**ЛЕКЦИЯ 7 МНОГОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ**

*1 Многофакторный дисперсионный комплекс*

*2 Преобразования*

*3 Универсальное использование дисперсий*

**1 Многофакторный дисперсионный комплекс**

Ясное представление о математической модели дисперсионного анализа облегчает понимание необходимых вычислительных операций, особенно при обработке данных многофакторных опытов, в которых больше источников варьирования, чем в простых, однофакторных опытах. Например, в двухфакторном опыте, поставленном методом обычных повторений, сумма квадратов для вариантов CV расчленяется на 3, а в трехфакторном – на 7 компонентов. Общая сумма квадратов для этих опытов будет представлена следующими выражениями (в скобках указаны суммы квадратов для изучаемых факторов A, В, С и их взаимодействия):

CY = (СА + СВ + САB) + СZ

CY = (СА + СВ + СC + САB+ САC + СBC+ СABC) + СZ

Соответственно указанным компонентам варьирования результативного признака разлагают и общее число степеней свободы.

*Многофакторный дисперсионный комплекс* – это совокупность исходных наблюдений, позволяющих статистически оценить действие и взаимодействие нескольких изучаемых факторов на изменчивость результативного признака. Эффект взаимодействия составляет ту часть общего варьирования, которая вызвана различным действием одного фактора при разных градациях другого. Специфическое действие сочетаний в эксперименте выявляется тогда, когда при одной градации первого фактора второй действует слабо или угнетающе, а при другой градации он проявляется сильно и стимулирует развитие результативного признака.

В эксперименте часто эффект от совместного применения изучаемых факторов больше (синергизм) или меньше (антагонизм) суммы эффектов от раздельного применения каждого из них. Следовательно, существует взаимодействие факторов: в первом случае положительное, а во втором – отрицательное. Когда факторы не взаимодействуют, прибавка от совместного применения их равна сумме прибавок от раздельного воздействия (*аддитивизм*).

Дисперсионный анализ данных многофакторного комплекса проводится в два этапа:

1) Первый этап – разложение общей вариации результативного признака на варьирование вариантов и остаточное: CY = CV + CZ.

2) Второй этап – сумма квадратов отклонения для вариантов разлагается на компоненты, соответствующие источникам варьирования – главные эффекты изучаемых факторов и их взаимодействия. В двухфакторном опыте:

CV = CA + СB + CAB,

в трехфакторном:

CV = CA + СB + СC + CAB + CAC + CBC + CABC.

Дисперсионный анализ двухфакторного анализа по изучению градаций фактора А (число вариантов lA) и градаций фактора В (число вариантов lB), проведенного в *n* повторностях, осуществляется в следующие этапы:

1) Определяются суммы и средние по вариантам, общая сумма и средний урожай по опыту.

2) Вычисляются общая сумма квадратов отклонений, сумма квадратов для вариантов и остатка:

N = lA • lB • n;

;

;

;



Для вычисления сумм квадратов по факторам А, В и взаимодействию АВ составляется вспомогательная таблица, в которую записываются суммы по вариантам. Суммируя цифры, находятся суммы А, суммы В и вычисляются суммы квадратов отклонений для главных эффектов и взаимодействия.

Сумма квадратов для фактора А (при (lА – 1) степенях свободы):

.

Сумма квадратов для фактора В (при (lВ – 1) степенях свободы):



Сумма квадратов для взаимодействия АВ находится по разности (при (lА – 1)⋅(lВ – 1) степенях свободы):

.

Суммы квадратов записывают в таблицу дисперсионного анализа и определяют фактические значения критерия F (таблица 1).

*Таблица 1 – Результаты двухфакторного дисперсионного анализа*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариация | Сумма квадратов | Число степеней свободы | Дисперсия | Критерий Фишера, Fфакт | Уровень значимости, p | Критерий Фишера, Fтабл |
| Фактора А |  |  |  |  |  |  |
| Фактора В |  |  |  |  |  |  |
| Взаимодействия |  |  |  |  |  |  |
| Случайная |  |  |  |  |  |  |
| Общая |  |  |  |  |  |  |

**2 Преобразования**

Правильное использование дисперсионного анализа для обработки экспериментального материала предполагает однородность дисперсий по вариантам (выборкам), нормальное или близкое к нему распределение варьирующих величин, значения которых получают независимо одно от другого. В исследованиях независимость сравнения достигается рендомизированным размещением вариантов в опыте и случайным отбором проб в выборку. Когда есть основания предполагать неоднородность дисперсий по выборкам, о чем обычно свидетельствуют большие различия в варьировании по вариантам, то рекомендуется преобразовать (трансформировать) исходные данные. Трансформация дает возможность уменьшить пределы варьирования, устранить неоднородность дисперсий по выборкам и провести сравнение результатов более точно.

