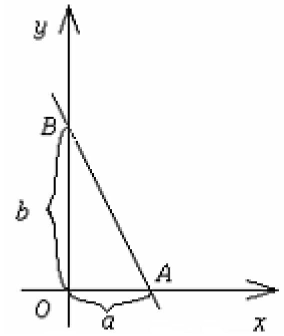

Рисунок 5.3

Приведя подобные, получаем уравнение

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1\ , \qquad (5.6)$$

которое называется *уравнением прямой в отрезках на осях координат.*

Замечание 5.3. Прямые, параллельные координатным осям, и прямые, проходящие через начало координат, не могут быть записаны уравнением этого вида.

5.7 Взаимное расположение прямых на плоскости

5.7.1 Прямые заданные уравнениями с угловым коэффициентом

$$l_1:\ y=k_1x+b_1 \text{ и } \ l_2:\ y=k_2x+b_2 .$$

Тангенс угла между двумя данными прямыми определяется формулой

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}, \text{ где } k_2 \ge k_1 .$$

Условие параллельности двух прямых имеет вид $k_2=k_1$, условие перпендикулярности двух прямых имеет вид $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.

5.7.2 Прямые заданные общими уравнениями

Рассмотрим уравнения прямых l_1 и l_2 как систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными *x* и *y*:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{cases} \qquad (5.7)$$

Решаем эту систему:

а) умножим первое уравнение системы $A_1x+B_1y+C_1=0$ на A_2, а второе $-A_2x+B_2y+C_2=0$ на A_1и вычтем полученные уравнения, будем иметь

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} A_1A_2x+B_1A_2y+C_1A_2=0 \\ A_1A_2x+A_1B_2y+A_1C_2=0 \end{array} \\ \hline (B_1A_2-A_1B_2)y+(C_1A_2-A_1C_2)=0 \end{array}.$$

Разделяем переменные

$$(A_1B_2-A_2B_1)y=C_1A_2-A_1C_2; \qquad (5.8)$$

б) Теперь умножим первое уравнение системы $A_1x+B_1y+C_1=0$ на B_2, а второе $-A_2x+B_2y+C_2=0$ на B_1и вычтем полученные уравнения, будем иметь

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{l} A_1B_2x+B_1B_2y+C_1B_2=0 \\ A_2B_1x+B_1B_2y+C_2B_1=0 \end{array} \\
\hline
(A_1B_2-A_2B_1)x+(C_1B_2-C_2B_1)=0
\end{array}.
$$

Разделяем переменные

$$(A_1B_2-A_2B_1)x=C_2B_1-C_1B_2. \qquad (5.9)$$

Возможны случаи, приведенные ниже:

1Если $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ то есть. $A_1B_2\neq A_2B_1$, получаем $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$. Тогда из формул (5.8) и (5.9) находим единственное решение системы (5.7):

$$x=\frac{C_2B_1-C_1B_2}{A_1B_2-A_2B_1}, \quad y=\frac{C_1A_2-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}. \qquad (5.10)$$

Единственное решение системы (5.7) означает, что прямые l_1 и l_2 *пересекаются*. Формулы (5.10) дают координаты точки пересечения.

2 Если $A_1B_2-A_2B_1=0$ то есть. $A_1B_2=A_2B_1$, получаем $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

2.1 Если к тому же $C_2B_1-C_1B_2=0$ и $C_1A_2-C_2A_1=0$, то $A_1B_2=A_2B_1$, $C_2B_1=C_1B_2$ и $C_1A_2=C_2A_1$, откуда

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2},\ \frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2},\ \frac{C_1}{C_2}=\frac{A_1}{A_2}.$$

Таким образом, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=k$. Тогда $A_1=kA_2$, $B_1=kB_2$, $C_1=kC_2$. Теперь уравнение прямой l_1 имеет вид:

$$kA_2x+kB_2y+kC_2=0 \text{ или } A_2x+B_2y+C_2=0.$$

Следовательно, прямые l_1 и l_2, имея одно и то же уравнение, *совпадают*.