Наиболее подходящие и чаще всего применяемые преобразования следующие:

- *логарифмические* – каждое значение X трансформируется в lgX или в ln (X – l), если некоторые наблюдения равны нулю;

- *трансформация* данных подсчета численности путем извлечения квадратного корня из X, т. е. или , когда некоторые наблюдения дают нулевые или очень небольшие значения.

Преобразованные значения обрабатываются по схеме дисперсионного анализа и после проведенных оценок переходят обратно к первоначальным единицам измерения. Средние, полученные в процессе преобразования, будут несколько отличаться от средних, полученных по исходным данным, но разница обычно не велика, и более правильным средним будет значение, полученное обратным переходом.

**3 Универсальное использование дисперсий**

Все конечные результаты дисперсионного анализа можно получить без вычисления дисперсий, на основе только сумм квадратов.

Дисперсии все же приходится рассчитывать, принимая во внимание установившиеся традиции и привычную технику определения достоверности влияний.

Если в этом нет необходимости, то по одним суммам квадратов (без расчета дисперсий) можно определить:

- показатели силы влияний;

- ошибку репрезентативности показателя силы влияний;

- доверительные границы генерального параметра силы влияния (приближенно);

- показатель достоверности влияния;

- ошибку репрезентативности частных средних по градациям дисперсионного комплекса.

*3.1 Показатели силы влияний*

Определение силы влияний по их результатам требуется в биологии, сельском хозяйстве, медицине для выбора наиболее эффективных средств воздействия, для дозировки физических и химических агентов – стимуляторов, замедлителей, возбудителей, лекарственных препаратов, пищевых средств.

Измерение силы статистического влияния может быть произведено при помощи *квадрата корреляционного отношения* (предложен К. Пирсоном) – показатель, измеряющий силу влияния одного признака на другой при любой форме корреляционной связи.

Такое использование корреляционного отношения стало возможным потому, что в основу этого показателя К. Пирсон положил отношение величин, которые в настоящее время определяются как дисперсии – факториальная (межгрупповая) и общая, т. е. как основные элементы дисперсионного анализа.

При дисперсионном анализе ортогональных комплексов используются аддитивные свойства частных дисперсий (сумм квадратов центральных отклонений):

СV + СZ = СY, СА + СB + САВ + СZ = СY.

На этом свойстве аддитивности частных дисперсий основан описанный выше закон разложения общих дисперсий в ортогональных комплексах.

Если взять отношения частных дисперсий к общей:

; ,

Каждое из этих отношений будет показывать долю участия отдельной частной дисперсии в образовании общей дисперсии.

А так как каждая частная дисперсия соответствует одному из частных влияний, то отношение частной дисперсии к общей измеряет долю данного влияния в общем суммарном статистическом влиянии всех факторов определяющих развитие данного результативного признака.

Поэтому доля (выраженная в относительных единицах или в процентах) каждой частной дисперсии в общей их сумме может быть принята за показатель силы влияния, того влияния, которое характеризуется данной частной дисперсией – или одной из факториальных или случайной.

Например, в однофакторном комплексе, чем большую долю в общей дисперсии занимает ее факториальная часть (СV/СY), тем большая часть общего разнообразия обусловлена разнообразием градаций фактора, а это и означает, что фактор действует с большей силой, оставляя на долю случайных влияний меньшую часть общего разнообразия признака.

Таким образом, **сила влияния фактора (факторов) в дисперсионном анализе измеряется отношением дисперсий частных к общей**:



Так как этот показатель отражает основной закон разложения общих дисперсий и основное аддитивное свойство частных дисперсий, а также составлен из основных элементов дисперсионного анализа, то отношение одной из факториальных дисперсий (СV, СА, СB, САB) или случайной дисперсии (CZ) к общей (СY) можно назвать основным показателем силы влияний факторов – организованных и неорганизованных.

Квадратный корень из основного показателя силы влияния в однофакторных комплексах  есть пирсоновское корреляционное отношение, символ которого *η* перешел и на современный показатель, силы влияния.

В однофакторном комплексе определяются два показателя силы влияния: организованного фактора:



и неорганизованного фактора:



Сумма этих показателей равна единице: 

В двухфакторном комплексе определяются пять видов влияний:

Влияние первого фактора:



Влияние второго фактора:



Влияние сочетаний градаций обоих факторов:



Суммарное действие обоих факторов:



Действие случайных факторов:



Интерпретация показателей 4-го и 5-го влияний в двухфакторном дисперсионном комплексе проводится так же, как и в однофакторном: комплексе: чем больше , а значит, чем меньше , тем сильнее проявилось суммарное действие обоих организованных факторов.

Интерпретацию первых 3 влияний в двухфакторном комплексе лучше начинать с показателя влияния сочетаний градаций.

Этот показатель  всегда настолько больше нуля, насколько сильно действие одного фактора зависит от действия (градаций) другого.

Наименьшее значение этого показателя =0 получается, когда один фактор действует совершенно одинаково при любых градациях второго.

Наибольшее значение этого показателя равно показателю суммарного влияния организованных факторов: . Так может получиться, когда действие одного фактора при одной градации второго фактора строго противоположно его действию при других градациях второго фактора.

В таких крайних случаях получаются очень малые показатели частных влияний первого фактора  или второго , или того и другого – они приближаются к нулю, но это не связано со слабым действием каждого фактора в отдельности.

При ,   действие одного фактора настолько сильно зависит от действия другого, что становится невозможным изучать и использовать влияние первого фактора без учета влияния второго.

Показатели силы влияния каждого фактора в двухфакторном комплексе  и  имеют особое значение, зависящее от силы сочетания их градаций: .

Если показатель сочетания градаций не велик , то показатели частных влияний факторов ( и ) имеют обычное значение: чем они больше, тем сильнее влияние фактора.

Надо только помнить, что сила каждого фактора в отдельности измеряется в дисперсионном комплексе при усредненном действии градаций другого фактора, что равносильно известному требованию изучать варианты воздействий «при прочих равных условиях».

В тех же случаях, когда возрастает влияние сочетания градаций обоих факторов (), уже нельзя по показателям ( и ) судить в полной мере о силе соответствующих влияний. Как указывалось, в таких случаях возможны очень малые показатели силы статистического влияния каждого фактора в отдельности при очень заметном их физиологическом влиянии на результативный признак.

В таких случаях сильное действие одного фактора имеет противоположное направление в разных градациях другого фактора. При усреднении таких противоположных действий получается в большей или меньшей степени нивелировка измерений силы влияния, что и приводит к уменьшению показателей силы частного влияния каждого фактора в отдельности.

*3.2 Ошибка репрезентативности основного показателя силы влияния*

Точная формула ошибки основного показателя силы влияния еще не найдена. В однофакторных комплексах, когда ошибка репрезентативности определяется только для одного показателя факториального влияния, удобнее пользоваться таким вариантом общей формулы:



В двухфакторных комплексах, если рассчитаны дисперсии, можно использовать формулу:

, где индекс *i* – V, А, В или АВ.

Если дисперсии не рассчитываются, то наиболее удобна общая формула:



В этом случае для двухфакторного комплекса находится постоянная величина  и умножением ее на число степеней свободы по каждому влиянию находятся ошибки показателя этих влияний для данного комплекса.

Предлагаемая ошибка репрезентативности основного показателя силы влияния имеет существенные отличия от обычных ошибок выборочных показателей. Отношение основного показателя силы влияния к этой его ошибке:

 равно не критерию Стьюдента (как обычно), а критерию Фишера при двух степенях свободы: ν1 = r – 1, ν2 = N – r.

Использование предлагаемой ошибки для определения достоверности влияния дает точно такие же результаты, как и критерий Фишера.

Преимущество предлагаемой ошибки заключается в том, что по ней можно определить хотя бы приближенно доверительные границы основного показателя силы влияния, чего нельзя сделать при помощи критерия Фишера.

Эти доверительные границы определяются по обычной формуле, в которой вместо критерия Стьюдента (t) введен критерий Фишера (F):



Предлагаемая формула ошибки основного показателя силы влияния обладает еще одним важным свойством: критерий достоверности, полученный по этой ошибке, учитывает различие в достоверности показателей для комплексов различной структуры, т. е. одинакового объема, но с разным числом градаций (r) и с разной повторностью (n). Если, например, исследованы два комплекса одинакового объема N = 100 с одинаковым выборочным показателем силы влияния  = 0,6, но с разной структурой r1 = 2, n1 = 50, r2 = 50, n2 = 2, то достоверность показателя первого комплекса должна быть значительно выше по сравнению с достоверностью показателя второго комплекса.

В первом комплексе показатель влияния получен при анализе 2 частных средних (r1 = 2), из которых каждая подкреплена 50 данными (n1 = 50) и поэтому в гораздо меньшей степени отражает случайности в формировании средних величин.