2.2 Если один из коэффициентов $C_2B_1-C_1B_2\neq 0$ или $C_1A_2-C_2A_1\neq 0$.

Пусть для определённости $C_2B_1-C_1B_2\neq 0$, то есть $C_2B_1\neq C_1B_2$. Получаем $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$. Тогда равенство (5.9) имеет вид $0\cdot x=C_2B_1-C_1B_2$. Следовательно, это уравнение, а значит и система (5.7) решений не имеет. Это означает, что прямые l_1 и l_2 на плоскости не пересекаются, то есть. они *параллельны*. Аналогичный вывод можно сделать в случае, когда $C_1A_2-C_2A_1\neq 0$.

Таким образом, если:

1) $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$, то прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке с координатами (5.10);

2) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то прямые l_1 и l_2 параллельны;

3) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то прямые l_1 и l_2 совпадают.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется уравнением линии на плоскости?

2 Какой вид имеет уравнение прямой с угловым коэффициентом?

3 Какой знак имеет угловой коэффициент прямой, образующей с положительным направлением оси *Ox* острый угол? тупой угол?

4 Какой вид имеет уравнение прямой в отрезках на осях?

5 Напишите уравнение прямой в общем виде. Как найти угловой коэффициент этой прямой?

6 Как расположена в плоскости xOy прямая, уравнение которой *Ax + By = 0; Ax + C = 0; Ax = 0; By = 0* (коэффициенты *A, B, C* отличны от нуля)?

7 Как найти точку пересечения двух прямых?

8 Как убедиться в том, что данная точка принадлежит данной прямой?

9 Как построить прямую, заданную соответствующим уравнением?

10 Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей соответствующий угловой коэффициент?

11 Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через две данные точки?

12 Напишите формулу для определения угла между двумя прямыми на плоскости.

13 Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.

6 Типовые уравнения прямой на плоскости

6.1 Канонические и параметрические уравнения прямой на плоскости

6.1.1 Каноническое уравнение прямой на плоскости

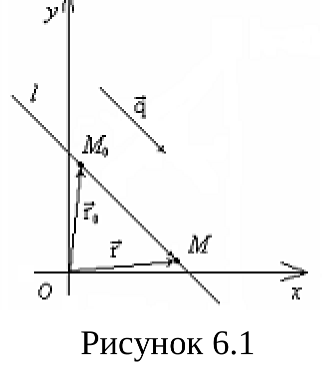

Рисунок 6.1

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – заданная точка на прямой (рисунок 6.1), а $\vec{q} = (m; n)$ – вектор, коллинеарный прямой l (он называется *направляющим* вектором прямой). Если *M(x;y)* – произвольная точка на прямой l, отличная от $M_0(x_0;y_0)$, то вектор $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r_0}=(x-x_0;y-y_0)$ и $\vec{q}=(m;n)$ коллинеарные, то есть координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}\ . \qquad (6.1)$$

Уравнение (6.1) называется *каноническим уравнением прямой.*

6.1.2 Параметрические уравнения прямой на плоскости

Пусть прямая l проходит через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Запишем уравнение прямой по двум точкам, оно имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, приравняем отношение к некоторому параметру *t*: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=t$. Разрешая полученное уравнение относительно переменной *t,* будем иметь:

$$\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t, \\ y=y_1+(y_2-y_1)t, \end{cases} \quad \text{где } t\in R.$$

6.2 Векторное уравнение прямой на плоскости

Пусть l – прямая на плоскости *Oxy* (рисунок 6.2), $M_0(x_0;y_0)$ точка на этой прямой, а $\vec{n}=(A;B)$ – ненулевой вектор, перпендикулярный прямой l, который называется *нормальным вектором прямой*. Если *M(x;y)* – произвольная точка на прямой l, отличная от $M_0(x_0;y_0)$, то вектор $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r_0}=(x-x_0;y-y_0)$ перпендикулярный вектору $\vec{n}=(A;B)$, то есть скалярное произведение этих векторов равно нулю:

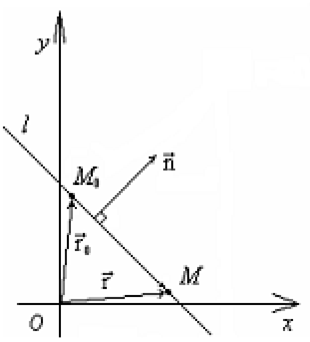

Рисунок 6.2

$$\vec{n}\,(\vec{r}-\vec{r_0})=0.$$

Последнее уравнение называется *векторным уравнением прямой*. Если его переписать в координатной форме, то получится:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

6.3 Нормированное уравнение прямой

Пусть p – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую (рисунок 6.3), α – угол, образуемый этим перпендикуляром с положительным направлением оси Ox. Тогда нормальное уравнение прямой имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

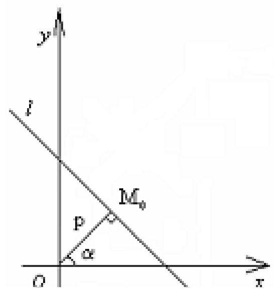

Рисунок 6.3

6.4 Переход от общего уравнения прямой к нормированному виду

Пусть задано общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, умножая его на *нормирующий множитель* $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, знак которого противоположен знаку C, приводится общее уравнение к нормальному виду:

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

6.5 Вычисление расстояния от точки до прямой

Теорема 6.1. Расстояние d от данной точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой l, заданной уравнением $Ax + By + C = 0$ на плоскости, определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (6.2)$$

Следстви 6.1. Расстояние d от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой l, заданной уравнением в нормальной виде $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ определяется формулой:

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|.$$

Пример 6.1. Пусть прямая l задана уравнением $3x - 4y + 10 = 0$ и дана точка $M(4;3)$. Найти расстояние от точки M до прямой l.

◁ По формуле (6.2) имеем

$$d = \frac{|3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 10|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Ответ: d = 2. ▷

6.6 Пучок прямых на плоскости

Пусть уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задают две прямые, пересекающиеся в точке S. Множество всех прямых, проходящих через точку S, называется *пучком прямых*.

Уравнение $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ при любом $\alpha, \beta \in R$ задает некоторую прямую пучка и, обратно: любая прямая пучка, может быть задана уравнением в виде линейной комбинации двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Вопросы для самоконтроля

1 Какой вид имеет каноническое уравнение прямой на плоскости?

2 Напишите параметрическое уравнение прямой.

3 Как выводится векторное уравнение прямой на плоскости?

4 Укажите вид нормированного уравнения прямой. Как осуществляется переход от общего уравнения прямой к нормированному?

5 Как находится расстояние от точки до прямой?

6 Что называют пучком прямых? Запишите его уравнение?

7 Алгебраические поверхности первого порядка

7.1 Понятие об уравнении поверхности

Определение 7.1. *Уравнением поверхности* в заданной системе координат в пространстве называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты любой точки данной поверхности и только они.

Поверхность, определяемая алгебраическим уравнением n-й степени относительно декартовых координат, называется *поверхностью n-го порядка*. Мы рассмотрим поверхности 1-го и 2-го порядков.

7.2 Общее уравнение плоскости

7.2.1 Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть дана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n} = (A; B; C)$. Требуется составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно указанному вектору $\vec{n}$

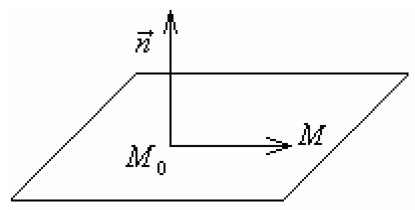

Рисунок 7.1

(рисунок 7.1). В таком случае вектор $\vec{n}$ называют *нормальным* вектором плоскости.

Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка плоскости. Так как вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ лежит на плоскости, то он перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Следовательно, их скалярное произведение равно нулю, то есть $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Тогда уравнение плоскости в координатной форме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (7.1)$$

7.2.2 Общее уравнение плоскости

Раскроем скобки в уравнении (7.1) и приведем подобные:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Обозначим через $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Получаем уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

которое называется *общим уравнением плоскости.*

7.3 Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Пусть даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Первая плоскость имеет вектор-нормали $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, вторая плоскость – $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C\ )$.

Угол между двумя плоскостями – это угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Если плоскости параллельны, то векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны, то есть $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$ для некоторого числа λ. Поэтому условие *параллельности* плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие *совпадения* плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Если условие параллельности не выполняется, то плоскости пересекаются. В частности, если плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и векторы $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. Поэтому их скалярное произведение равно 0, то есть

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, или $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Это необходимое и достаточное условие *перпендикулярности* плоскостей.

7.4 Неполные уравнения плоскости

Пусть задано общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$,

Возможны следующие частные случаи:

1) $D = 0$. Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат;

2) один из коэффициентов при текущих координатах равен нулю и выполняются следующие условия:

а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной оси:

$A = 0$, в этом случае нормальный вектор $\vec{n} = (0; B; C)$ перпендикулярен оси *Ox*. Поэтому плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси *Ox*;

$B = 0$, плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси *Oy*;

$C = 0$, плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz;

б) $D = 0$, тогда плоскость проходит через соответствующую координатную ось:

$A = 0$, плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось *Ox*;

$B = 0$, плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось *Oy*;

$C = 0$, плоскость $Ax + By = 0$ проходит через ось *Oz*;

3) два коэффициента при текущих координатах равны нулю и выполняются следующие условия:

а) $D \neq 0$, тогда плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:

$B = 0$, $C = 0$, в этом случае нормальный вектор $\vec{n} = (A;0;0)$ перпендикулярен плоскости *Oyz*. Поэтому плоскость $Ax + D = 0$ параллельна плоскости *Oyz*;

$A = 0$, $C = 0$, плоскость $By + D = 0$ параллельна плоскости *Oxz*;

$A = 0$, $B = 0$, плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости *Oxy*;

б) $D = 0$, тогда плоскость совпадает с соответствующей координатной плоскостью:

$B = 0$, $C = 0$, плоскость $Ax = 0$ или $x = 0$ совпадает с *Oyz*;

$A = 0$, $C = 0$, плоскость $By = 0$ или $y = 0$ совпадает с *Oxz*;

$A = 0$, $B = 0$, плоскость $Cz = 0$ или $z = 0$ совпадает с *Oxy*.

7.5 Уравнение плоскости в отрезках по осям

Если ни один из коэффициентов общего уравнения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ не равен нулю, то оно может быть преобразовано к виду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (7.2)$$

где $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$ – алгебраические величины направленных отрезков, отсекаемых на осях координат. Уравнение (7.2) называется *уравнением плоскости в отрезках по осям*.

7.6 Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть даны три точки пространства $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ не лежащие на одной прямой. Пусть $M(x; y; z)$ – произвольная точка этой плоскости. Так как вектора $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$ компланарны. Поэтому их смешанное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$.

Следовательно, искомое уравнение

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Всегда ли два уравнения с тремя переменными определяют некоторую линию в пространстве? Приведите примеры.

2 Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярно вектору?

3 Напишите общий вид уравнения плоскости.

4 Укажите взаимное расположение плоскостей в пространстве. Как находится угол между двумя плоскостями?

5 Какой вид имеет уравнение плоскости в отрезках по осям?

6 Какой вид имеет уравнение плоскости проходящее через три заданные точки?

8 Типовые уравнения плоскости

8.1 Параметрические уравнения плоскости

Пусть $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка, принадлежащая плоскости, $M(x;y;z)$ – произвольная точка на плоскости, отличная от $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Вектора $\vec{q}=(q_1;q_2;q_3)$ и $\vec{p}=(p_1;p_2;p_3)$ параллельны плоскости. Тогда система

$$\begin{cases} x = x_0 + p_1 s + q_1 t, \\ y = y_0 + p_2 s + q_2 t, \text{ где } s,t \in R, \\ z = z_0 + p_3 s + q_3 t, \end{cases}$$

называется *параметрическими уравнениями плоскости*, относительно переменных s и t.

8.2 Нормированное уравнение плоскости

Пусть *p* – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную плоскость, α,β,γ – углы, образованные этим перпендикуляром с положительными направлениями осей *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно. Тогда нормальное уравнение плоскости имеет вид:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Здесь $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются *направляющими косинусами*.

8.3 Переход от общего уравнения плоскости к нормированному

Пусть задано общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$; умножая его на нормирующий множитель $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, знак которого противоположен знаку D, общее уравнение приводится к нормальному виду: $\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$.

8.4 Вычисление расстояния от точки до плоскости

Теорема 8.1 Расстояние *d* от данной точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ на плоскости, определяется формулой

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cy_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Следствие 8.1. Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости l, заданной уравнением в нормальной виде $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, определяется формулой:

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|.$$

8.5. Пучок и связка плоскостей

Пусть уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задают две плоскости, пересекающиеся по прямой l. Множество всех плоскостей, проходящих через одну данную прямую l, называется *пучком плоскостей*. Уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

при любом $\alpha, \beta \in R$ задает некоторую плоскость пучка и, обратно: любая плоскость пучка, может быть задана в виде линейной комбинации двух плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Связкой плоскостей называется множество всех плоскостей, имеющих одну общую точку, которая называется центром связки.

Теорема 8.2. Пусть $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ и $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ – три плоскости в ПДСК, имеющие единственную общую точку M_0 . Тогда

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in R$ – произвольные действительные числа, одновременно не равные нулю, есть уравнение связки плоскостей с центром связки в точке M_0.

Вопросы для самоконтроля

1 Какой вид имеет параметрическое уравнение прямой на плоскости?

2 Напишите нормированное уравнение плоскости.

3 Укажите, как осуществляется переход от общего уравнения плоскости к нормированному?

4 Как находится расстояние от точки до плоскости?

5 Что такое пучок плоскостей, и каково его уравнение?

6 Что такое связка плоскостей, и каково его уравнение?

9 Уравнения прямой в пространстве

9.1 Понятие об уравнениях прямой в пространстве

Прямая в пространстве относительно ПДСК может быть задана различными способами. Например, прямая однозначно определяется точкой и параллельным ей вектором, двумя точками так далее. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнений.

Направляющим вектором прямой называется любой вектор, лежащий на прямой или параллельный ей.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ (рисунок 9.1). Отложим из точки M_0 вектор $\overrightarrow{M_0A}=\vec{a}$. Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка данной прямой, а $\vec{\rho}=\overrightarrow{OM}$ – её радиус-вектор точки M. Тогда $\overrightarrow{OM_0}+\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{M_0M}=\vec{a}t$, поэтому

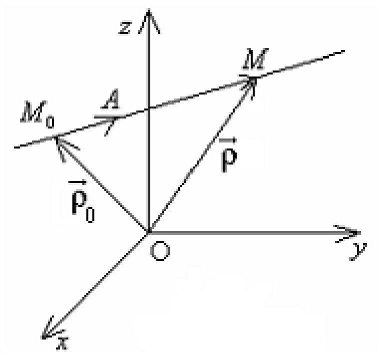

Рисунок 9.1

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}_0+\vec{a}t.$$

Это уравнение называется *векторно-параметрическим уравнением прямой.*

9.2 Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве

9.2.1 Параметрические уравнения прямой

В векторно-параметрическом уравнении прямой $\vec{\rho}=\vec{\rho}_0+\vec{a}t$ перейдём к координатным соотношениям $(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0)+(a_1;a_1;a_1)t$. Отсюда получаем *параметрические уравнения прямой*