Во втором комплексе, наоборот, показатель влияния получен при анализе 50 частных средних, из которых каждая усредняет всего 2 признака и потому подвержена в гораздо большей степени случайностям в привлечении данных в градации.

Большое различие в достоверности показателя силы влияния в этих двух комплексах в достаточной степени отражено в ошибке репрезентативности:





в критерии достоверности:

; 

; 

и в доверительных границах:

;



;



Следует отметить, что резкое различие комплексов по достоверности их показателей совершенно не учитывается обычной ошибкой корреляционного отношения. Для обоих только что разобранных комплексов ошибка репрезентативности корреляционного отношения будет одинаковой:



*3.3 Предельные значения показателей силы влияния*

Основной показатель силы влияния равен доле одного слагаемого от всей суммы слагаемых. Кроме того, этот показатель равен квадрату корреляционного отношения. По этим двум причинам показатель силы влияния всегда больше нуля, он не может быть отрицательным. Наименьшая его величина , когда все частные средние по градациям комплекса оказались одинаковыми, равными общей средней. Наибольшая величина показателя , когда все данные внутри каждой градации одинаковы и равны своей частной средней.

Только в единственном случае основной показатель силы влияния может получаться меньше нуля и больше единицы: при определении доверительных границ генерального параметра на основе малочисленного выборочного комплекса, при большом разнообразии значений изучаемого признака.

Во всех остальных случаях (когда не определяются доверительные границы) получение показателя силы влияния отрицательного или больше единицы всегда указывает или на ошибку счета, или на порочный метод определения силы влияния.

*3.4 Достоверность влияний*

Основной показатель силы влияния, полученный в выборочном исследовании, характеризует, прежде всего, ту степень влияния, которая реально, в действительности, проявилась в группе исследованных объектов, и как первичный факт подлежит непосредственному изучению и включению в общую цепь наблюдений, сопоставлений и вскрытия причин.

В то же время материалы выборочного комплекса, в котором определен основной показатель силы влияния, могут быть использованы также и для оценки соответствующего генерального параметра, т. е. степени влияния, свойственной общему комплексу генеральных совокупностей, соответствующих градациям выборочного комплекса.

Оценка генерального параметра не может быть произведена путем простого приравнивания его к тому показателю силы влияния, который выявлен в выборочном комплексе. Прогноз генеральных параметров силы влияний по выборочным показателям всегда может быть сделан с большей или меньшей погрешностью, неизбежной при анализе любого выборочного комплекса.

Получившееся в комплексе разнообразие частных средних никогда точно не соответствует разнообразию генеральных средних вследствие обычных ошибок репрезентативности при случайном наборе объектов и данных в градации.

Эта неточность в крайних случаях может привести к большому разнообразию выборочных частных средних при очень незначительных различиях или даже полном равенстве соответствующих генеральных средних по градациям комплекса. В подобных случаях выборочный показатель силы влияния дает преувеличенную характеристику силы влияния в генеральном комплексе.

Возможна и другая крайняя погрешность, когда случайности набора объектов и данных в градации выборочного комплекса приведут к очень малому разнообразию выборочных частных средних при большом разнообразии соответствующих генеральных средних. В подобных случаях выборочный показатель силы влияний даст преуменьшенный прогноз генерального параметра силы влияния.

Погрешности в оценке генерального параметра по выборочному показателю свойственны всякому выборочному исследованию, в том числе и любому выборочному дисперсионному анализу. Поэтому, как и во всяком выборочном исследовании, при дисперсионном анализе силы влияний определяются показатели, помогающие выяснить возможную величину ошибок прогноза генеральных параметров по выборочным показателям.

Учет ошибок репрезентативности в дисперсионном анализе производится в форме критерия достоверности выборочного показателя и доверительных границ генерального параметра силы влияния. В основе учета этих ошибок репрезентативности лежат следующие закономерности.

Отличие разнообразия выборочных средних от разнообразия соответствующих генеральных средних не может быть безграничным. Например, при равенстве генеральных средних разнообразие соответствующих выборочных средних не может быть больше определенной величины, которую можно установить при проведении анализа выборочных дисперсионных комплексов.

При полном равенстве генеральных частных средних разнообразие выборочных частных средних не может быть больше особого показателя – критерия Фишера при заданной вероятности безошибочных прогнозов.