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t, \\ y=y_0+a_2t, \quad \text{где } t\in R. \\ z=z_0+a_3t, \end{cases} \qquad (9.1)$$

9.2.2 Канонические уравнения прямой

Из уравнений (9.1) выразим t:

$$t=\frac{x-x_0}{a_1},\ t=\frac{y-y_0}{a_2},\ t=\frac{z-z_0}{a_3},$$

откуда получаем *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}. \qquad (9.2)$$

9.3 Прямая как пересечение двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Если плоскости не являются параллельными, то нарушается условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \ .$$

Пусть, например, $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$.

Найдём уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости.

В качестве направляющего вектора искомой прямой можно взять вектор

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Чтобы найти точку, принадлежащую искомой прямой, фиксируем некоторое значение

$z = z_0$ и, решая систему $\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2 \end{cases}$,

получаем значения $x = x_0$, $y = y_0$. Итак, искомая точка $M(x_0; y_0; z_0)$.

Искомое уравнение $\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = -\dfrac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$.

9.4 Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то её канонические уравнения в соответствии с (9.2) запишутся в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

9.5 Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть заданы две прямые каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ и $\frac{x-x_2}{в_1}=\frac{y-y_2}{в_2}=\frac{z-z_2}{в_3}$, с направляющими векторами $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ соответственно.

Угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{в}|}=\frac{a_1в_1+a_2в_2+a_3в_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{в_1^2+в_2^2+в_3^2}}$$

Условие перпендикулярности прямых в пространстве:

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$$

Условие параллельности прямых в пространстве:

$$\vec{a}=\vec{в}\lambda,\ \text{то есть}\ \frac{a_1}{в_1}=\frac{a_2}{в_2}=\frac{a_3}{в_3}.$$

Очевидно, что прямые лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{в}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ *компланарны*, то есть

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ в_1 & в_2 & в_3 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (9.3)$$

Если в (9.3) первые две строки пропорциональны, то прямые *параллельны*. Если все три строки пропорциональны, то прямые *совпадают*. Если условие (9.3) выполнено и первые две строки не пропорциональны, то прямые *пересекаются*. Если же условие (9.3) не выполняется, то прямые являются *скрещивающимися*.

9.6 Вычисление расстояния от точки до прямой в пространстве

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до прямой $x=x_1+lt$, $y=y_1+mt$, $z=z_1+nt$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & z_1-z_0 \\ l & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Кратчайшее расстояние между прямыми $x=x_1+l_1t$, $y=y_1+m_1t$, $z=z_1+n_1t$ и $x=x_2+l_2t$, $y=y_2+m_2t$, $z=z_2+n_2t$ находится по формуле:

$$d=\pm\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}},$$

где знак плюс берется в случае, когда определитель третьего порядка положительный и знак минус – в противном случае.

Вопросы для самоконтроля

1 Как выводится векторно-параметрическое уравнение прямой в пространстве?

2 Какой вид имеет параметрическое уравнение прямой в пространстве?

3 Напишите каноническое уравнение прямой в пространстве.

4 Как находится уравнение прямой, которое является пересечением двух плоскостей?

5 Укажите взаимное расположение прямых в пространстве.

6 Как находится расстояние от точки до прямой в пространстве?

7 Как находится расстояние между двумя прямыми в пространстве?

10 Взаимное расположение прямой и плоскости

10.1 Пересечение прямой и плоскости

Пусть задана прямая $x=x_0+a_1t$, $y=y_0+a_2t$, $z=z_0+a_3t$ и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$.