Если разнообразие частных средних в выборочном комплексе не достигает критерия Фишера, значит, это выборочное разнообразие могло получиться в порядке случайных отклонений от нулевого разнообразия соответствующих генеральных средних. В таких случаях выборочный показатель силы влияний недостоверен, а прогноз генерального параметра неопределенен, так как не отвергает и не подтверждает влияния фактора в генеральном комплексе, при массовом применении фактора. В этих случаях, при недостоверности показателя силы влияния, эмпирический показатель полностью применим при характеристике влияния только в пределах изученного комплекса и не может быть использован для установления наличия или отсутствия влияния в генеральном комплексе.

Если разнообразие частных средних в выборочном комплексе равно или превышает критерий Фишера, значит, это выборочное разнообразие уже не могло получиться только вследствие случайных отклонений от разнообразия соответствующих генеральных средних. По этой причине разнообразие частных средних перешло допустимый порог, определяемый критерием Фишера, что и указало на достоверность изучаемого влияния.

При достоверном влиянии эмпирический показатель силы влияния применим уже не только в пределах выборочного комплекса. В таких случаях по выборочному показателю можно заключить вполне определенно о наличии изучаемого влияния в генеральном комплексе (при массовом применении фактора) и определить возможную генеральную силу этого фактора в форме доверительных границ, причем нижняя граница не будет отрицательной.

Достоверность влияния может иметь разную степень. Чем больше разнообразие действия градаций фактора, тем больше факториальное разнообразие отличается от случайного. Поэтому за меру достоверности влияния принят результат сопоставления степени двух разнообразий – факториального и случайного.

Следует твердо усвоить, что за базу оценки величины факториальных разнообразий (по фактору, по первому и второму факторам, по сочетанию их градаций, по суммарному действию факторов) можно брать только внутригрупповое случайное разнообразие. Здесь под вариантами опыта следует понимать градации фактора.

Сопоставление эмпирического критерия с его стандартными значениями может дать два принципиально различных результата.

Эмпирический критерий не достигает своего стандартного значения, взятого в соответствии с установленным порогом вероятности безошибочных прогнозов.

В таких случаях при требуемой вероятности невозможно сделать заключения как о равенстве, так и о различии соответствующих генеральных средних, так как малое разнообразие выборочных частных средних может получиться при любом (большом или малом, или нулевом) разнообразии генеральных средних по градациям комплекса. А это значит, что в таких случаях нельзя дать определенного прогноза о генеральном влиянии фактора: остается невыясненным, можно или нельзя ожидать с установленной вероятностью, что при массовом применении фактора получаются результаты, сходные с теми, которые получены в выборочном комплексе, конечно, при изученных градациях фактора и при данных условиях.

Следует остерегаться двух ошибочных мнений о недостоверном показателе силы влияния. Нельзя считать, что получение недостоверного показателя силы влияния указывает на то, что «влияния вообще нет», что влияние отсутствует в генеральных совокупностях.

Получение недостоверного показателя ни подтверждает, ни отрицает генеральное влияние.

Нельзя, также считать, что при получении недостоверного показателя силы влияния в проведенном исследовании вообще ничего не получено и это исследование проведено без всякой пользы. Это – большая ошибка. Та мера влияния, которая при этом получена, целиком относится к группе изученных объектов и как экспериментальный факт должна быть учтена и в данном, и в других, и в дальнейших работах.

В некоторых случаях изучение силы влияния проводится только для определенной ограниченной группы объектов, из которых и составляется дисперсионный комплекс. В таких случаях не ставится задача определить силу генерального влияния, и эмпирический показатель силы влияния приобретает полное значение без определения его достоверности.

В некоторых исследованиях именно недостоверность показателя силы влияния, определенная по прямому отношению дисперсий, дает ответ на основной вопрос этого исследования. Так бывает в тех случаях, когда недостоверность по прямому отношению дисперсий не опровергает сходства исследуемых особей по их личным качествам или наследственным способностям как представителей одной линии.

Определенность прогнозов приобретает силу достоверности, если при недостоверности по прямому отношению дисперсий малое влияние (а значит, большое сходство градаций) оказывается достоверным по обратному отношению .

Эмпирический критерий равен или превышает свое стандартное значение с требуемой вероятностью.

В таких случаях возможен определенный прогноз: генеральные средние по градациям комплекса неодинаковы и их разнообразие подобно тому, которое наблюдалось в выборочном комплексе. Разнообразие частных средних в выборочном комплексе теперь уже не может быть объяснено только случайностями выборочного исследования.

Достоверное влияние означает, что изученный фактор при его массовом применении в определенных градациях и в данных условиях будет оказывать влияние на результативный признак с вероятностью, найденной при оценке достоверности его силы влияния.