Чтобы найти общие точки прямой и плоскости, необходимо решить систему их уравнений

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ x=x_0+a_1t, \\ y=y_0+a_2t, \\ z=z_0+a_3t. \end{cases}$$

откуда

$$A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0,$$

$$(A_1a_1+B_1a_2+C_1a_3)t+(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)=0.$$

Если $Aa_1+Ba_2+Ca_3\neq 0$, то система имеет *единственное решение*

$$t=t_0=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Aa_1+Ba_2+Ca_3}.$$

То есть прямая и плоскость пересекаются в единственной точке $M_1(x_1; y_1; z_1)$, где $x_1 = x_0 + a_1 t_0$, $y_1 = y_0 + a_2 t_0$, $z_1 = z_0 + a_3 t_0$.

Если $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая и плоскость не имеют общих точек, то есть *параллельны*.

Если же $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то прямая *принадлежит* плоскости.

10.2 Угол между прямой и плоскостью

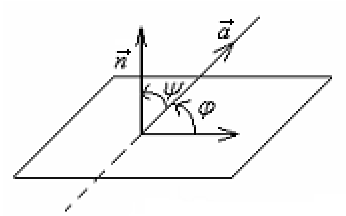

Рисунок 10.1

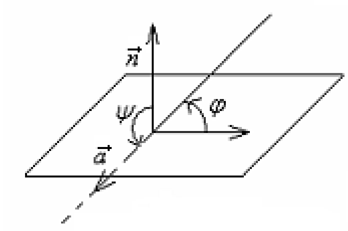

Рисунок 10.2

Найдём угол φ между прямой

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$.

Поскольку вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ образует с направляющим вектором $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ угол $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ или $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi$ – угол между прямой и вектором нормали (рисунки 10.1, 10.2), то $\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ или $\cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$, откуда $\cos\psi = \sin\varphi$ или $\cos\psi = -\sin\varphi$.

Значит, $\sin\varphi = |\cos\psi| = \dfrac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$.

В случае, когда $\dfrac{A}{a_1} = \dfrac{B}{a_2} = \dfrac{C}{a_3}$ или $A = \lambda a_1$, $B = \lambda a_2$, $C = \lambda a_3$, то прямая и плоскость *перпендикулярны*.

10.4 Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до данной плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Как находится точка пересечения прямой и плоскости?

2 По какой формуле вычисляется угол между прямой и плоскостью?
3 Какое условие параллельности прямой и плоскости?
4 Какое условие принадлежности прямой и плоскости?
5 Какое условие перпендикулярности прямой и плоскости?
6 Как находится расстояние от точки до плоскости?

Литература

1 Ильин, В. А. Аналитическая геометрия / В. А.Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 223 с.

2 Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

3 Беклемешев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

4 Умнов, А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. Е. Умнов – М. : МФТИ, 2011. – 570 с.

5 Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Л. Л. Березкина – Минск : РИВШ, 2012. – 354 с.

6 Аналитическая геометрия в примерах и задачах / Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.]. – Минск : РИВШ, 2008. – 156 с.

7 Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А. А. Бурдун [и др.]. – Минск : Універсітетскае, 1999. – 302 с.

8 Дадаян, А. А. Алгебра и геометрия : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов / А. А. Дадаян, В. А. Дударенко. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 288 с.

9 Рублев, А. Н. Курс линейнеой алгебры и аналитической геометрии : учебник для студентов вузов / А. Н. Рублев. – М. : Высшая школа, 1972. – 421 с.

10 Высшая математика : практическое руководство : в 3 ч. / А.В. Бузланов [и др.]. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2011.

11 Алгебра и аналитическая геометрия : в ч., Ч. 1 / М. В. Милованов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 302 с.

12 Алгебра и аналитическая геометрия : в ч., Ч. 2 / М. В. Милованов, [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – 300 с.

13 Шикин, Е. В. Линейные пространства и отображения / Е. В. Шикин – М. : МГУ, 1987. – 302 с.

14 Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя, аналіз функцый адной зменнай / В. Н. Русак [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1994. – 431 с.

15 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 272 с.

16 Апатенок, Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 186 с.

Производственно-практическое издание

Бородич Тимур Викторович

ВЕКТОРНАЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Практическое руководство

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 26.09.2016. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,6.
Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 25 экз. Заказ 561.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.